



O ESTADO DA ARTE DA SEQUÊNCIA DE PERRIN: UMA ANÁLISE DOS ASPECTOS EVOLUTIVOS

The State of the Art of the Perrin Sequence: An Analysis of Evolutionary Aspects

Renata Passos Machado Vieira¹

Francisco Regis Vieira Alves²

Paula Maria Machado Cruz Catarino³

Resumo: O presente artigo aborda um estado da arte para a sequência numérica recorrente de Perrin. Desse modo, é realizada uma análise dos trabalhos contidos nos últimos cinco anos, oriundos da base de dados do Google Acadêmico, tendo como objetivo da pesquisa um estudo em torno dos aspectos evolutivos da sequência de Perrin. Após a seleção e garimpagem dos trabalhos, são realizadas leituras para a composição do estado da arte desses números. Observa-se a ausência de investigações na área de ensino, permitindo uma contribuição e sugestão para trabalhos futuros. Além disso, a pesquisa permite um entendimento e conhecimento de como a sequência de Perrin está divulgada e estudada nos últimos anos.

Palavras-chave: Ensino. Estado da Arte. Sequência de Perrin.

Abstract: This article discusses a state of the art for Perrin's recurring numerical sequence. In this way, an analysis is carried out of the works contained in the last five years, from the Google Scholar database, with the objective of the research a study around the evolutionary aspects of the Perrin sequence. After the selection and mining of the works, readings are carried out for the composition of the state of the art of these numbers. It is observed the absence of investigations in the teaching area, allowing a contribution and suggestion for future works. In addition, the research allows an understanding and knowledge of how the Perrin sequence is disseminated and studied in recent years.

Keywords: Teaching. State of the Art. Perrin Sequence.

¹ Doutoranda em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo UFC). Professora da Secretaria de Educação do Estado do Ceará - Brasil. Programa de Pós-graduação Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo UFC); Grupo de Pesquisa CNPQ; Bolsista da Funcap. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1966-7097>. E-mail: re.passosm@gmail.com

² Doutorado com ênfase no ensino de Matemática - UFC. Professor titular do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do estado do Ceará - IFCE. Professor e Coordenador do Programa de Pós-graduação Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo IFCE). Membro do grupo de pesquisa do CNPQ. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq - Nível 2. ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3710-1561>. E-mail: fregis@gmx.fr

³ PhD em Matemática. Professora Associada da UTAD (Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro) com habilitação. Investigadora do Centro de Investigação CMAT-UTAD- Polo do CMAT da Universidade do Minho e também Investigadora do Centro de Investigação CIDTFF - Centro de Investigação "Didática e Tecnologia na Formação de Formadores. Atualmente Membro do Conselho Geral da UTAD. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6917-5093>. E-mail: pcatarino23@gmail.com



1 Introdução

De modo generalista, é notório o crescimento de estudos em relação a sequências numéricas recorrentes, elencando a sequência de Perrin, considerada prima dos números de Fibonacci. Assim, percebe-se ainda um interesse cada vez maior, em estudo envolvendo a aplicação de metodologias de ensino ou pesquisa nesses assuntos, muitas vezes oriundos em sua grande maioria, em artigos de matemática pura.

Desse modo, percebe-se estudos recentes no Brasil em relação ao estado da arte, o qual vem se tornando imprescindíveis no que diz respeito à magnitude da produção acadêmica do objeto de estudo. Vale lembrar que o estado da arte consta de uma análise de produções mais relevantes, examinando os temas abordados nas pesquisas, contribuições da pesquisa, inovações e entre outros. Contudo, é possível destacar a evolução da sequência de Perrin nos últimos anos, surgindo trabalhos para o seu estudo (BRANDÃO; BAETA; ROCHA, 1986).

Assim, tem-se o objetivo geral desta pesquisa como sendo: realizar o estado da arte, abordando os aspectos históricos, matemáticos e evolutivos da sequência de Perrin. Tão logo, o trabalho permite um estudo dos números de Perrin, analisando as principais investigações dessa sequência, tornando o leitor atualizado em relação ao objeto matemático deste trabalho.

Visando investigar e analisar a sequência de Perrin, tem-se então a utilização do estado da arte para ressaltar os seus aspectos históricos, matemáticos e evolutivos, discutidos nas seções seguintes, fornecendo um estudo necessário para pesquisadores no âmbito de sequências numéricas recorrentes.

2 O Estado da Arte

O estado da arte consiste numa metodologia de pesquisa, a qual permite a realização de um levantamento bibliográfico referente a determinado objeto de estudo e área específica, consistindo assim numa revisão. Desse modo, essa metodologia possui o viés de determinar teorias construídas, procedimentos de pesquisa utilizados, referenciais teóricos utilizados e entre outros aspectos.

Muller (2018) relata que:

[...] as pesquisas do tipo estado da arte representam também um esforço de ordenação e quantificação de certa produção de conhecimento que permite observar crescimento, ampliação, redução, ausências e entrecruzamentos de dados e sua utilização para produção de outras leituras.

De fato, as pesquisas que envolvem o estado da arte permitem uma contribuição aos leitores e pesquisadores acadêmicos da área investigada, um estudo direcionado no âmbito do objeto de estudo. Assim, é possível que busquem novas pesquisas, contribuindo para o processo de evolução e dando continuidade para as investigações já publicadas. Tão logo, constitui-se um marco histórico de uma determinada área de conhecimento, permitindo verificar o processo evolutivo.

Segundo Messina (1998) “um estado da arte é um mapa que nos permite continuar caminhando; um estado da arte é também uma possibilidade de perceber discursos que em um primeiro exame se apresentam como descontínuos ou contraditórios.”

Romanowski e Ens (2006) enfatizam o significado da pesquisa com essa metodologia:

Estados da arte podem significar uma contribuição importante na constituição do campo teórico de uma área de conhecimento, pois procuram identificar os aportes

significativos da construção da teoria e prática pedagógica, apontar as restrições sobre o campo em que se move a pesquisa, as suas lacunas de disseminação, identificar experiências inovadoras investigadas que apontem alternativas de solução para os problemas da prática e reconhecer as contribuições da pesquisa na constituição de propostas na área focalizada.

Assim, esses estudos refletem uma visão globalizada do que está sendo produzido atualmente na área a qual se está investigando, fornecendo aos interessados no assunto, diagnosticarem a evolução em torno do tema, além de poder identificar previamente, alguns possíveis obstáculos que possam existir.

3 A Sequência de Perrin

Inicialmente, tem-se um estudo histórico da sequência de Perrin, apresentando posteriormente uma discussão envolvendo os trabalhos selecionados para o estado da arte.

A sequência de Perrin, possui o seu nome atribuído ao francês Olivier Raoul Perrin (1841-1910), um engenheiro que nas horas vagas gostava de produzir trabalhos científicos. Ele tinha uma preferência maior e uma inclinação especial para a área da matemática. Muitas de suas memórias, que revelam uma grande profundidade de espírito, foram objetos de comunicações muito apreciadas na Academia de Ciências ou em outras sociedades instruídas, rendendo distinções lisonjeiras.

Em 1876, esta sequência foi mencionada implicitamente por Édouard Lucas, conhecido por criar o jogo matemático torre de Hanói, a sequência de Lucas e os números de Lucas. Lucas, observou que se P é um número primo, então P divide P_{e_p} , sendo uma consequência do Teorema de Fermat (ADAMS; SHANKS, 1982). Porém, em 1899, Perrin definiu a sequência de Perrin, como sendo uma sequência de terceira ordem, e possuindo grande importância, em particular, em teoria dos grafos. Utilizada para descobrir as coordenadas de táxis em redes urbanas de forma confidencial, estes números possuem aplicação na área de computação e em outras diversas áreas (SUGUMARAN; RAJESH, 2017).

Definição 1: A sequência de Perrin (P_n), possui recorrência para $n \in \mathbb{N}$ e $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$, dada por:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3.$$

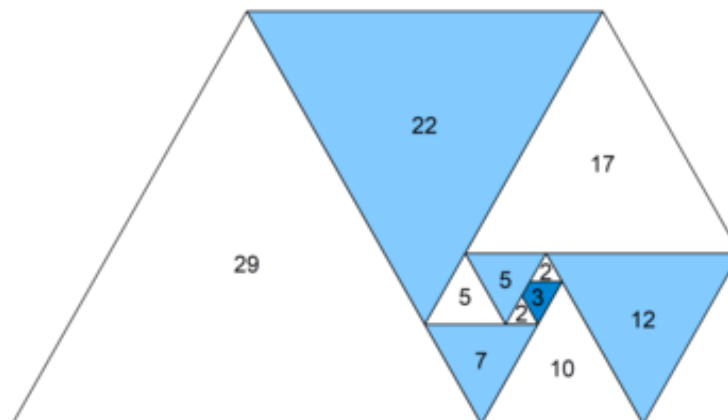
Esta sequência, diferencia-se da sequência de Padovan apenas em relação aos seus termos iniciais, apresentando assim a mesma fórmula de recorrência. Diante da Definição 9, temos que ao realizar algumas manipulações algébricas, obter a equação característica desses números, de forma idêntica a equação característica de Padovan. Assim, as suas raízes são idênticas às raízes dos números de Padovan, possuindo relação com o número plástico (valor aproximado de 1,32).

Uma representação geométrica para esta sequência, é dada através do espiral de Perrin, de modo similar ao espiral de Padovan, possuindo os triângulos equiláteros iniciais de lados 2,3,2 e 5, adiantando a sequência de Perrin. Assim, de acordo com o maior lado do novo polígono formado, será inserido um novo triângulo equilátero com esse novo valor, formando o espiral de Perrin, com os seus respectivos termos da sequência, como mostrado na Figura 1.



Tendo origem no espiral de Padovan (VIEIRA; ALVES, 2019), esta representação da sequência de Perrin, sofre uma pequena modificação nos seus valores iniciais (KNUTH, 2011).

Figura 1 – Espiral de Perrin



Fonte: Knuth (2011).

4 Análise e Discussão

A base de dados utilizada foi a do Google Acadêmico, selecionada pelo fácil acesso e manuseio da ferramenta. Com isso, foi possível obter diversos trabalhos publicados em periódicos internacionais e nacionais envolvendo a sequência de Perrin, totalizando a busca com 82 no período de 2018 até 2022. Durante os anos de 2018 e 2019 não foram encontrados trabalhos envolvendo a sequência de Perrin, assim tem-se o início da breve discussão entre os trabalhos a partir do ano de 2020. Ressalta-se que o espaço temporal foi demarcado nos últimos cinco anos, devido ao fato de buscar pesquisas recentes, das quais abordassem os avanços realizados em torno do objeto matemático investigado.

Mangueira et al. (2020) abordam em seu trabalho o aspecto matemático da sequência de Perrin, investigando a forma matricial desses números para assim obterem a generalização. A forma matricial é uma alternativa de obter os termos de uma sequência recorrente linear sem precisar conhecer os termos anteriores. Assim, ao elevar a matriz da sequência a uma determinada potência, é possível calcular os demais termos. Com isso, os autores retratam a forma matricial de Perrin, tendo como base a forma matricial da sequência de Padovan e, utilizando um vetor de inicialização (carregando os valores iniciais da sequência de Perrin). A partir disso, definiu-se a forma matricial de Perrin dada por:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix}$$

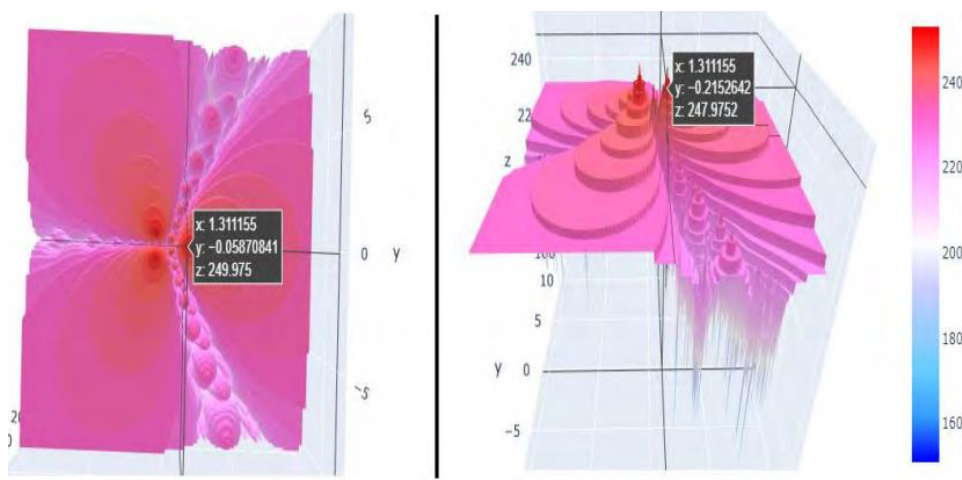
Os autores determinaram outras cinco matrizes de Perrin e, destacam ainda em sua pesquisa que, essa forma matricial é resultado da permutação das linhas e colunas, a partir de uma forma matricial.

Alves, Vieira e Catarino (2020) permitiram uma contribuição das sequências numéricas e recorrentes aplicadas à visualização. Assim, foi estudado o fractal de Newton e integrado ao *Google Colab* para o método de busca das raízes dos polinômios característicos das sequências de um modo geral, bem como para a sequência de Perrin. Os autores realizaram uma



contribuição das seqüências para a área de informática perante a metodologia aplicada. A Figura 2, apresenta a análise da solução real do polinômio característico da seqüência, dado por $x^3 - x - 1 = 0$, as outras duas soluções são possíveis obter com o mesmo método estudado pelos autores, apenas aproximando o mouse por cima do fractal gerado. Percebe-se a existência de duas raízes complexas e conjugadas e, uma raiz real. O eixo de x representa o valor aproximado da solução real (1,32); o eixo de y está bem próximo do valor zero, não existindo parte imaginária; o eixo z representa a proximidade com o valor exato da raiz, em que o valor está próximo da escala de 240 (escala ao lado).

Figura 2 - Fractal de Perrin



Fonte: Alves, Vieira e Catarino (2020).

Tasiurdu e Akpinar (2020) definiram os octônios e sedenios de Perrin, permitindo uma contribuição para o processo de complexificação matemática e evolução desses números. Os octônios e sedenios são números em oito e dezesseis dimensões, respectivamente e, podem ser aplicados em diversas áreas tais como gravidade linear e teoria eletromagnética. Com isso, esses números hipercomplexos apresentam unidades imaginárias em sua definição e, no trabalho dos autores, são integrados ao estudo de seqüências recorrentes. Para $n \in \mathbb{O}$, os octônios de Perrin

são definidos por $OR_n = \sum_{s=0}^7 R_{n+s} e_s$. Para $n \in \mathbb{S}$, os sedenios de Perrin são definidos por:

$SR_n = \sum_{s=0}^{15} R_{n+s} e_s$. Além disso, foi possível estabelecer algumas propriedades e teoremas matemáticos dos octônios e sedenios de Perrin, evoluindo matematicamente com esses números.

Alves et al. (2020) realizaram um estudo para o ensino das seqüências numéricas recorrentes, possuindo uma breve discussão em torno da história da seqüência de Perrin, sua relação com o número de plástico ($\psi = 1,32$) e com o polinômio característico da seqüência de Padovan ($x^3 - x - 1 = 0$). De fato, os autores relatam que a seqüência de Padovan e Perrin possuem o mesmo polinômio característico, observando a existência do número plástico como solução real dessa equação. Desse modo, nota-se a presença de trabalho publicado na área de ensino desses números, resgatando o início do estudo histórico dos números de Perrin.

Rihane, Adegbindin e Togbé (2020) introduziram os números de Fermat de Padovan e Perrin, integrando os números de Fermat com as referidas sequências. Assim, os autores determinaram todos os números de Padovan e Perrin que são números de Fermat e demonstraram que esses números são os únicos, sendo esses: $P_0 = P_3 = 3, P_5 = P_6 = 5$ e $P_{10} = 17$

A demonstração deu-se por meio da equação diofantina $P_n = 2^m + 1$ e foi utilizado o software Maple como recurso para facilitar o cálculo desses termos.

Vieira et al. (2021a) concebem o estudo publicado num periódico internacional, em relação ao processo de complexificação de Perrin, inserindo unidades imaginárias nos elementos da sequência. A partir da inserção da unidade imaginária i , outras foram sendo incluídas até obter a forma generalizada com a inserção da unidade imaginária n . Assim, são estudadas as relações em n dimensões da sequência de Perrin. Os autores definiram as relações bidimensionais, inserindo apenas a unidade imaginária i , obtendo: $Pe(n,m) = Pe(n)Pd(m) + Pe(m + 1)Pd(n)i$, para $n,m \in \mathbb{N}$. As relações tridimensionais, para $n,m,p \in \mathbb{N}$, foram calculadas resultando na fórmula: $Pe(n,m,p) = Pe(n)Pd(m)Pd(p) + Pd(n)Pe(m + 1)Pd(p)i + Pd(n)Pd(m)Pe(p + 1)j$, com a inserção das unidades imaginárias i e j . Por fim, os autores generalizaram as relações com a inserção de n unidades imaginárias, obtendo: $Pe(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) = Pe(n_1)Pd(n_2)Pd(n_3) \dots Pd(n_n) + Pd(n_1)Pe(n_2 + 1)Pd(n_3) \dots Pd(n_n)\mu_1 + \dots + Pd(n_1)Pd(n_2)Pd(n_3) \dots Pe(n_n + 1)\mu_n$, em que μ_n representa a unidade imaginária n .

Vieira et al. (2021b) realizaram um estudo dos polinômios complexos e bivariados de Perrin, contribuindo para a evolução matemática da sequência com teoremas e propriedades matemáticas e definição da sequência polinomial bivariada e complexa de Perrin. Assim, tem-se o polinomial de Perrin dado por: $P_n(x) = x^2 P_{n-2}(x) + P_{n-3}(x)$, com $P_0(x) = 0, P_1(x) = 2, P_2(x) = 3$ e $P_n(1) = P_n$. A partir dessa definição, são estudadas a forma matricial e a fórmula de Binet. Além disso, os autores definiram os polinômios bivariados complexos de Perrin, dado por: $P_n(x, y) = ix^2 P_{n-2}(x, y) + y^2 P_{n-3}(x, y)$, com $P_0(x, y) = 3, P_1(x, y) = 0, P_2(x, y) = 2$ e $i^2 = -1$.

Vieira et al. (2021c) também introduziram as sequências de Padovan e Perrin no processo de complexificação, discutindo algumas identidades dos números híbridos desses números, a partir da definição do número híbrido de Padovan e de Perrin. Com isso, tem-se que os números híbridos de Padovan e Perrin, denominado por PH_n e RH_n , são definidos como: $PH_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}\varepsilon + P_{n+3}h$, $RH_n = R_n + R_{n+1}i + R_{n+2}\varepsilon + R_{n+3}h$, seja $PH_0 = 1 + i + \varepsilon + 2h$ e $PH_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 2h$ e $PH_2 = 1 + 2i + \varepsilon + 3h$ as condições iniciais para os híbridos de Padovan e $RH_0 = 3 + 2\varepsilon + 3h$ e $RH_1 = 2i + 3\varepsilon + 2h$ e $RH_2 = 2 + 3i + 2\varepsilon + 5h$ as condições iniciais para os híbridos de Perrin.

Isbilir e Gurses (2021) generalizaram os quatérnios de Padovan e Perrin, a partir da definição dos quatérnios de Perrin. Ressalta-se que o quatérnio é um número em quatro dimensões e é uma extensão dos números complexos, conforme William Rowan Hamilton (1805-1865). O quatérnio de Perrin é definido, com $n \in \mathbb{N}, i^2 = j^2 = k^2 = -1$, pela equação: $QR_n = R_n + iR_{n+1} + jR_{n+2} + kR_{n+3}$. Assim, foram obtidas relações matriciais dos quatérnios de

Padovan e Perrin, bem como a fórmula variante de Binet, função geradora e outras propriedades matemáticas.

Kafle, Rihane e Togbe (2021) determinaram os números de Mersenne que estão presentes nas sequências de Padovan e Perrin. Desse modo, os autores concluíram que os únicos números de Mersenne pertencentes à sequência de Perrin são $M_0 = 0, M_2 = 3$ e $M_3 = 7$, em que M_n representa o número de Mersenne. A demonstração desses termos foi realizada por meio da equação diofantina, dada por: $P_n = 2^m - 1$.

Jafari et al. (2021) abordam aspectos matemáticos em torno das sequências híbridas de Padovan e Perrin, potencializando uma complexificação entre essas duas sequências híbridas com o auxílio do *software* Maple. Assim, a partir da definição do números híbrido de Perrin, dada por: $R_n^{(H)} = R_n + R_{n+1}i + R_{n+2}\varepsilon + R_{n+3}h$, com $a, b, c \in \square$ e i, ε, h são os operadores em que $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$. Os autores obtêm a fórmula de Binet, função geradora, forma matricial e demais propriedades em torno dos números híbridos de Perrin e Padovan, bem como a sua extensão para o campo dos números inteiros. Por fim, é possível obter esses termos híbridos das sequências com o código para utilizar no *software* Maple, fornecido pelos autores na pesquisa.

Rihane e Togbé (2021) permitiram uma interseção entre os números de Perrin, Padovan, Pell e Pell-Lucas, por meio de propriedades matemáticas. Assim, a partir dessas propriedades e características matemáticas das sequências trabalhadas, foi possível calcular os termos em comum dessas, obtendo os números de Padovan que são números de Pell; números de Padovan que são números de Pell-Lucas; números de Perrin que são números de Pell; números de Perrin que são números de Pell-Lucas. Para os números de Perrin que são números Pell, foi possível obter as únicas soluções da equação diofantina $E_n = P_m$, em inteiros positivos m e n são $(n, m) \in \{(0, 1), (2, 2), (4, 2), (5, 3), (6, 3), (9, 4), (8, 3), (12, 5)\}$. Portanto, isso implica que $E \cap P = \{0, 2, 5, 12, 29\}$, em que E_n representa o termo da sequência de Perrin e P_m o termo da sequência de Pell. Os números de Perrin que são números Pell-Lucas, foi possível obter as únicas soluções da equação diofantina $E_n = Q_m$, em inteiros positivos m e n são $(n, m) \in \{(2, 0), (2, 1), (4, 0), (4, 1)\}$. Portanto, isso implica que $E \cap Q = \{2\}$, em que E_n representa o termo da sequência de Perrin e Q_m o termo da sequência de Pell-Lucas.

Em um estudo recente, Açikel e Irmak (2022) analisaram matematicamente os termos comuns presentes entre a sequência de Tribonacci e Perrin. Pelo fato da sequência de Perrin ser de terceira ordem, buscou-se obter esses termos comuns com base na extensão da sequência de Fibonacci de ordem 3 (Tribonacci). Assim, são discutidas diversas relações matemáticas existentes entre esses números, contribuindo para a evolução matemática desses números. Tão logo, as soluções excedem 1 da equação $T_n = R_m$, em que T_n é o n-ésimo termo da sequência de Tribonacci e R_m o n-ésimo termo da sequência de Perrin, são $T_3 = R_2 = R_4 = 2$ e $T_5 = R_7 = 7$.

Batte, Chalegwa e Ddamulira (2022) determinaram os números de Perrin que são concatenados de dois repdigits. Com isso, foi utilizada a teoria de Baker para formas lineares não nulas em logaritmos de números algébricos e o procedimento de redução, envolvendo a teoria das frações contínuas, para determinar explicitamente todos os números de Perrin que

são concatenações de dois números distintos de dígitos repetidos, esse procedimento foi

possível por meio de uma equação diofantina $P_n = d_1 \left(\frac{10^l - 1}{9} \right) x 10^m + d_2 \left(\frac{10^m - 1}{9} \right)$. Os únicos números Perrin que são concatenações de dois repdigits distintos são $P_n \in \{10, 12, 17, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 277, 644\}$.

Rihane, Kafle e Togbé (2022) buscaram uma forma de obter os números de Padovan e Perrin por meio de uma forma $x^a \pm x^b + 1$, generalizada em função da variável x. Primeiramente foi obtido o limite superior para a, b e n em função de x. Além disso, todos os números de Padovan e Perrin foram determinados nesse formato. Os autores ainda determinaram todas as soluções da equação diofantina, com base na recorrência de Perrin, que satisfazem a fórmula $n \leq 3,35x10^{30} (\log x)^4$.

Alves e Catarino (2022) abordam as pesquisas desenvolvidas para o ensino de sequências numéricas recorrentes no ensino de História da Matemática. Desse modo, tem-se uma breve discussão da sequência de Perrin, possibilitando uma abordagem para o estudo desses números em História da Matemática diante de seu aspecto histórico e representação geométrica. Os autores enfatizam os criadores das sequências e relatam uma breve discussão das contribuições desses matemáticos.

Com base nas leituras, pôde-se constatar a presença de variados trabalhos abordando a evolução matemática da sequência de Perrin, sendo alguns integrados com outras sequências numéricas recorrentes. Pode-se perceber a carência de trabalhos envolvendo o ensino da sequência de Perrin, bem como a sua aplicação e integração com outras áreas, a exemplo a área de informática. Um dos autores discutidos acima, permitiu uma integração com a área de informática, potencializando a visualização da sequência.

5 Considerações Finais

O presente estudo permitiu realizar um levantamento dos últimos trabalhos publicados referente à sequência de Perrin, conhecido como o estado da arte. Assim, foram abordados aspectos históricos, matemáticos e evolutivos desses números, potencializando o estudo de sequências numéricas recorrentes. Com isso, os trabalhos discutidos nesta pesquisa destacam a importância para a construção deste estado da arte, uma vez que se constatou o desenvolvimento de investigações acadêmicas perante o objeto matemático em estudo.

Pode-se observar a demanda de tempo para a realização das leituras dos trabalhos que contribuem para o estado da arte, bem como a natureza dos detalhes e quantidade de informações e pesquisas. Assim, foi delimitado o tempo de busca, restringindo o período de 2018 até 2022. De fato, observam-se poucos trabalhos voltados para a área de ensino da sequência de Perrin, apresentando a grande maioria voltado para a área de Matemática Pura.

Por fim, ressalta-se que pesquisas com esse viés, tornam possíveis a identificação de obstáculos que venham a ser encontrados, uma vez que são fornecidos os recursos em torno do referido conteúdo matemático, os números de Perrin.



Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

Referências

AÇIKEL, A.; IRMAK, N. Common terms of Tribonacci and Perrin sequences, **Miskolc Mathematical Notes**, v. 23, n. 1, p. 5-11, 2022.

ADAMS, B.; SHANKS, D. Mathematics of Computation, **American Mathematical Society**, v. 39, n. 159, 1982.

ALVES, F. R. V., et al. Teaching Recurrent Sequences in Brazil Using Historical Facts and Graphical Illustrations, **Acta Didactica Napocensia**, v. 13, n. 1, p. 87-104, 2020.

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C. Visualizing the Newtons Fractal from the Recurring Linear Sequence with Google Colab: An Example of Brazil X Portugal Research, **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, 2020.

ALVES, R. V.; CATARINO, P. M. M. C. BRASIL X PORTUGAL: pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da história da matemática sobre sequências numéricas recorrentes, **Revista De História Da Educação Matemática**, v. 8, p. 1-23, 2022.

BRANDÃO, Z.; BAETA, A. M. B.; ROCHA, A. D. C. **Evasão e repetência no Brasil: a escola em questão**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Dois Pontos, 1986.

BATTE, H. CHALEBGWA, T; DDAMULIRA, M. Perrin numbers that are concatenations of two repdigits, **Arabian Journal of Mathematics**, 2022.

ISBILIR, Z.; GURSES, N. Padovan and Perrin generalized quaternions, **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, 2021.

JAFARI, S. H. et al. A combined approach to Perrin and Padovan hybrid sequences, **Heliyon**, v. 7, p. 1-5, 2021.

KAFLE, B.; RIHANE, S. E.; TOGBE, A. A note on Mersenne Padovan and Perrin numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 27, n. 1, p. 161-170, 2021.

KNUTH, D. E. **The Art of Computer Programming**, Volume 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1. [S.l.]: Addison-Wesley, 2011.

MANGUEIRA, M. C. dos S., et al. A Generalização da forma matricial da sequência de Perrin, **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, n. 1, p. 384-392, 2020.

