

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA SISTEMAS LINEARES 2X2: UM ESTUDO DE CASO ENVOLVENDO O USO DA TECNOLOGIA DIGITAL COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Germano Mateus Zugno Machado*

Michelsch João da Silva**

Rodrigo Sychocki da Silva***

Resumo: A proposta do presente artigo é apresentar e discutir os resultados de uma pesquisa de trabalho de conclusão de curso realizada em 2014. Através de uma revisão bibliográfica inicial, verificou-se que a forma na qual tradicionalmente se apresenta o conteúdo de Sistemas Lineares 2x2 prioriza o tratamento algébrico, e o estudo da interpretação gráfica da solução acaba por ser insatisfatório ou inexistente. Este trabalho fundamenta-se na teoria de representações semióticas de Raymond Duval, uma vez que nossa hipótese é a de que a mudança no tratamento dos registros internos de representação contribui e catalisa o processo de aprendizagem. Na tentativa de verificar essa hipótese, propõe-se uma sequência de atividades organizada em dois momentos: um momento inicial, em que não se faz uso de recursos tecnológicos, e um segundo momento em que se faz. Buscou-se com o uso do *software* GeoGebra tornar o processo dinâmico e interativo, facilitando a construção do conhecimento pelo próprio estudante. Os dados analisados, obtidos a partir do material produzido pelos estudantes, revelam que o recurso tecnológico utilizado no decorrer das atividades produz um efeito positivo na construção e aprendizagem dos conceitos matemáticos discutidos na abordagem envolvendo Sistemas Lineares 2x2.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Tecnologia. Representações Semióticas. Registros de Representação.

1 Introdução

Ferreira (2013) disserta que a abordagem disponível nos livros didáticos sobre o conteúdo de Sistemas Lineares 2x2, geralmente, é apresentada sob a perspectiva predominantemente algébrica. A partir dessa percepção, nota-se que o tratamento algébrico torna-se o foco principal na abordagem e o estudo e a interpretação geométrica acabam por ser insatisfatórios ou inexistentes. Com base neste cenário, foi elaborado o problema de pesquisa a ser investigado e apresentado neste texto, aplicando-se um teste inicial em uma

* Licenciado em Matemática (IFRS). Professor de Matemática no Estado do Rio Grande do Sul. E-mail: prof.mat.germano@gmail.com.

** Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Caxias do Sul. E-mail: michelsch.silva@caxias.ifrs.edu.br.

*** Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS). Doutorando em Informática na Educação (UFRGS). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Caxias do Sul. E-mail: rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br.

amostra de doze estudantes, concluintes do Ensino Médio, para verificar se existia alguma dificuldade na identificação da solução de Sistemas Lineares 2×2 por meio de uma visualização geométrica. A justificativa para escolher estudantes concluintes do Ensino Médio ocorreu, pois se verificou que a abordagem sobre Sistemas Lineares 2×2 era prevista em anos anteriores a esse, já no Ensino Fundamental, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

Observando alguns resultados da atividade inicial aplicada com os alunos, na qual cada sistema foi apresentado através de sua representação gráfica e algébrica, a hipótese central, desta presente pesquisa, é a de que a ausência de conhecimento teórico sobre o tema, ou a não efetiva análise e interpretação gráfica, influencia na produção das argumentações por parte dos estudantes, entre elas, a fala de que alguns sistemas quase paralelos¹ não têm solução. As dificuldades apresentadas pelos estudantes e a construção de um cenário de investigação a partir da aplicação da atividade inicial culminaram na seguinte questão de pesquisa: os estudantes concluintes do Ensino Médio conseguiriam identificar, a partir da mudança de tratamentos semióticos e com o uso da tecnologia, se os Sistemas Lineares 2×2 apresentados são possíveis e determinados ou impossíveis por meio da análise e interpretação geométrica?

Como tentativa de responder a essa questão de pesquisa, construiu-se e aplicou-se uma sequência de atividades que serviu para o levantamento de dados pertinentes à pesquisa. Os dados também serviram para observar a evolução dos estudantes na visualização, compreensão e significação da existência de soluções para Sistemas Lineares 2×2 . Durante a aplicação da segunda atividade, fez-se a inserção dos recursos tecnológicos com o objetivo de tornar dinâmica a investigação dos estudantes.

À luz da Teoria das Representações de Registros Semióticos, proposta por Duval (2003), em especial, a utilização das transformações no tratamento dos registros semióticos, analisou-se o progresso dos estudantes durante a realização das atividades. Ressalta-se que a compreensão na mudança de tratamento de um objeto matemático, ancorada no uso de tecnologias, determina possibilidades para a aprendizagem de conteúdos da matemática. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 108):

[...] o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.

¹ Expressão utilizada para denotar um par de retas aparentemente paralelas.



Com o surgimento das novas tecnologias ocorrendo de forma cada vez mais acelerada, a elaboração de novas alternativas para o ensino pelos profissionais da educação matemática constitui um processo educativo inovador, como propõe Barbosa (2005, p. 75):

Caberia, então, aos professores-educadores da área de educação matemática proporcionar contextos favoráveis para que o processo educativo tomasse outra dimensão, uma dimensão atual, mais inovadora, compatível com os avanços da ciência e da tecnologia.

A organização deste artigo ocorre da seguinte forma: inicialmente, apresentam-se algumas noções sobre a teoria das Representações Semióticas, segundo Duval (2003), fornecendo os subsídios necessários para analisar as atividades propostas. Após, faz-se uma apresentação sobre a inserção das tecnologias digitais no ensino de Sistemas Lineares através de uma revisão bibliográfica, destacando demais pesquisas e contribuições de outros pesquisadores. Posteriormente, apresentam-se os procedimentos metodológicos e métodos envolvendo a aplicação das atividades e a coleta de dados da pesquisa. Em sequência, destina-se a penúltima parte do artigo para interpretação e análise de construções produzidas pelos estudantes no decorrer das atividades, e, ao final, tecem-se conclusões e reflexões sobre a pesquisa produzida.

Ao final da pesquisa, foram disponibilizadas as atividades² construídas e utilizadas na presente investigação na forma de objeto virtual³, permitindo que demais professores e interessados no assunto possam conhecer, adequar e aplicar essas atividades em aula, oportunizando também um momento de reflexão sobre o exercício da docência na disciplina de matemática.

2 Fundamentos teóricos: sobre Representações Semióticas

Duval (2009, p. 16) afirma que “a formação do pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e suas relações”. Então, há a necessidade de usar símbolos (signos) para representar os objetos matemáticos uma vez que são ideias e conceitos abstratos. No que se refere ao ensino dos conceitos matemáticos, o sistema empregado ou a maneira utilizada para representar o objeto em estudo

² As atividades completas na forma de formulário podem ser acessadas em:
https://dl.dropboxusercontent.com/u/60260993/atividades_sistemas_2x2.pdf.

³ Os objetos virtuais utilizados na presente pesquisa podem ser acessados em:
https://dl.dropboxusercontent.com/u/60260993/objetos_virtuais_sistemas_lineares_2x2.rar.

não deve ser ambíguo, para que a representação ou símbolo utilizado para representar os objetos não estimulem o desenvolvimento de ideias e conceitos erroneamente. Os processos a que o estudante relaciona os diversos registros de representações são foco da teoria de Duval (2009), pois seu estudo apresenta contribuições e reflexões sobre o papel dos Registros de Representação na aprendizagem da matemática.

Para Santaella (2002), a definição do termo semiótica nos conduz à análise terminológica da palavra, derivada do grego *semíon* cujo significado é “signo”, *sêmea*, que também significa “signo” ou “sinal”. Santaella (2002) afirma que além de nos comunicarmos através da fala e da escrita, existe uma pluralidade de linguagens que são exploradas. Portanto, para Santaella (2002, p.13), a semiótica é a “[...] ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significado e sentido”.

Nesse sentido, destaca-se que as aplicações das representações semióticas ultrapassam a sua utilização na comunicação. Duval (2009) expõe que as representações semióticas apenas não sejam indispensáveis para fins de comunicação, sendo necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática, pois se trata diretamente do funcionamento cognitivo, implicando efetivamente no exercício da matemática e em problemas que se referem à aprendizagem.

A teoria das Representações Semióticas de Duval propõe que a interpretação do objeto matemático não é em si o objeto nem o signo que o representa, mas é possível que através do signo nos seja permitido acessar o objeto. Segundo Colombo *et al.* (2008, p. 45):

[...] nenhum dos registros de representação “é” o objeto matemático, mas eles apenas o “representam”, estão “no lugar dele” para, assim, permitir o acesso a esses objetos matemáticos. Assim, 5; 20/4; cinco; 10.0,5 são representações diferentes que se referem a um mesmo objeto matemático.

Ao encontro deste pensamento, Duval (2003) reforça que se deve utilizar mais de uma representação para tratar um único objeto matemático, sejam elas a linguagem natural e das imagens, sistemas de escrita para os números, notações simbólicas para os objetos, escrita algébrica, escrita lógica, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, entre outras. A utilização de diversas representações faz-se necessária ao observar que Duval (2008) propõe a existência de um paradoxo: o paradoxo cognitivo. O mesmo foi anunciado por Duval (2008, p.21) da seguinte maneira: “Como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?”. A resposta para este paradoxo, segundo o



próprio Duval(2008), está relacionada ao fato de que, no estudo da matemática, deve-se utilizar pelo menos dois registros de representações diferentes para o mesmo objeto, não confundindo o objeto com sua respectiva representação.

Apesar do exercício da matemática estar direcionado para a utilização simultânea de dois ou mais registros de representações, ou na possibilidade de fazer uma alternância entre eles, a todo o momento, quando se percebe a limitação do mesmo, Duval (2003, p.14) contribui:

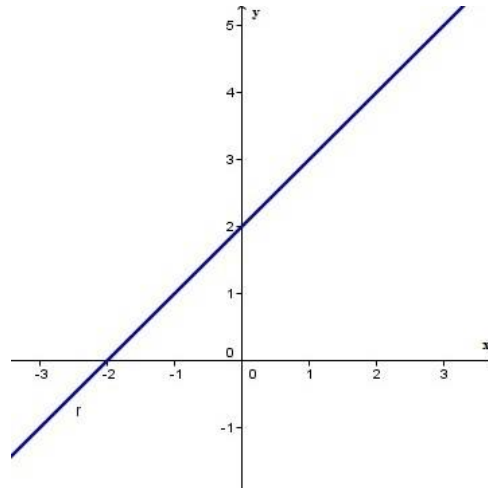
[...] as atividades cognitivas envolvidas no ensino e na aprendizagem da matemática, quais sejam, a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas, requerem regras de codificação próprias. Cada registro apresenta certas limitações representativas específicas, surgindo daí a necessidade da utilização de outros sistemas de expressão e de representação.

Partindo-se da ideia de pluralidade em sistemas de registros de representações semióticas possibilitando uma conceitualização dos objetos matemáticos, Duval (2003) estabelece dois tipos de funções cognitivas que possibilitam a construção dos conceitos: as mudanças de tratamento (referentes às mudanças internas do registro) e as conversões. Entende-se por mudanças de tratamento de uma representação semiótica as transformações internas, ou seja, as operações dentro de um mesmo registro. Um exemplo de mudança de tratamento é evidenciado pelas transformações da equação de reta $r: 2y - 2x = 4 \Leftrightarrow r: 2y = 4 + 2x \Leftrightarrow r: y = 2 + x$, em que foram aplicadas operações sobre o mesmo registro de representação semiótica do objeto reta r .

As conversões são consideradas as passagens de um registro a outro, ou seja, as operações que transformam um registro inicial em outro. Quanto às conversões, Duval (2009, p.58) expõe que:

Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. [...] A conversão é então uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida.

Um exemplo de conversão é a transformação do registro de representação da reta $r: y = 2 + x$ para um sistema gráfico conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Representação cartesiana da reta $r: y = 2 + x$ 

Fonte: Os autores.

Estabelecida a diferenciação entre as duas formas de transformações, tratamentos e conversões, considera-se que ambas são importantes no processo de aprendizagem de um conceito matemático. Porém, no presente trabalho de pesquisa, está-se interessado na utilização das mudanças de tratamento referentes à mudança de registro interno pelos sujeitos ao longo da realização das atividades. Portanto, a utilização das mudanças de tratamento e conversões entre as representações semióticas de um objeto matemático abstrato são, de acordo com a teoria de Duval (2003, 2008, 2009), os mecanismos que o sujeito dispõe para aproximar-se da compreensão do objeto matemático.

3 Escritos sobre o uso da tecnologia digital e aprendizagem matemática

O uso de tecnologias digitais no ensino, em especial no ensino da matemática, torna-se um método válido em que a diversidade de *softwares* educacionais possibilita uma ressignificação de alguns conceitos matemáticos. Aguirre (2014, p.7) defende que o uso da tecnologia digital possa contribuir significativamente no processo de aprendizagem da matemática. Nesse sentido, a autora expõe:

[...] defende-se uso de softwares educacionais para o ensino e para a aprendizagem da Matemática, pois estimulam o raciocínio, despertam a atenção para a construção de conhecimentos, além de ser um recurso de visualização dos conceitos matemáticos.



Segundo Silva (2013), a inserção e uso de tecnologias no ensino da matemática contribuem oportunizando ao aluno participar do próprio processo de aprendizagem. Nesta pesquisa, utilizam-se essas ferramentas pelo fato de elas proporcionarem dinamismo e interatividade contribuindo no processo de aprendizagem.

Ferreira (2013) indica a importância da utilização das tecnologias digitais através de *softwares* como o GeoGebra no ensino de Sistemas Lineares, pois os livros didáticos analisados pela autora, geralmente, apresentam métodos puramente algébricos deixando de lado a interpretação geométrica deste objeto matemático. A autora afirma ainda que a inserção e a utilização das tecnologias para o ensino de Sistemas Lineares podem tornar esse conteúdo aplicável para os estudantes. Nesse sentido, Dullius *et al.* (2006, p. 8) convergem com o pensamento de Ferreira (2013):

A informática pode trazer ao processo de aprendizagem uma dimensão bastante interessante enquanto possibilidade de ir muito além da linearidade tão comum no ensino tradicional, onde o professor programa as atividades de ensino com começo, meio e fim, e avalia o aluno quantitativamente pelo seu desempenho nesse processo.

Procurou-se, com o uso do *software* GeoGebra, estimular os estudantes a estabelecer relações e construir reflexões sobre a existência de soluções de Sistemas Lineares 2×2 , a partir da exploração do registro de representação geométrica do objeto matemático. Por meio do uso da tecnologia digital e das ferramentas ofertadas por ela, o estudante pôde visualizar a existência de interseção entre as retas e atribuir a esses pontos uma justificativa da existência ou não de solução para o sistema. Como expõe Ferreira (2013, p.58), em se tratando de Sistemas Lineares 2×2 , pode-se, através do uso do *software* GeoGebra, construir a interseção das duas retas e essa será a solução para o sistema. Hummes e Breda (2013, p. 7589) reforçam que:

[...] a partir da representação gráfica das equações no Geogebra, [...] a solução de um sistema de Equações de ordem 2 corresponde aos pontos de interseção [...] entre as duas retas do sistema. Assim, os alunos verificam, a partir das relações estabelecidas entre a solução geométrica e a solução algébrica, que estes sistemas não apresentam solução, possuem uma única solução ou possuem infinitas soluções.

Aguirre (2014) afirma que o uso das tecnologias informatizadas, mais especificamente, o uso do *software* GeoGebra, é apropriado para a aplicação de atividades envolvendo Sistemas Lineares 2×2 . Aguirre (2014) e Ferreira (2013) inferem que este *software* possibilita abordar com mais de uma representação do mesmo objeto matemático em que, através da forma algébrica e gráfica, possibilita-se a troca de informações e a exploração

entre as diferentes representações. Segundo Duval (2010), essa forma de trabalho possibilita ao estudante construir o seu próprio pensamento matemático, tornando-se possível compreender o significado das operações e promover o desenvolvimento do seu próprio conhecimento.

O objetivo inicial de Aguirre (2014) foi fazer uma abordagem envolvendo a representação algébrica dos sistemas lineares, na qual a autora constatou que as manifestações geométricas contribuem para a compreensão dos problemas propostos. Nesse sentido, esta pesquisa se apresenta como uma nova abordagem do estudo feito iniciado por Aguirre (2014), em que se priorizara a mudança de tratamento nas representações gráficas dos Sistemas Lineares 2×2 .

Sob este olhar, voltado para a representação geométrica dos sistemas lineares, caminha-se ao encontro das ideias de Hummes e Breda (2013), em que as autoras afirmam que os métodos de obtenção das possíveis soluções dos Sistemas Lineares apresentados aos alunos na forma algébrica e mecânica tornam a resolução técnica e procedimental, a qual não é totalmente compreendida pelos estudantes, pois, em suas concepções, a solução é apenas um par de números, sem atribuir significado a esses. Jordão (2011) e Carneiro (1997) *apud* Hummes e Breda (2013) defendem que, ao apresentar e propor discussões envolvendo a resolução geométrica de Sistemas Lineares 2×2 , através de uma sequência de atividades, utilizando *softwares* de geometria dinâmica, pode-se contribuir na visualização, compreensão e significação na resolução de Sistemas Lineares.

Por fim, as pesquisas consultadas mostram que a utilização de recursos digitais é um fator que potencializa a abordagem desse assunto, estimulando o aluno a produzir e construir o seu próprio conhecimento matemático, através das relações estabelecidas entre as mudanças de tratamentos no registro geométrico, tais como descrito por Duval (2009). Logo, tal como os autores consultados confirmam, acredita-se que a existência ou não de solução para os Sistemas Lineares 2×2 , abordada de uma forma dinâmica e interativa, proporcionada pelo *software* GeoGebra, possa contribuir na construção e compreensão matemática sobre o assunto.

4 Procedimentos metodológicos e métodos utilizados

O estudo de caso, segundo Yin (2001), é um dos ramos da pesquisa qualitativa que vem ganhando espaço e influenciando as averiguações em diversas áreas do conhecimento, inclusive no campo de pesquisas em Educação Matemática. Ela se debruça deliberadamente

sobre os aspectos relevantes para a pesquisa, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico, ou seja, busca conhecer os motivos aos quais conduziu o fenômeno para produzir determinado comportamento, onde o “como” e o “porquê” dos casos investigados tornam-se de extrema importância.

Caracterizamos a metodologia de pesquisa utilizada no presente trabalho como um estudo de caso, pois se debruça sobre uma situação específica, conhecendo e tentando explorar sobre os avanços apresentados pelos alunos em identificar soluções de Sistemas Lineares 2×2 por meio de uma interpretação geométrica, em que se faz necessária a mudança no tratamento sobre o objeto matemático em estudo.

Em linhas gerais, a pesquisa buscou compreender como a tecnologia informática, mais especificamente, o *software* GeoGebra⁴, pode contribuir com o estudo sobre a existência ou não de soluções em Sistemas Lineares 2×2 , e assim possibilitar aos sujeitos envolvidos que seu conhecimento sobre esse assunto seja construído através de relações estabelecidas entre as diferentes formas de tratamento atribuídas ao objeto matemático. Por fim, ressalta-se que a escolha por utilizar tal *software* se fez pela possibilidade de dinamismo e interatividade que se acredita ser possível com o seu uso.

Com o objetivo de aplicar as atividades elaboradas, foi escolhida uma turma de estudantes do quarto ano do Ensino Médio. A turma era constituída por doze estudantes matriculados no curso técnico integrado ao Ensino Médio, de uma escola técnica federal da serra gaúcha, no ano de 2014. Foram realizados dois encontros no laboratório de informática, onde foram aplicadas as atividades. Os dados coletados foram somente das produções de oito estudantes, uma vez que os demais não compareceram nas datas marcadas.

Definido qual o tipo de pesquisa caracterizava o presente estudo, chegava-se o momento de especificar as fases da mesma, assim como os métodos e processos. Sobre as fases da pesquisa, Gil (2010, p. 15) apresenta que “[...] a pesquisa desenvolve-se ao longo de um processo que envolve inúmeras fases, desde a adequada formulação do problema até a satisfatória apresentação dos resultados”.

Buscou-se então desenvolver uma atividade inicial, com o objetivo de evidenciar e destacar nosso problema de pesquisa. Criou-se uma sequência de seis problemas sobre Sistemas Lineares 2×2 , sobre a qual o aluno determinaria, com base na visualização gráfica estática, se os Sistemas Lineares apresentados teriam solução ou não, justificando a sua

⁴ Geogebra (versão 4.4) é um *software* de matemática gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Disponível em: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/.

resposta. Essas questões, que constituíram um primeiro conjunto de dados, foram elaboradas utilizando o software GeoGebra, porém, o uso desta tecnologia ocorreu somente na criação das atividades, sendo que as mesmas foram disponibilizadas para os estudantes na forma impressa.

Na sequência do trabalho, desenvolveram-se as demais atividades, conforme ilustrado na Figura 2. Essas, por sua vez, foram elaboradas de forma que a tecnologia fosse utilizada durante a sua execução. As ferramentas dispostas nos objetos virtuais possibilitaram dinamismo e interatividade com os objetos, possibilitando ao estudante construir o próprio entendimento sobre a existência ou não de solução para Sistemas Lineares 2x2.

Figura 2 – Exemplo de objeto virtual e atividade utilizados com os estudantes.

ATIVIDADE

Ícones possíveis de utilizar

	Reinicia a visualização a partir do seu ponto de partida.
	Movimenta a janela de visualização.
	Aproxima a janela de visualização.
	Afasta a janela de visualização.
	Desfaz (seta amarela) ou refaz (seta verde) um ou mais procedimentos na janela de visualização.

Atividades

1. Acesse o arquivo "Atividade_1.html". Nele você visualizará duas retas. Através das ferramentas disponíveis na janela desta atividade descreva se existe ou não algum ponto de interseção entre as duas retas. O que você pode afirmar sobre a solução do sistema linear de equações do 1º grau relacionado com essa representação geométrica? (Dica: tente utilizar as ferramentas e para verificar a existência ou não desse ponto de interseção.)

OBJETO VIRTUAL

Atividade 1

15 Setembro 2014, criado com o [GeoGebra](#)

Fonte: Os autores.

Na segunda etapa da pesquisa, foram construídos cinco objetos virtuais, no *software* GeoGebra, a partir dos mesmos sistemas lineares utilizados inicialmente, sendo que, desta vez, utilizando as ferramentas do objeto, o estudante poderia efetuar translações (1), aproximações (2) ou afastamentos (3) das representações gráficas dos sistemas lineares apresentados, contribuindo para a criação de relações sobre a existência ou não de solução em cada uma das situações estudadas. A Figura 2 ilustra um dos objetos virtuais utilizados pelos estudantes na segunda etapa de atividades, como também qual atividade relacionada com esse objeto foi entregue impressa. Vale ressaltar novamente que os estudantes não haviam sido comunicados da relação entre o grupo de atividades iniciais e o segundo grupo de atividades envolvendo o uso de recursos tecnológicos.

5 Resultados obtidos

Nesta seção, é construída uma análise da produção dos estudantes à luz do referencial teórico apresentado no presente texto. Espera-se mostrar que a aplicação das atividades produziu avanços qualitativos no que diz respeito à aprendizagem de conceitos matemáticos pelos estudantes, em que o uso da tecnologia foi importante durante o processo. Comparando as respostas obtidas, foi possível estabelecer relações e observar que os alunos apresentaram maior facilidade em interpretar se tais sistemas lineares possuíam ou não solução através do uso das ferramentas disponibilizadas no objeto virtual, criado no *software* GeoGebra.

Como foram coletados os materiais produzidos pelos oito estudantes ao longo do experimento, com o objetivo de não tornar extenso o presente texto, será apresentada, a partir de agora, a produção de quatro estudantes escolhidos aleatoriamente, aqui nomeados de A, B, C e D. Com isso, procura-se construir uma reflexão que contribua no entendimento de como os sujeitos compreendem a existência ou não de solução para os Sistemas Lineares 2×2 . Nas figuras a seguir, a indicação [S.G.] significa a primeira atividade realizada sem o uso do *software* GeoGebra. Apenas na Figura 3 é apresentado o enunciado da atividade realizada sem o GeoGebra [S.G.], uma vez que para as demais atividades o enunciado é o mesmo. A indicação [C.G.] significa a segunda atividade aplicada, essa realizada pelos estudantes no laboratório de informática com o uso dos objetos virtuais.

Verifica-se, na Figura 3, que na primeira atividade [S.G.], o aluno A afirma não existir solução para o sistema proposto, justificando que as duas retas seriam aparentemente horizontais. Porém, ao participar da segunda atividade [C.G.], o mesmo estudante pôde concluir, através de sua ação sobre o objeto virtual, que o mesmo sistema possui solução já

que as duas retas se encontram em um determinado ponto. Nota-se que, com a ação do estudante sobre o objeto virtual, foi possibilitado que, através das mudanças no registro de representação, por meio do uso das ferramentas zoom e translado, o estudante elaborasse o seu próprio conhecimento sobre o assunto.

Figura 3 – Atividades produzidas pelo estudante A.

INSTITUTO FEDERAL RIO GRANDE DO SUL
Exercícios Sistemas Lineares de Equações de 1º grau

Com base na visualização gráfica dos sistemas representados abaixo, determine sua solução (se existir), justificando com uma breve explicação sua resposta.

[S.G.]

$$\begin{cases} y = 4 \\ -x + 9y = -26 \end{cases}$$

Resposta: Não existe solução, porque $n=4$ e não $y=4$ (retas estão na horizontal).

[C.G.]

Acesse o arquivo "Atividade_5.html". Com a sua interpretação já produzida nas atividades 2 e 3 anteriormente, argumente se o sistema linear representado nessa janela de visualização possui ou não solução. Explique.

Posseui solução pois as duas retas se encontram em um ponto.

Fonte: Arquivo pessoal.

Na primeira atividade [S.G.], o aluno B ressalta que o sistema linear possui resposta, mas não recordava como poderia encontrá-la, como se observa na Figura 4, configurando uma aprendizagem, possivelmente, não efetiva sobre o conteúdo. Com a realização da segunda atividade [C.G.], em que o próprio aluno pode observar a interseção entre as retas e ainda concluir as coordenadas desse ponto em comum entre as duas retas, nada se pode inferir sobre a solução, visto que o aluno não a menciona. Valida-se a utilização das tecnologias, para efetuar as mudanças de tratamento no registro gráfico de representação semiótico do Sistema Linear, possibilitando, a partir do uso do objeto virtual, potencializar a capacidade do próprio estudante de buscar e construir o seu próprio conhecimento. Mesmo que, segundo a proposta da pesquisa, a produção desse aluno não mostre um acréscimo no que se refere à existência ou

não de solução Sistemas Lineares, apresentam-se essas criações do aluno B, mostrando outras perspectivas que esta pesquisa poderia assumir.

Figura 4 – Atividades produzidas pelo estudante B.

[S.G.]

Resposta: Possui resposta, mas não me lembro como posso achá-la.

[C.G.]

Acesse o arquivo "Atividade_3.html". O que você pode afirmar sobre a solução do sistema linear de 1º grau relacionado a essa representação geométrica? Explique.

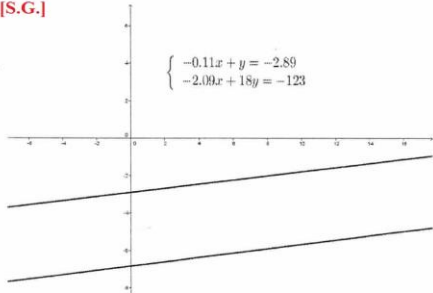
Existe interseção das retas no ponto $x=0$ $y=4$.

Fonte: Arquivo pessoal.

Na primeira atividade [S.G.], o estudante C afirmou que o sistema linear não possuía solução, não sabendo explicar os motivos de sua resposta. Talvez, pela simples observação das retas que aparentam ser paralelas. Entretanto, na segunda atividade [C.G.], o estudante conclui que o Sistema Linear possui solução, pois existe um ponto de interseção entre as duas retas que compõem o Sistema Linear. A partir das operações no registro de representação gráfico do presente sistema, o aluno pôde elaborar seu próprio conhecimento e justificá-lo de alguma forma. A Figura 5 ilustra as características mencionadas anteriormente.




Figura 5 – Atividades produzidas pelo estudante C.

[S.G.]


$$\begin{cases} -0,11x + y = -2,89 \\ -2,09x + 18y = -123 \end{cases}$$

Resposta: não é possível a solução.
não sei porque.

[C.G.]

Acesse o arquivo "Atividade_2.html". Nele você visualizará duas retas. Utilizando as ferramentas disponíveis explique, se existe ou não, a solução do sistema linear que possui essa representação geométrica. (Dica: Caso você não conseguiu elaborar uma resposta para essa questão, retorne a atividade à visualização inicial utilizando  e através da combinação das ferramentas  e  verifique se o sistema linear relacionado a essa atividade possui ou não solução.)

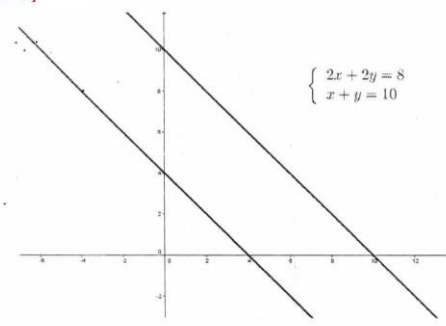
Existe interseção entre as retas. Este sistema tem solução, pois as retas se interceptam em um determinado ponto.

Fonte: Arquivo pessoal.

Observou-se, num primeiro momento [S.G.], que o estudante D vinculou-se às manipulações do registro de representação semiótico algébrico do sistema linear, tentando obter ou não a solução desse sistema, efetuando as devidas mudanças de tratamento sobre esse registro, chegando à conclusão de não existir solução. No entanto, ao analisar a produção algébrica, esse estudante não soube justificar com clareza o motivo da não existência de solução desse sistema linear, dizendo que elimina o eixo x e y . Já com a aplicação da segunda atividade [C.G.], quando poderia manipular, por meio das ferramentas do objeto virtual, o registro de representação geométrico do presente sistema linear, houve a possibilidade de o estudante validar a hipótese inicial, conforme apresentado na Figura 6. Apesar de o objeto não oportunizar ao estudante demonstrar matematicamente que não há solução, ao manipular e experimentar o objeto virtual, o aluno pode inferir empiricamente sobre a não existência de pontos em comum nas retas.

Figura 6 – Atividades produzidas pelo estudante D.

[S.G.]




$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Resposta:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x + y = 10 \cdot (-2) \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x + 2y = 8 \\ -2x - 2y = -20 \end{matrix} \quad = -12$$

Não tem solução pois elimina o eixo x e y;

[C.G.]

Accesse o arquivo "Atividade_1.html". Nele você visualizará duas retas. Através das ferramentas disponíveis na janela desta atividade descreva se existe ou não algum ponto de interseção entre as duas retas. O que você pode afirmar sobre a solução do sistema linear de equações do 1º grau relacionado com essa representação geométrica? (Dica: tente utilizar as ferramentas  e  para verificar a existência ou não desse ponto de interseção.)

NÃO POSSUI PONTO DE INTERSEÇÃO, POIS NÃO POSSUI PONTO EM COMUM.

Fonte: Arquivo pessoal.

Resta, agora, refletir sobre como a mudança nos registros internos pelos estudantes foi influenciada pelo uso da tecnologia e manifestada nos resultados obtidos com a aplicação das atividades. No início da proposta, ao realizar a primeira etapa de atividades sem fazer o uso da tecnologia, percebeu-se que os estudantes ficaram muitas vezes insistindo na tentativa de construir uma resposta utilizando o método algébrico tradicional. Sendo que poucos deles demonstraram a possibilidade de analisar geometricamente as situações propostas. Encaram-se os resultados da primeira atividade como satisfatórios, pois se verificou que muito pouco ou quase nada ocorreu sobre a manifestação da mudança de tratamento nos registros de representação semiótico no esboço de alguma solução para os problemas apresentados.

Também é importante destacar que houve respostas corretas construídas pelo método algébrico tradicional. Notou-se que em nenhuma delas os estudantes investigados fizeram relações com a situação geométrica apresentada. Para esses, o método algébrico reproduzido de algum modo fornece alguma resposta para o problema, porém, não é de fácil percepção se para estes estudantes a resposta construída tem relação com a interpretação geométrica do problema apresentado. Trata-se, portanto, dentro da teoria proposta por Duval, da situação de conversão entre diferentes formas de representação, sendo que este não foi o foco desta

pesquisa, pois tratou-se exclusivamente da mudança de tratamento e sua evolução na verificação de existência da solução para Sistemas Lineares 2×2 .

Por outro lado, ao fazer uso da tecnologia digital, percebe-se a evolução dos estudantes, uma vez que as respostas apresentadas por eles na segunda etapa de atividades demonstram que o uso das ferramentas disponíveis no objeto virtual auxiliou na construção de um método de raciocínio e argumentação, através da combinação de movimentos das representações gráficas na tela do computador. A mudança do tratamento, em especial para o tratamento gráfico, possibilitou que, ao mesmo tempo em que os recursos de movimento foram explorados na tela do computador, de forma progressiva, a possibilidade de existência da solução para o Sistema Linear proposto fosse construída com base na percepção e construção de argumentos. A validade dos argumentos é verificada na manifestação do conhecimento dos estudantes ao afirmar frases como: “Existe interseção entre as retas. Este sistema tem solução, pois as retas se interceptam em um determinado ponto” (estudante C).

Constatou-se, na presente pesquisa, que o uso da tecnologia foi importante, pois por meio dela foi possível que os estudantes fizessem relações, reconstruíssem significados e argumentassem de modo a produzir conhecimento matemático. No caso desta investigação, notou-se que o papel do uso da tecnologia potencializou o desenvolvimento de habilidades matemáticas necessárias para a compreensão das situações apresentadas. De fato, acredita-se que as soluções criadas pelos estudantes a partir do uso dos objetos virtuais foram possíveis pela combinação dos fatores: 1) uso das diferentes ferramentas disponíveis nos objetos virtuais; 2) desenvolvimento de habilidades matemáticas, resultado da criação e manutenção das relações estabelecidas através da mudança no tratamento interno dos registros dos objetos matemáticos em estudo.

Um dos questionamentos feitos no final da proposta foi sobre a possível relevância deste trabalho para os estudantes, ou seja, buscava-se explorar o que eles pensavam sobre as possíveis contribuições da proposta para a sua própria aprendizagem. As respostas informadas para essa questão convergem no sentido de que a proposta qualificou e produziu novas relações e significados para os estudantes, uma vez que eles reconheceram, no potencial tecnológico, a possibilidade de estabelecer novas relações e significados para os conceitos matemáticos investigados.

Percebeu-se que a dinâmica proporcionada pelas atividades com o uso do *software* GeoGebra fez com que os estudantes reconhecessem a limitação de cálculos realizados apenas no papel. Observando as respostas dos estudantes nessa questão, acredita-se que o grupo de

atividades tenha proporcionado aos estudantes um ambiente favorável para identificar, a partir da mudança de tratamentos e com o uso da tecnologia, se os Sistemas Lineares 2x2 têm ou não solução. A Figura 7 apresenta o recorte da resposta de dois estudantes.

Figura 7 – Exemplos de relatos dos estudantes sobre a proposta de atividades.

Quais são suas considerações sobre as atividades aqui propostas explorando a representação geométrica e fazendo uso da tecnologia? Elas tiveram alguma importância (ou não) na compreensão das atividades feitas inicialmente apenas com lápis e papel? Justifique.

A atividade é muito importante pois avalia nesse contexto matematico, mesmo sem termos a disciplina em nosso currículo neste ano. Os gráficos ajudaram bastante, pois tivemos uma noção de que estava no papel

Quais são suas considerações sobre as atividades aqui propostas explorando a representação geométrica e fazendo uso da tecnologia? Elas tiveram alguma importância (ou não) na compreensão das atividades feitas inicialmente apenas com lápis e papel? Justifique.

COM O USO DA TECNOLOGIA VISUAL É MUITO MAIS FÁCIL PARA IDENTIFICAR OS PONTOS DE INTERSEÇÃO (SOLUÇÃO), O APOIO TECNOLÓGICO FACILITOU DEMASIADAMENTE O APRENDIZADO, POIS APENAS COM OS CÁLCULOS NÃO CONSEGUI CHEGAR A UMA SOLUÇÃO.

Fonte: Arquivo pessoal.

6 Conclusões

Considera-se que este trabalho de pesquisa apresentou uma proposta que complemente o ensino de Sistemas Lineares por meio de atividades com enfoque na mudança de tratamento do registro de representação semiótico do objeto matemático. Inspirados nos estudos produzidos por Ferreira (2013), a partir da análise dos livros didáticos e da construção de um cenário de investigação, elaborou-se a questão de pesquisa apresentada na introdução desse artigo. Trilhou-se um caminho em busca de uma resposta para os questionamentos propostos, no qual a elaboração e aplicação de um grupo de atividades, que consistia de atividades



fundamentadas no referencial teórico e apoiadas no dinamismo e interatividade, proporcionados pelo uso de recursos tecnológicos, poderiam proporcionar a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Com a análise dos dados obtidos durante o trabalho realizado, pode-se concluir que a proposta apresentada contribuiu na evolução e no processo de aprendizagem dos sujeitos. Manifestou-se numa possível evolução no que se refere à construção de inferências sobre a existência ou não de solução em Sistemas Lineares 2×2 , utilizando as mudanças de tratamento do registro de representação gráfico do objeto matemático.

Com este trabalho, foi possível concluir que a utilização dos registros de representação gráfica para os sistemas lineares pode oportunizar ao aluno construir a própria significação do conteúdo e inferir sobre a existência ou não de solução para os sistemas lineares apresentados. O uso da teoria de Registros de Representações Semióticas, descrita por Duval (2010), contribuiu no processo de construção e significação do conhecimento, permeando todo o processo de criação das atividades, aplicação das mesmas, assim como a análise dos dados pertinentes para a pesquisa.

Concluiu-se também que a inserção dos recursos tecnológicos como ferramenta colaboradora para a execução desta pesquisa é fundamental, tanto na criação e na aplicação das atividades. Percebeu-se também que os estudantes participam ativamente do processo de construção, estimulando o raciocínio, despertando afeição com o conteúdo e estabelecendo possíveis conexões com os conceitos matemáticos. Ainda com a pesquisa, pode-se repensar a prática utilizada para o ensino de Sistemas Lineares no Ensino Médio, sendo que este estudo pode permear a discussão do conteúdo, alternando-se a prática entre os registros algébricos e geométricos deste objeto matemático, enriquecendo consideravelmente as discussões envolvendo o ensino e a aprendizagem desse assunto.

Finalmente, ressalta-se que esta pesquisa não abrange todo o conteúdo de Sistemas Lineares, mas apresenta um recorte com enfoque na existência de solução de Sistemas Lineares 2×2 por meio da visualização gráfica, por meio das conversões e mudanças no tratamento desse objeto matemático. Espera-se que esta proposta inspire a criação de outras pesquisas sobre o assunto, no intuito de contribuir significativamente com o ensino de Sistemas Lineares no Ensino Médio.

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR LINEAR SYSTEMS 2X2: A CASE STUDY INVOLVING THE USE OF DIGITAL TECHNOLOGY WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

Abstract: The purpose of this paper is to present and discuss the results of an end course work survey, conducted in 2014. Through an initial literature review, it was found that the form in which content has traditionally been Linear Algebraic Systems 2x2 prioritizes the treatment and study of graphical interpretation of the solution turns out to be unsatisfactory or nonexistent. This work is based on the theory of semiotic representations of Raymond Duval, since our hypothesis is that the change in the treatment of representation registers contributes and catalyzes the learning process. In an attempt to verify our hypothesis, we propose a sequence of activities organized in two phases: in a first moment does not make use of technological resources and the second time yes. We attempted to use the software GeoGebra make the dynamic and interactive process, facilitating the construction of knowledge by the student himself. The analyzed data obtained from the material produced by the students reveal that technological resource used in the course of activities has a positive effect in building and learning of mathematical concepts discussed in approach involving Linear Systems 2x2.

Keywords: Linear Systems. Technology. Semiotics representations. Representation records.

Referências

AGUIRRE, J. M. Estudo de sistemas lineares com auxílio do GeoGebra: uma prática com professores. **Anais do IV EIEMAT**, Santa Maria – RS, 2014. Disponível em <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/RE/RE_AGUIRRE_Juliana_Machado.pdf>. Acesso em 03 nov. de 2014.

BARBOSA, R. M. **Ambientes Virtuais de Aprendizagem**. Porto Alegre, RS. Artmed, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução**. Brasília, 1997. v.1.

CARNEIRO, P. S. **Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil. 2007.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em educação matemática: pontuando tendências. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 29, p. 41-72, jan./jun. 2008. Disponível em <<http://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2397>>. Acesso em 07 de maio de 2014.

DULLIUS, M. M.; EIDELWEIN, G. M.; FICK, G. M.; HAETINGER, C.; QUARTIERI, M. T. A. **Recursos Computacionais nas aulas de Matemática**. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia, 2006.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2010.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

_____. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I)**. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FERREIRA, A. E. G. **A importância dos sistemas lineares no ensino médio e a contribuição para a matemática e suas aplicações**. Dissertação de mestrado: Biblioteca Digital de Teses e Dissertações UEPG, Ponta Grossa, PR.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

HUMMES, V. B.; BREDÁ, A. A representação geométrica das soluções de sistemas de equações lineares através do *software* GeoGebra: um estudo de caso com alunos do nono ano do ensino fundamental. **Anais, VI CIBEM**, Uruguai. Disponível em: www.cibem.org/extensos/436_1371952648_hummes_breda.doc. Acesso em 03 de novembro de 2014.

JORDÃO, A. L. I. **Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP. 2014.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2002.

SILVA, M. J. Contribuições do uso de representações semióticas no ensino de sistemas de equações no ensino fundamental. **Anais, XVII EBRAPEM**, Vitória – ES, 2013. Disponível em: http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebrapem/xvii_ebrapem/paper/view/422. Acesso em 03 de novembro de 2014.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Tradução Daniel Grassi. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.