



USO DO PROGRAMA SCILAB NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS COM A FUNÇÃO FMINCON

Use of the Scilab Program in Solving Resistance of Materials Problems with the Fmincon Function

Luiz Antonio Farani de Souza¹

Resumo: A disciplina de Resistência dos Materiais é fundamental na formação de engenheiros, pois fornece conhecimentos teóricos e práticos acerca do comportamento dos materiais sob diferentes tipos de carregamento. Tradicionalmente, o ensino dessa disciplina se concentra em abordagens analíticas. No entanto, a criação de práticas pedagógicas que estimulem a capacidade de análise, resolução de problemas e interpretação de resultados é crucial. Nesse contexto, o escopo deste artigo é apresentar uma nova abordagem para a resolução de problemas em Resistência dos Materiais, utilizando a otimização estrutural no *software* livre Scilab. Os códigos computacionais para a solução numérica dos estudos de caso são elaborados utilizando-se a função *fmincon*. Essa função é uma ferramenta utilizada para resolver problemas de otimização de programação não linear, em que o objetivo é minimizar ou maximizar uma função sujeita a restrições, tanto de igualdade quanto de desigualdade. Com a inserção do computador em sala de aula, o aluno terá a possibilidade de aperfeiçoar a sua capacidade de compreender e de aplicar o conhecimento teórico adquirido, auxiliando o mesmo no processo de aprendizagem. A aplicação da metodologia proposta em sala de aula pode servir como ponto de partida para futuras pesquisas relacionadas ao potencial das tecnologias educacionais em outras áreas da engenharia.

Palavras-chave: Ensino de Engenharia. Otimização Estrutural. *Fmincon*.

Abstract: The subject of Resistance of Materials is fundamental to the training of engineers, as it provides theoretical and practical knowledge about the behavior of materials under different types of loading. Traditionally, the teaching of this subject has focused on analytical approaches. However, the creation of pedagogical practices that stimulate the ability to analyze, solve problems, and interpret results is crucial. In this context, the aim of this article is to present a novel approach to solving problems in Resistance of Materials by employing structural optimization using the open-source software Scilab. Computer codes for the numerical solution of case studies are developed using the *fmincon* function. This function is a tool used to solve nonlinear programming optimization problems, where the objective is to minimize or maximize a function subject to both equality and inequality constraints. With the integration of computers into the classroom, students will have the opportunity to enhance their ability to comprehend and apply the theoretical knowledge acquired, which in turn improves the learning process. The application of the proposed methodology in the classroom can serve as a starting point for future research related to the potential of educational technologies in other engineering fields.

Keywords: Engineering Education. Structural Optimization. *Fmincon*.

¹ Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia pela UFPR. Docente e pesquisador da UTFPR e do programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PCV da UEM. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7194-5851>. E-mail: lasouza@utfpr.edu.br.



1 Introdução

A educação tem passado por várias mudanças de paradigma e as aulas expositivas já não produzem o mesmo efeito no aprendizado, o que exige a repensar as metodologias de ensino (Henrique *et al.*, 2015). Os *softwares* representam um recurso alternativo no campo da educação, no sentido de promover o desenvolvimento cognitivo dos alunos (Souza Júnior *et al.*, 2024).

Novas metodologias de ensino e técnicas inovadoras demonstram as influências, vantagens e desvantagens das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) no campo educacional. Conforme a tecnologia evoluiu, novas ferramentas pedagógicas emergiram. Esses avanços propiciaram a criação de novas técnicas e métodos, que abriram uma ampla gama de possibilidades não apenas na educação (educação a distância, informação interativa, laboratórios remotos e virtuais), como também na área industrial (controle remoto, gerenciamento remoto, horário flexível). O rápido desenvolvimento da internet e da computação facilitou o desenvolvimento de soluções viáveis e econômicas (Rodriguez *et al.*, 2006).

Cada vez mais, os alunos estão imersos em uma variedade de recursos tecnológicos e, com isso, tornam-se parte integrante de um novo grupo chamado de geração digital. As mudanças de perfil desse novo aluno, que nasceu nessa era totalmente informatizada e que carrega consigo toda uma bagagem cultural midiática, exigem que os educadores se atualizem constantemente para garantir um processo de aprendizagem mais dinâmico e colaborativo (Fialho; Matos, 2010).

Muitas instituições acadêmicas de ensino superior não têm recursos financeiros para comprar licenças suficientes de pacotes de *software* para todos os alunos. No entanto, ferramentas gratuitas de programa de código aberto atingiram tal maturidade que podem ser consideradas como alternativa ao *software* proprietário para serem utilizadas nessas instituições, tanto como ferramentas de educação quanto de pesquisa. A introdução de ferramentas de *software* de código aberto em disciplinas da graduação nas engenharias traz uma mudança vertical nas habilidades de aprendizagem dos alunos, inclinando-os a pensar como desenvolvedores e engenheiros durante o uso dessas ferramentas, em vez de serem meros usuários finais das ferramentas de *software* proprietário (Nehra; Tyagi, 2014; Tapaskar *et al.*, 2018).

O programa Scilab é um instrumento científico para computação numérica distribuído gratuitamente via internet (disponível para *download* em <http://www.scilab.org>). Essa ferramenta fornece um poderoso ambiente computacional aberto para aplicações científicas, podendo ser usada como um terminal matemático interativo (Maia-Afonso; Dias, 2020). A interface oferecida pelo Scilab proporciona ao usuário facilidade e adaptação aos comandos, além de ser uma calculadora poderosa para resolver problemas que envolvem uma grande quantidade de dados numéricos (Costa; Souza, 2020).

Em geral, os programas com base em visualização conseguem trazer situações reais para serem estudadas em sala de aula, ou seja, situações contextualizadas, fornecendo assim recursos para a resolução de problemas de engenharia. Além disso, a utilização desses programas pode estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, e consequentemente da autonomia do indivíduo, na proporção em que os envolvidos passam a levantar hipóteses, fazer interferências e tirar conclusões a partir dos resultados apresentados (Maia-Afonso; Dias, 2020).

Atualmente, empresas têm investido em programas de computador para maximizar seu retorno financeiro. Para melhorar esse processo, são utilizados procedimentos de otimização nos quais uma função objetivo é definida e pode estar sujeita a restrições. A otimização estrutural consiste em dispor as peças de uma estrutura de forma que essa seja capaz de suportar cargas com segurança, com baixo custo e com menor volume de material possível (Santee; Simões, 2022).

A busca pelo projeto ideal de uma estrutura é um campo importante dentro da otimização estrutural. Embora as suposições mecânicas raramente sejam atendidas em situações reais de carregamento, a otimização da topologia e do dimensionamento estrutural é fundamental para uma análise mais detalhada de projetos preliminares, oferecendo percepções valiosas para a engenharia (Stolpe, 2016). O projeto ótimo de estruturas pode incluir muitos aspectos, como por exemplo custo de fabricação, energia, custo do material, montagem, massa, tensão e deslocamento. Em aplicações práticas, os critérios de otimização, assim como os fatores de ponderação, serão definidos pelo projeto geral (Dominguez; Stiharu; Sedaghati, 2006).

Para fins educacionais, a incorporação de ferramentas computacionais facilita o aprendizado e a aplicação de conceitos da Engenharia Civil. Especificamente na disciplina de Resistência dos Materiais, essas ferramentas se tornam instrumentos importantes na realização de tarefas que envolvem modelagem matemática, simulação e análise de comportamento mecânico de estruturas. Essa disciplina é essencial para a formação de engenheiros, uma vez que fornece conhecimentos teóricos e práticos sobre o comportamento dos materiais quando submetidos a diversos tipos de carga. No entanto, geralmente, nessa disciplina, a resolução de problemas é abordada apenas de forma analítica com os alunos (Antolin *et al.*, 2023).

Nesse contexto, este artigo tem por objetivo geral apresentar o procedimento da solução numérica de quatro problemas clássicos da Resistência dos Materiais utilizando a otimização estrutural. Para tal, códigos computacionais com o programa livre Scilab, versão 2024.1.0 (Scilab, 2024), são elaborados com a função *fmincon*. Para validação dos resultados numéricos obtidos com essa função, os mesmos são confrontados com os resultados analíticos disponíveis na literatura. Os estudos de caso abrangem vários conceitos básicos, como conservação da energia, tensão, flambagem, flexão e cisalhamento.

A otimização é uma técnica matemática que busca um valor ótimo para variáveis de projeto que minimizem (ou maximizem) uma função objetivo, sujeita a restrições de igualdade, desigualdade e/ou laterais. A utilização de ferramentas de otimização em projetos estruturais apresenta papel fundamental no dimensionamento de elementos estruturais, sobretudo no que diz respeito às restrições de projeto referentes à segurança (critérios de resistência, estabilidade e deformação), à redução de custos e ao aumento de eficiência estrutural.

Com a proposta da utilização do computador no processo de ensino-aprendizagem, a inserção de simulações computacionais na disciplina de Resistência dos Materiais permitirá ao discente analisar e interpretar os resultados obtidos, aperfeiçoando a sua capacidade de compreender e de aplicar o conhecimento teórico adquirido. Em visto disso, a metodologia de ensino proposta neste trabalho almeja contribuir no desenvolvimento de competências, especificamente na interpretação de problemas na área das estruturas, na determinação da solução por meio de linguagem matemática e raciocínio lógico com o emprego de ferramentas tecnológicas e na validação dos resultados com as hipóteses selecionadas.

Ademais, acredita-se que este trabalho tem potencialidade didática, uma vez que une conceitos da Resistência dos Materiais a uma ferramenta computacional acessível e gratuita. O passo a passo das resoluções dos problemas pode servir de base para a resolução de outros

problemas específicos de estruturas. Os estudos de caso podem ser replicados em sala aula por educadores, enriquecendo o aprendizado de conceitos dessa disciplina.

2 Metodologia

Nesta seção, são apresentadas a base teórica e a implementação computacional para resolver problemas de Resistência dos Materiais por meio da otimização estrutural.

2.1 Otimização estrutural

A otimização é o processo de encontrar o valor mínimo ou máximo de uma função objetivo. Pode ser classificada em dois gêneros de funções, quais sejam: otimização restrita, quando a função apresenta variáveis de projeto restritas, delimitando o espaço de busca; e otimização irrestrita, quando não há restrições (Ramos *et al.*, 2024).

Geralmente, um problema de otimização segue um modelo padrão, que conta com um número determinado de variáveis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ para minimizar (ou maximizar) uma certa função objetivo $f(\mathbf{x})$, respeitando p restrições de igualdade e m restrições de desigualdade. Esse modelo pode ser descrito matematicamente por (Arora, 2004):

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ & \text{Sujeita a } h_j(\mathbf{x}) = 0, \text{ com } j = 1, \dots, p \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \text{ com } i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $f(\mathbf{x})$ a função objetivo, $g_i(\mathbf{x})$ as restrições de desigualdade, $h_j(\mathbf{x})$ as restrições de igualdade e o vetor \mathbf{x} a variável de projeto. Valores mínimos e/ou máximos podem ser incluídos para as variáveis e, assim, esses são também restrições de desigualdade, tais como:

$$x_i \geq 0 \text{ ou } x_{il} \leq x_i \leq x_{iu} \quad (2)$$

na qual x_{il} denota o valor mínimo de x_i e x_{iu} , o valor máximo. Algoritmos de otimização estrutural visam encontrar a configuração ideal de um sistema, minimizando seu peso ou volume. Para isso, buscam um conjunto ótimo de variáveis de projeto, que podem ser discretas ou contínuas, sem violar restrições previamente estabelecidas. As variáveis discretas são variáveis de um grupo de valores pré-definidos. Por sua vez, as variáveis contínuas são aquelas em que qualquer valor pode ser aceito em um determinado intervalo. Em muitos problemas de engenharia, as variáveis de projeto são discretas devido à disponibilidade de componentes em tamanhos padronizados (Dede, 2014; Ramos *et al.*, 2024).

A otimização estrutural é amplamente usada na fase de projeto com o propósito de melhorar o desempenho estrutural e reduzir custos. A otimização de projeto estrutural determinística descarta qualquer aleatoriedade. Nessa formulação, a função objetivo e as restrições se baseiam em valores nominais de variáveis de projeto e outros parâmetros estruturais. O ótimo obtido em problemas de otimização estrutural determinística minimiza a função objetivo e satisfaz as restrições para valores de parâmetros nominais (Doltsinis; Kang; Cheng, 2005).



2.2 Função *Fmincon*

O pacote externo *fmincon* disponível para o *software* Scilab é um solucionador de otimização multivariável não linear restrito a partir do Método do Ponto Interior (IpOpt), que possui como autores Michael Baudin e Stéphane Motteet. A função, por padrão, utiliza uma fórmula L-BFGS para calcular uma aproximação do hessiano do Lagrangeano, gerando uma série de iterações a partir de uma entrada inicial de dados. O algoritmo IpOpt exibe um bom desempenho em alcançar a convergência global sob condições moderadas com altas taxas de convergência, sendo, principalmente, uma ferramenta de otimização global baseada no Método de Ponto Interior Primal-Dual (Silva; Kwong; Oliveira Cardoso, 2021).

Conforme a descrição no Navegador da Ajuda do Scilab, a função *fmincon* tem o objetivo de calcular um valor mínimo de uma função escalar de várias variáveis a partir de uma estimativa inicial. Assim, o problema de otimização restrita é encontrar o mínimo de $f(\mathbf{x})$ tal que:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ & \text{Sujeita a } \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{c}_{eq}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \\ & \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \end{aligned} \quad (3)$$

em que \mathbf{x} , \mathbf{b} , \mathbf{b}_{eq} , \mathbf{lb} e \mathbf{ub} são vetores, \mathbf{A} e \mathbf{A}_{eq} são matrizes, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{c}_{eq}(\mathbf{x})$ são funções que retornam vetores e $f(\mathbf{x})$ é uma função que retorna um escalar. Salienta-se que $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{c}_{eq}(\mathbf{x})$ podem ser funções não lineares.

2.3 Implementação computacional

Basicamente, os elementos de um problema de otimização estrutural são: um conjunto de variáveis de projeto, que variam na busca do ótimo; uma função objetivo; e um conjunto de restrições ou exigências que devem ser respeitadas (Maia, 2009).

A função objetivo é escrita em função das variáveis de projeto escolhidas. Essa função é utilizada como uma medida da eficiência do projeto. Nos problemas estudados neste artigo, a função objetivo é definida em termos da massa total ou do volume total do sistema estrutural ou da carga máxima aplicada na estrutura. As restrições impostas refletem, além do equilíbrio estrutural estático, os limites de força normal máxima, de tensão máxima admissível (normal, de flexão ou de cisalhamento), de carga crítica de flambagem nas barras comprimidas ou de deslocamentos nodais impostos.

Para resolver os problemas de otimização, é criado um *script* que consiste de um texto com uma sequência de comandos que será posteriormente executada. O editor de *script* do Scilab é intitulado *SciNotes*. Para executar um *script*, deve-se clicar na barra de ferramentas do *SciNotes* em “Executar” e “Salvar e Executar” ou pressionar a tecla F5.

Do ponto de vista de programação, o termo função refere-se a uma rotina qualquer que relaciona uma entrada com uma saída. A sintaxe básica da definição de uma função (*function*) contém três elementos, que são os parâmetros de entrada, os parâmetros de saída e o nome da função. A sintaxe geral para definir uma função no Scilab é dada na Figura 1.



Figura 1 — Sintaxe geral para definir uma função.

```
function [saida1,saida2,...]=nome_funcao(entrada1,entrada2,...)
...//relação entre as saidas e entradas
...saida1 = ...
...saida2 = ...
...
endfunction
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Duas funções (*function*) são criadas, a saber: a primeira refere-se à função $f = objfun(x)$, na qual é informada a função objetivo; e a segunda refere-se à função $[c, ceq] = confun(x)$, em que são informadas as restrições de igualdade e desigualdade. A solução é obtida executando-se a função $[x,fval] = fmincon(objfun,x0,[],[],[],[],lb,ub,confun)$, a qual retorna x , que é a solução do problema de otimização, e $fval$, que é o valor da função objetivo em x . Na Figura 2, aparecem as etapas de implementação computacional para o procedimento de resolução dos problemas de otimização com a função *fmincon*.

Figura 2 — Etapas para a implementação computacional do procedimento de resolução.

```
Etapa 1 – Definição das variáveis de projeto que se deseja otimizar.
Etapa 2 – Definição da função objetivo.
function f = objfun()
    Definir a função objetivo f
endfunction
Etapa 3 – Definição das restrições de igualdade ou desigualdade que descrevem as situações desejáveis de projeto.
function [c,ceq] = confun ()
    Determinar os esforços internos, tensões e deformações do sistema estrutural
    Informar as restrições não lineares de desigualdade
    Informar as restrições não lineares de igualdade
endfunction
Etapa 4 – Obtenção dos valores ótimos das variáveis de projeto que minimiza ou maximiza a função objetivo.
[x,fval] = fmincon()
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3 Resultados e Discussão

Nesta seção, são apresentadas soluções passo a passo para quatro problemas típicos da Resistência dos Materiais. Para a resolução, emprega-se o algoritmo de otimização *fmincon*, versão 1.0.7, disponível no pacote de otimização do Scilab (2024). Através desse algoritmo, busca-se obter a solução ótima para cada problema, considerando-se as restrições impostas pelas equações da Resistência dos Materiais.

3.1 Treliça plana com três barras

Considere a treliça plana composta por três barras e três nós, contendo um apoio fixo e um apoio móvel, conforme o modelo estrutural ilustrado na Figura 3. O material das barras é o aço estrutural ASTM A-36 ($E = 200$ GPa e $\rho = 7850$ kg/m³). Quando a geometria da treliça é fixa, o objetivo da otimização da mesma é selecionar a área da seção transversal para cada barra de modo que a massa total da estrutura seja minimizada enquanto as restrições de tensão e de

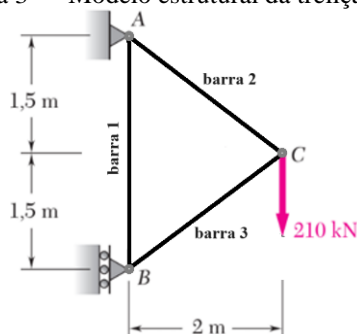


deslocamento são atendidas (Camp; Farshchin, 2014). Como restrições, consideram-se o deslocamento máximo admissível $v_{lim} = 5 \text{ mm}$ no nó C da treliça e a tensão normal máxima admissível $\sigma_{adm} = 200 \text{ MPa}$ e a área mínima admissível de 500 mm^2 para cada barra. As áreas iniciais das barras 1 e 2 são adotadas $A_1^{(0)} = A_2^{(0)} = 1200 \text{ mm}^2$ e da barra 3, $A_3^{(0)} = 1800 \text{ mm}^2$. A massa inicial da estrutura é determinada da seguinte forma:

$$massa_{inicial} = \rho(A_1^{(0)} L_1 + A_2^{(0)} L_2 + A_3^{(0)} L_3) \quad (4)$$

$$massa_{inicial} = 7850 \times 10^{-6}(1200 \times 3 + 1200 \times 2,5 + 1800 \times 2,5) = 87,135 \text{ kg}$$

Figura 3 — Modelo estrutural da treliça plana.



Fonte: Adaptado de Lira (2023).

O problema matemático de otimização associado à estrutura em tela é descrito por:

$$\text{Min}_A f(A) = \rho(A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3) \quad (5)$$

$$\text{Sujeita a } \frac{N_1}{A_1} \leq \sigma_{adm} \quad (6)$$

$$\frac{N_2}{A_2} \leq \sigma_{adm} \quad (7)$$

$$\frac{N_3}{A_3} \leq \sigma_{adm} \quad (8)$$

$$\frac{1}{210000} \sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2 L_i}{EA_i} \leq v_{lim} \quad (9)$$

Para calcular o deslocamento vertical no nó C da treliça (v_C), utiliza-se o método da Conservação da Energia. Nesse método, a energia externa U_e é igualada à energia interna U_i , o que resulta na seguinte expressão:

$$U_e = U_i$$

$$\frac{210000}{2} v_C = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2 L_i}{2EA_i} \quad (10)$$

Na Tabela 1 aparecem os resultados numéricos obtidos com a função *fmincon*, os quais ficam próximos dos valores obtidos por Lira (2023). Observa-se que há uma redução da massa da estrutura em cerca de 39,25 %. A redução da massa após a otimização estrutural traz diversas vantagens, como a redução de custos de materiais (aquisição e transporte) e a diminuição de cargas na fundação (projeto de fundações mais simples e econômicas). Nesse sentido, ao



otimizar uma estrutura, os engenheiros podem projetar edificações mais eficientes, sustentáveis e competitivas.

Tabela 1 — Resultados numéricos obtidos para a treliça com três barras.

Variáveis	Valor inicial	Função <i>fmincon</i>	Lira (2023)
A ₁ (mm ²)	1200	594,11238	595,00
A ₂ (mm ²)	1200	992,19763	991,67
A ₃ (mm ²)	1800	992,19763	991,67
Massa (kg)	87,135	39,249321	39,2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 4 — Código computacional para o problema da treliça com três barras.

```

clc
clear
Smax=200*10^6; //tensão normal admissível
E=200*10^9; //módulo de elasticidade longitudinal
L(1)=3; //comprimento da barra 1
L(2)=sqrt(2^2+1.5^2); //comprimento da barra 2
L(3)=L(2); //comprimento da barra 3
NBC=140000/sind(53.130102); //força normal da barra 3
NAB=NBC*cosd(53.130102); //força normal da barra 1
NAC=NBC; //força normal da barra 2
massa_inicial=7850*(1200*10^-6*L(1)+ 1200*10^-6*L(2)+ 1800*10^-6*L(3)); //massa inicial
//Função objetivo
function f=objfun(A)
    f=[7850*(A(1)*L(1)+A(2)*L(2)+A(3)*L(3))];
endfunction
function [c, ceq]=confun(A)
    //Restrições não lineares de desigualdade
    c = [NAB/A(1)-Smax
        NAC/A(2)-Smax
        NBC/A(3)-Smax
        (NAB^2*L(1)/(E*A(1))+NAC^2*L(2)/(E*A(2))+NBC^2*L(3)/(E*A(3)))/210000-5*10^-3];
    //Restrições não lineares de igualdade
    ceq = [];
endfunction
// Solução inicial
A0 = [1200*10^-6, 1200*10^-6, 1800*10^-6];
// Área mínima admissível para as barras
lb = [500*10^-6,500*10^-6,500*10^-6];
ub = [];
// Execução da função fmincon
[A,fval] = fmincon ( objfun , A0,[],[],[],[],lb,ub,confun)
disp('Solução A(1), A(2) e A(3) em mm^2:',A*10^6)
disp('Massa da estrutura em kg:',fval)
disp('Redução da massa em %:',(massa_inicial-fval)/massa_inicial*100)
    
```

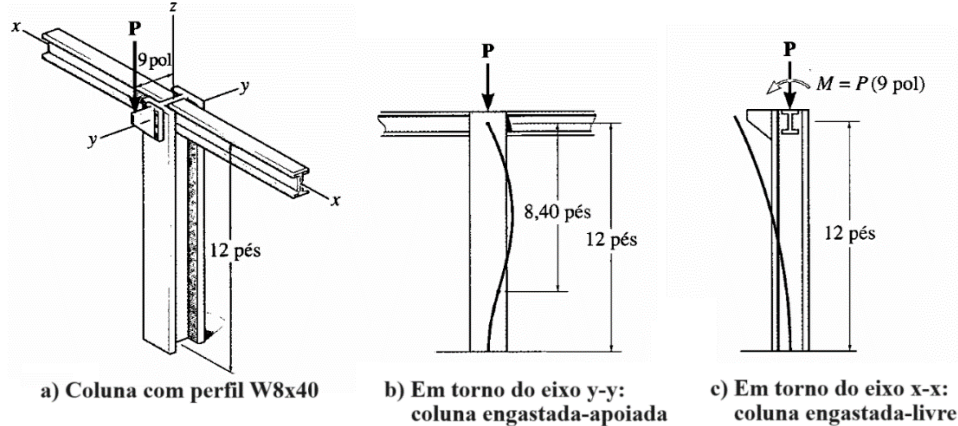
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.2 Coluna sujeita à força excêntrica

Considere a coluna ilustrada na Figura 5a constituída pelo perfil W8×40 e aço ASTM A-36 (módulo de elasticidade $E = 2,9 \times 10^4$ ksi e tensão de escoamento $\sigma_e = 36$ ksi). A coluna está engastada na base e reforçada na parte superior por vigas, de modo que o deslocamento fique impedido, porém pode rotacionar em torno do eixo y-y. Além disso, a coluna pode oscilar no plano y-z. Esse exemplo foi estudado analiticamente por Hibbeler (2004), sendo que seu objetivo é determinar a força excêntrica máxima P que ela pode suportar sem que inicie a flambagem ou o aço escoe. Com relação às condições de apoio da estrutura, em torno do eixo y-y a mesma se comporta como estivesse acoplada por pino no topo e engastada na parte inferior (Figura 5b). A coluna em torno do eixo x-x está livre na parte superior e engastada na parte inferior (Figura 5c).



Figura 5 — Esquema estrutural da coluna constituída por perfil W8×40.



Fonte: Adaptada de Hibbeler (2004).

Supondo que ocorra a flambagem em torno do eixo y-y, utiliza-se a fórmula de Euler dada por:

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(k_y L)^2} = 1383,1146 \text{ kip} \quad (11)$$

sendo k_y o fator de comprimento efetivo e I_y o momento de inércia, ambos calculados em relação ao eixo y-y. Na Equação (11), consideram-se $k_y = 0,7$, $L = 144 \text{ pol}$ e $I_y = 49,1 \text{ pol}^4$. No caso de ocorrer o escoamento com relação ao eixo x-x, utiliza-se a Fórmula da Secante que é dada por:

$$\sigma_e = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ed}{r_x^2} \sec\left(\frac{k_x L}{2r_x}\right) \sqrt{\frac{P}{EA}} \right] \quad (12)$$

$$421,2 = P \left[1 + 2,9750856 \sec(0,0699821 \sqrt{P}) \right]$$

na qual a área da seção transversal é $A = 11,7 \text{ pol}^2$, a distância do eixo neutro até a fibra externa da coluna em que ocorre a tensão máxima de compressão é $d = 4,125 \text{ pol}$, o fator de comprimento efetivo é $k_x = 2$, o raio de giração é $r_x = 3,5325108 \text{ pol}$ e a excentricidade da força P é $e = 9 \text{ pol}$. O problema de otimização é então descrito por:

$$\text{Min}_P f(P) = -P \quad (13)$$

$$\text{Sujeito a } P \leq 1383,1146 \quad (14)$$

$$P \left[1 + 2,9750856 \sec(0,0699821 \sqrt{P}) \right] \leq 421,2 \quad (15)$$

Na Figura 6, aparece o código computacional implementado com a função *fmincon* para determinar a força excêntrica máxima P . Na Tabela 2, é mostrado o resultado obtido com o código implementado, havendo boa concordância com aquele obtido por Hibbeler (2004). Observa-se que, caso seja considerada somente a restrição dada em Equação (14), a carga P corresponde a 1383,1146 kip. Entretanto, ao considerar as duas restrições na análise (Equações (14) e (15)), obtém-se $P = 88,471483 \text{ kip}$. Portanto, a falha da coluna ocorre em torno do eixo x-x, que equivale ao menor valor da força P entre esses dois valores.



Figura 6 — Código computacional para o problema da coluna com carga excêntrica.

```

clc
clear
//Função objetivo
function f=objfun(P)
    f = -P
endfunction
function [c, ceq]=confun(P)
//Restrições não lineares de desigualdade
c = [-1383.1146+P
P*(1+2.9750856*sec(0.0699821*sqrt(P)))-421.2]
//Restrições não lineares de igualdade
ceq = []
endfunction
//Aproximação inicial
P0 = [0];
//Limites inferior e superior
lb = [0];
ub = [];
//Execução da função fmincon
[P,fval] = fmincon ( objfun , P0,[],[],[],[],lb,ub,confun)
//Saída de dados
disp('Carga máxima P:',P)
    
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Tabela 2 — Resultados numéricos obtidos para a coluna com carga excêntrica.

Variáveis	Função fmincon	Hibbeler (2004)
P (kip)	88,471483	88,4

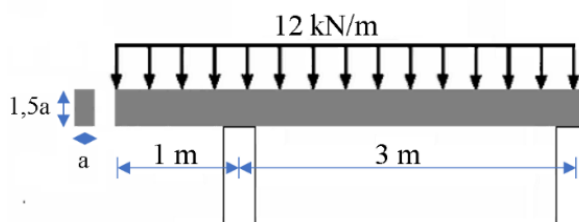
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A flambagem é um fenômeno de instabilidade elástica que ocorre em elementos estruturais longos e esbeltos, como as colunas, quando submetidos a cargas axiais de compressão. A análise de flambagem é essencial no projeto de uma estrutura, porque permite dimensionar adequadamente os elementos estruturais, evitando o colapso precoce. A Fórmula da Secante considera a excentricidade inicial da carga e a curvatura inicial da coluna, fornecendo uma estimativa mais realista da carga de flambagem (Beer *et al.*, 2016; Beer, 2021).

3.3 Viga biapoiada com um balanço

Considere a viga biapoiada com um balanço, constituída de madeira compensada, com comprimento total $L = 4$ m e sujeita a uma força distribuída uniforme de 12 kN/m, de acordo com o modelo estrutural ilustrado na Figura 7. Supõe-se que a seção transversal da viga tem a relação altura/largura igual a 1,5. Quanto ao material que constitui a viga, têm-se a tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 9,0$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 0,6$ MPa.

Figura 7 — Esquema estrutural viga biapoiada com um balanço.



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2004).

O objetivo desse exemplo é determinar a largura mínima a com o auxílio da função *fmincon*. Esse exemplo foi apresentado por Hibbeler (2004). Com o auxílio do programa Ftool (Martha, 2018), obtêm-se os esforços internos máximos na viga, que são o momento fletor máximo $M_{máx} = 10,67$ kNm e a força cortante máxima $V_{máx} = 20$ kN. A tensão de cisalhamento máxima ($\tau_{máx}$) na seção transversal é determinada conforme a equação:

$$\tau_{máx} = 1,5 \frac{V_{máx}}{A} = 1,5 \frac{V_{máx}}{1,5 a^2} = \frac{V_{máx}}{a^2} \quad (16)$$



sendo A a área da seção transversal da viga. No que concerne à tensão normal máxima de flexão, essa é calculada pela expressão:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}y_{m\acute{a}x}}{I} = \frac{M_{m\acute{a}x}1,5a}{\frac{a(1,5a)^3}{12}} = \frac{12M_{m\acute{a}x}1,5a}{2a(1,5a)^3} = \frac{6M_{m\acute{a}x}}{a(1,5a)^2} \quad (17)$$

na qual I é o momento de inércia da área da seção transversal em relação ao eixo neutro e $y_{m\acute{a}x}$ é a distância perpendicular do eixo neutro ao ponto mais afastado desse eixo. A formulação matemática de otimização associada a esse problema é dada por:

$$\text{Min}_a f(a) = 1,5 a^2 L \quad (18)$$

$$\text{Sujeita a } \frac{V_{m\acute{a}x}}{a^2} \leq \tau_{adm} \quad (19)$$

$$\frac{6M_{m\acute{a}x}}{a(1,5a)^2} \leq \sigma_{adm} \quad (20)$$

O código computacional implementado com a função *fmincon* para obter a largura mínima a é mostrado na Figura 8. Na Tabela 3, é apresentado o resultado obtido com o código implementado, havendo boa concordância com aquele obtido por Hibbeler (2004).

Figura 8 — Código computacional para o problema da viga biapoçada com balanço.

```

clc
clear
//Entrada de dados
Smax=9*10^6; //tensão admissível de flexão
Tmax=0.6*10^6; //tensão admissível de cisalhamento
Vmax=20*10^3; //força cortante máxima
Mmax=10.67*10^3; //momento fletor máximo
L=4; //comprimento total da viga
//Função objetivo
function f=objfun(a)
    f=[1.5*L*a^2];
endfunction
function [c, ceq]=confun(a)
    //Restrições não lineares de desigualdade
    c = [Vmax/(a^2)-Tmax;
        6*Mmax/(a*(a*1.5)^2)-Smax]
    //Restrições não lineares de igualdade
    ceq = []
endfunction
//Aproximação inicial
a0 = [0];
//Limites inferior e superior
lb = [0];
ub = [];
//Execução da função fmincon
[a,fval] = fmincon ( objfun , a0,[],[],[],[],lb,ub,confun)
//Saída de dados
disp('Largura da seção a (m):',a)
    
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Tabela 3 — Resultados numéricos obtidos para a viga biapoçada com balanço.

Variáveis	Função fmincon	Hibbeler (2004)
a (m)	0,1825742	0,183

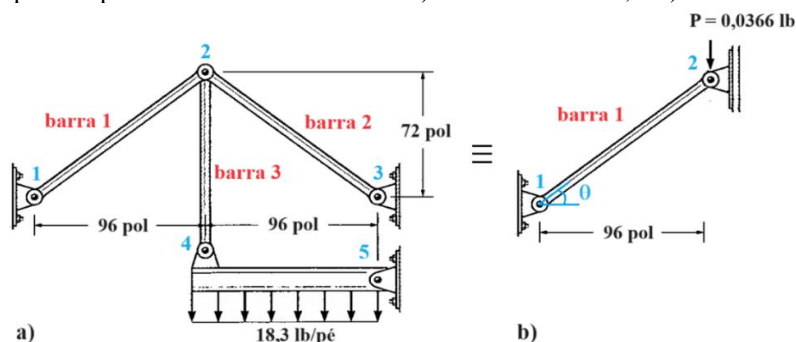
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.4 Viga suportada por três barras biarticuladas

Considere o modelo estrutural da viga suportada por três barras biarticuladas com seção transversal circular, de acordo com o modelo estrutural na Figura 9a. O material das barras é o aço ASTM A-36 (módulo de elasticidade $E = 29000$ ksi, tensão de escoamento $\sigma_e = 36$ ksi e densidade $\rho = 0,284$ lb/pol³). O objetivo é determinar o diâmetro mínimo d das barras 1 e 2 sem que ocorra a flambagem ou o material escoe nas mesmas. Da Estática, nota-se que as forças normais nessas barras são iguais, ou seja, $N_1 = N_2$. Assim, para determinar o diâmetro d , considera-se o modelo estrutural equivalente ilustrado na Figura 9b. Esse problema foi adaptado de Hibbeler (2004).



Figura 9 — Viga suportada por três barras biarticuladas: a) modelo estrutural; e b) modelo estrutural equivalente.



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2004).

Os deslocamentos nodais nos nós 1 e 2 são calculados por meio do Método dos Elementos Finitos. Para a malha constituída por um elemento finito de barra 2D, o sistema de equações lineares no sistema global de coordenadas cartesianas com a imposição das condições de contorno é representado por:

$$Ku = F \quad (21)$$

$$\text{diag}\left[1 \ 1 \ 1 \ \frac{EA}{L} \text{sen}^2\theta\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,0366 \end{bmatrix} \quad (22)$$

na qual K é a matriz de rigidez da estrutura equivalente, u é vetor de deslocamentos, F é o vetor de forças externas, L é o comprimento indeformado da barra e u_i e v_i , com $i = 1, 2$, são os deslocamentos horizontais e verticais, respectivamente. O símbolo $\text{diag}[\dots]$ representa a matriz diagonal com os coeficientes diagonais mostrados dentro dos colchetes. A relação entre os deslocamentos nodais nos sistemas global (u_i, v_i) e local (u_{il}, v_{il}) de coordenadas é dada por (Zienkiewicz; Taylor; Zhu, 2005; Bathe, 2016):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} u_{1l} \\ v_{1l} \\ u_{2l} \\ v_{2l} \end{bmatrix} \quad (23)$$

na qual T é a matriz de transformação representada por:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Considerando a Lei de Hooke, a tensão normal na barra 1 (σ_1) é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_e = E \frac{(u_{2l} - u_{1l})}{L} \quad (25)$$



na qual ε_e é a deformação específica de engenharia. Como a força axial na barra é de compressão, a mesma pode sofrer o fenômeno de instabilidade conhecido como flambagem. A determinação da tensão crítica de flambagem (σ_{cr}) é dada pela fórmula de Euler:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2 A} \quad (26)$$

Como a barra 1 é biarticulada, considera-se o fator $k = 1,0$. O momento de inércia da área da seção transversal I da barra é calculado por:

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (27)$$

O problema matemático de otimização associado ao sistema estrutural em análise é descrito por:

$$\text{Min}_d \quad f(d) = \rho L_1 A_1 \quad (28)$$

$$\text{Sujeita a} \quad \sigma_1 \leq \sigma_e \quad (29)$$

$$\sigma_1 \leq \sigma_{cr} \quad (30)$$

$$d_1 \geq 0,0001 \quad (31)$$

Na Figura 10 aparece o código computacional implementado com a função *fmincon* para obter o diâmetro mínimo da barra 1. Na Tabela 4 é mostrado o resultado obtido com o código implementado, havendo boa concordância com o resultado obtido por Hibbeler (2004). Salienta-se que o diâmetro mínimo obtido para a barra 1 é o mesmo para a barra 2 (isto é, $d_1 = d_2$).

Figura 10 - Código computacional para o problema de viga suportada por três barras biarticuladas.

<code>clc</code>	<code>//Função de restrições</code>
<code>clear</code>	<code>function [c, ceq]=confun(d, L, E, Fext, T)</code>
<code>//Entrada de dados</code>	<code>K=[1 0 0 0; //matriz de rigidez</code>
<code>//Janela iterativa</code>	<code>0 1 0 0;</code>
<code>txt = ['Módulo de elasticidade:','Tensão de</code>	<code>0 0 1 0;</code>
<code>escoamento:','Densidade:'];</code>	<code>0 0 0 (%pi*d^2/4)*E/L*S^2];</code>
<code>sig = x_mdialog('Entre com os</code>	<code>u=K\Fext;</code>
<code>valores:',txt,['29*10^3','36','0.284']</code>	<code>ul=T*u;</code>
<code>E = evstr(sig(1))</code>	<code>deltau=ul(3,1)-ul(1,1);</code>
<code>Se = evstr(sig(2))</code>	<code>S1=abs(E*deltau/L);</code>
<code>rho = evstr(sig(3))</code>	<code>//Restrições não lineares de desigualdade</code>
<code>L=sqrt(72^2+96^2); //comprimento da barra</code>	<code>c = [S1-Se;</code>
<code>C=(96-0)/L; //cosseno de teta</code>	<code>S1-(%pi^2*E*(%pi*d^4/64)/(L^2*%pi*d^2/4))]</code>
<code>S=(72-0)/L; //seno de teta</code>	<code>//Restrições não lineares de igualdade</code>
<code>Fext=[0; 0; 0; -73.2/2000]; //vetor força externa</code>	<code>ceq = []</code>
<code>//Processamento</code>	<code>endfunction</code>
<code>T=[C S 0 0; //matriz de transformação</code>	<code>// Solução inicial</code>
<code>-S C 0 0;</code>	<code>x0 = [0.0001];</code>
<code>0 0 C S;</code>	<code>// Diâmetro mínimo admissível para a barra</code>
<code>0 0 -S C];</code>	<code>lb = [0.0001];</code>
<code>//Função objetivo</code>	<code>ub = [];</code>
<code>function f=objfun(d)</code>	<code>// Execução da função fmincon</code>
<code>f=[rho*L*%pi*d^2/4];</code>	<code>[d,fval] = fmincon (objfun , x0,[],[],[],[],lb,ub,confun)</code>
<code>endfunction</code>	<code>//Saída de dados</code>
	<code>disp('Diâmetro mínimo d (pol):',d)</code>
	<code>disp('Valor da função objetivo f(d):',fval)</code>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).



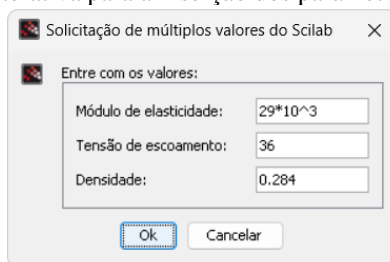
Tabela 4 — Resultados numéricos obtidos para as barras 1 e 2.

Variáveis	Função <i>fmincon</i>	Hibbeler (2004)
$d_1 = d_2$ (pol)	0,5000416	0,5
$f(d)$	6,6927069	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

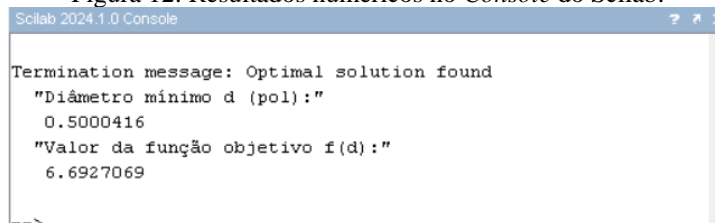
Ao executar o programa constante na Figura 10 pelo ícone “Salvar e executar” na barra de ferramentas do *SciNotes*, abre-se uma janela interativa (Figura 11) para a inserção dos parâmetros do material da barra (módulo de elasticidade, tensão de escoamento e densidade), utilizando o comando *x_mdialog*. Ao clicar em “Ok”, os resultados numéricos são apresentados no Console do Scilab por meio do comando *disp*, que exibe as variáveis diâmetro mínimo d e o valor da função objetivo $f(d)$, conforme a ilustração na Figura 12.

Figura 11 — Janela interativa para a inserção dos parâmetros do material da barra.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 12: Resultados numéricos no *Console* do Scilab.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4 Conclusões

A utilização de ferramentas computacionais gratuitas como auxiliaadoras do processo de ensino-aprendizagem contribui para tornar a disciplina Resistência dos Materiais mais atrativa e dinâmica para o acadêmico. Simulações computacionais proporcionam uma perspectiva prática e aplicada aos conceitos teóricos aprendidos em sala de aula. Em razão disso, este trabalho apresentou o passo a passo da resolução de quatro problemas clássicos inerentes a essa disciplina, cujas soluções ótimas foram obtidas com a função *fmincon* do Scilab. Os códigos computacionais da resolução dos problemas, bem como as funções objetivas e as restrições, foram fornecidos.

De forma resumida, os projetos estruturais na engenharia consistem no dimensionamento dos elementos constituintes de uma estrutura, de forma que esses atendam aos esforços que serão solicitados durante a sua vida útil. Para que seja possível a aplicação da



otimização no projeto estrutural, é mister que os projetistas/calculistas tenham a compreensão da teoria, dos algoritmos e das técnicas empregadas. A aplicação de técnicas de otimização torna-se uma ferramenta interessante, porque as mesmas podem reduzir o tempo de elaboração de um projeto. Além disso, possibilitam uma maior quantidade de análises, garantindo, de certa maneira, que a estrutura concebida esteja o mais próximo possível da solução ótima.

Os problemas de otimização estrutural apresentados neste artigo possuem até três variáveis como incógnitas. No entanto, o procedimento metodológico descrito pode ser empregado na resolução de problemas de otimização mais complexos e com um número maior de variáveis, utilizando, inclusive, o Método dos Elementos Finitos em problemas de pontes treliçadas, de chapas planas com furos e de barras tridimensionais com carga axial, entre outros.

Ressalta-se que o uso de novas tecnologias na aprendizagem não é suficiente por si só, visto que as ferramentas podem ser utilizadas sem que seus diferenciais sejam explorados. O uso do programa Scilab, bem como de outros *softwares* científicos para computação numérica, pode não ter aplicabilidade se os mesmos não forem corretamente utilizados. De fato, as Tecnologias da Informação e Comunicação devem ser adaptadas consoantes aos objetivos a serem alcançados na disciplina.

Os *softwares* proprietários têm se mostrado inacessíveis, notadamente para instituições públicas de ensino. Em geral, as licenças são vendidas por computador, aumentando os custos para utilização desses programas. Assim, os *softwares* livres podem constituir uma solução com potencialidade para amenizar a restrição financeira enfrentada por muitas instituições de ensino superior e abordar questões como pirataria, segurança e custo.

A elaboração de práticas pedagógicas que possibilitam aos alunos desenvolverem sua capacidade de análise, de resolução de problemas e de interpretação dos resultados é de suma importância. Por conseguinte, a inserção de programação e de simulações computacionais pode ser de grande valia na aprendizagem da disciplina de Resistência dos Materiais, uma vez que pode antecipar resultados e ajudar na avaliação da aplicação de diferentes materiais bem como no entendimento das várias etapas de um projeto estrutural.

A função *fmincon* do Scilab é uma poderosa ferramenta para resolver problemas de otimização não linear com restrições. Ela é flexível, permitindo a inclusão de várias formas de restrições (lineares e não lineares) e limites nas variáveis de decisão, o que a torna muito útil em uma vasta gama de aplicações de engenharia.

Como pesquisa futura, pretende-se expandir a aplicação da metodologia proposta, que utiliza o Scilab para a resolução de problemas de Resistência dos Materiais, diretamente em ambientes de ensino. O objetivo é testar e validar a eficiência dessa abordagem em turmas regulares de engenharia, visando analisar os impactos práticos no desempenho acadêmico e na compreensão dos alunos. A expectativa é que os alunos tenham uma experiência de aprendizado mais rica e interativa, visto que poderão experimentar diferentes cenários estruturais de forma mais intuitiva, por meio de simulações computacionais.

Por fim, a pesquisa buscou desenvolver uma análise comparativa entre o método tradicional de ensino, que se baseia em resoluções manuais, e a metodologia que integra o uso de *software*. A aplicação da metodologia proposta em sala de aula pode servir como um ponto de partida para novas pesquisas, que visem explorar o uso de tecnologias educacionais em outras disciplinas da engenharia. A otimização computacional e a melhoria dos programas fornecidos são incentivadas, considerando que os mesmos são destinados principalmente para o uso educacional.

primeira ordem. **Latin American Journal of Development**, v. 4, n. 3, p. 1122-1136, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.46814/lajdv4n3-037>. Acesso em: 10 dez. 2024.

SCILAB, versão 2024.1.0. Dassault Systèmes, 2024.

SILVA, B. K.; KWONG, W. H.; OLIVEIRA CARDOSO, A. Otimização de processos químicos industriais: Avaliação da eficácia do software livre Scilab na resolução de problemas de programação não-linear com restrições. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 9, p. e39110917866-e39110917866, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.33448/rsd-v10i9.17866>. Acesso em: 10 dez. 2024.

STOLPE, M. Truss optimization with discrete design variables: a critical review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53, p. 349-374, 2016. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-015-1333-x>. Acesso em: 10 dez. 2024.

SOUZA JÚNIOR, M. *et al.* Softwares educativos: Recursos alternativos na construção do pensar em sala de aula. **Research, Society and Development**, v. 13, n. 6, p. e4413645898-e4413645898, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.33448/rsd-v13i6.45898>. Acesso em: 10 dez. 2024.

TAPASKAR, R. P. *et al.* Pedagogical Interventions through Software Tools in Postgraduate Engineering Programme. **Journal of Engineering Education Transformations**, v. 31, n. Special Issue, 2018. Disponível em: <https://sciresol.s3.us-east-2.amazonaws.com/srs-j/jeet/pdf/volume999/specialissue/JEET978.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2024.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The finite element method: Its basis and fundamentals**. Elsevier, 2005.

Recebido em agosto de 2024.

Aprovado em novembro de 2024.