

ENGENHARIA DIDÁTICA E PROJETOS DE MODELAGEM GEOMÉTRICA: POTENCIAL PARA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS NO ENSINO FUNDAMENTAL À LUZ DAS IDEIAS DE GOLDENBERG

Melissa Meier*

Rodrigo Sychocki da Silva**

Resumo: A proposta desse artigo é apresentar e discutir os resultados de uma pesquisa a nível de mestrado envolvendo o uso das tecnologias para o ensino de matemática. Analisam-se a manifestação e o desenvolvimento dos hábitos de pensamento matemático em estudantes do ensino fundamental envolvidos no trabalho com modelagem geométrica. Busca-se nas ideias de Goldenberg a fundamentação teórica necessária para analisar e avaliar a evolução dos sujeitos envolvidos durante a sequência de atividades propostas. A construção de um projeto de investigação envolvendo os aspectos teóricos propostos pela engenharia didática foi essencial para a interpretação e a análise dos resultados posteriores à realização da sequência de atividades. Com a proposta, procura-se mostrar que a inserção da tecnologia nas aulas de matemática tornou-se fundamental para a construção do conhecimento matemático pelos alunos. Ao final da pesquisa, assumindo-se a forma de um produto, disponibiliza-se na internet o ambiente virtual construído e utilizado ao longo das atividades propostas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Engenharia Didática. Hábitos de Pensamento Matemático. Sequência Didática. Tecnologia.

1 Introdução

Nota-se que, para uma parcela dos alunos na escola, a aprendizagem matemática é apenas momentânea e mecânica. Por outro lado, em contrapartida a essa constatação, percebemos que no ensino da geometria tem-se um contexto muito propício para o envolvimento dos alunos, pois durante o processo de aprendizagem eles precisam visualizar figuras, analisar relações entre seus elementos, identificar regularidades, fazer conjecturas sobre as propriedades identificadas, caracterizando ações que envolvem o pensamento matemático. Nesse sentido, quando utilizamos *softwares* de geometria dinâmica, podemos potencializar o envolvimento dos alunos nas aulas, conforme apontam Armella & Kaput (2008) e Basso & Gravina (2011).

* Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS). Doutoranda em Informática na Educação (UFRGS). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense (IFC), campus Camboriú. Email: melissa@ifc-camboriu.edu.br

** Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS). Doutorando em Informática na Educação (UFRGS). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), campus Caxias do Sul. E-mail: rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br

Fundamenta-se metodologicamente a presente proposta no uso da Engenharia Didática de M. Artigue, segundo a qual todos os procedimentos envolvidos desde concepção, elaboração, aplicação e análise das atividades desenvolvidas seguem os princípios dessa concepção metodológica. A escolha da Engenharia Didática como princípio metodológico parte da hipótese de que por meio dessa metodologia seja possível que o professor envolvido repense e reconstrua a sua prática enquanto docente da disciplina de matemática.

Através da elaboração de hipóteses que deveriam ser justificadas ao longo da proposta, chegou-se à seguinte questão de pesquisa: “Com a modelagem geométrica, é possível desenvolver hábitos de pensamento matemático no ensino fundamental?” Buscou-se inspiração nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PNC) e nos conceitos de Goldenberg (1998a, 1998b) que propõe que o desenvolvimento dos hábitos de pensamento é atividade essencial dos sujeitos durante a construção de conceitos matemáticos.

A proposta desse texto é apresentar os resultados de uma pesquisa realizada através de criação, planejamento e aplicação de uma sequência de atividades com estudantes do ensino fundamental, em que o uso da tecnologia foi essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático. Procura-se mostrar no texto que a utilização da Engenharia Didática como proposta metodológica no trabalho de pesquisa proporcionou uma análise qualitativa significativa das produções dos estudantes, destacando-se também o momento de reflexão docente durante a execução das atividades pelos estudantes. Quer-se mostrar nesse texto que foi possível por meio do uso da tecnologia proporcionar aos estudantes envolvidos a construção de diversos conceitos matemáticos, através da investigação e do estudo envolvendo aspectos da geometria dinâmica.

2 Engenharia Didática: caracterização teórica

O termo *Engenharia Didática* emerge no cenário científico no início da década de 1980 e possui grande importância na investigação de situações onde o professor de matemática constitui-se um sujeito reflexivo e consciente de sua prática docente. Segundo SILVA et al (2014b):

Acreditamos que a engenharia didática possibilita ao professor repensar a sua prática docente enquanto atua em sala de aula e também nota-se que a realidade escolar torna-se cenário para reflexão, criação e encaminhamento de propostas inovadoras de ensino. Ao trabalhar utilizando esse método de ensino o professor pode se questionar se é possível que os alunos aprendam determinando conteúdo através de uma sequência de atividades que pode ser repensada e readequada durante a execução da proposta. (SILVA et al, 2014b, p. 5).

Uma metodologia de trabalho fundamentada através dos princípios da engenharia didática foi apresentada inicialmente por Michèle Artigue — a autora destaca dois aspectos essenciais:

1 – A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. [...]

2 – A metodologia de engenharia didática caracteriza-se ainda, relativamente a outros tipos de investigação baseados nas experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão associados. (ARTIGUE, 1996, p.196).

Sobre a importância que a metodologia de investigação proposta pela engenharia didática desempenha para o professor durante o seu trabalho, Artigue (1996, p.197) expõe que “não é, pois, nos objetivos das investigações levadas a cabo sob o seu estandarte, mas nas características do seu funcionamento metodológico, que a engenharia didática apresenta a sua singularidade”. Ou seja, o professor ao investigar o processo de aprendizagem por parte de seus alunos, possui através dessa metodologia de trabalho, a oportunidade de avaliar e refletir sobre a sua própria atuação e participação como colaborador na criação e no desenvolvimento do conhecimento.

Uma proposta metodológica de trabalho fundamentada nos princípios da engenharia didática atravessa um processo constituído de determinados níveis. A cada nível alcançado, o objeto do conhecimento investigado atinge determinado patamar e os objetivos e propósitos do professor são repensados e reavaliados. Artigue (1996) propõe que a engenharia didática durante o seu desenvolvimento atravessa diferentes níveis, formas e graus de complexidade. A passagem de um nível para o seguinte constitui uma importante fonte de informações e conhecimento para o professor. Os níveis, ou fases, propostos por Artigue como forma de organização da engenharia didática são: análises prévias (nível 1); concepção do experimento, análise a priori e elaboração das hipóteses (nível 2); experimentação (nível 3) e análise a posteriori juntamente à validação e à avaliação da proposta (nível 4).

Um olhar mais detalhado sobre a primeira fase da engenharia didática possibilita refletir sobre a forma como a estrutura do trabalho a ser desenvolvido pelo professor futuramente deva ocorrer. Ou seja, o primeiro nível da engenharia didática possui enorme relevância para a compreensão e a reflexão sobre os reais motivos que estão levando o professor a desenvolver essa metodologia de trabalho. Nas palavras de Artigue (1996):

A primeira fase está estruturada à volta da análise do funcionamento do ensino habitual, considerado como o estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema,

um equilíbrio que, durante muito tempo, foi estável, mas cuja obsolescência começa a fazer-se sentir. O extracto seguinte põe claramente em evidência as escolhas efectuadas a este nível e a forma como estas escolhas estão ligadas à perspectiva sistémica que constitui o fundamento teórico da análise. A investigação aqui documentada situa-se numa perspectiva de engenharia didáctica clássica: considera-se um ponto do sistema didáctico, cujo funcionamento parece, por razões que podem ser de natureza diversa, pouco satisfatório. Analisa-se esse ponto do funcionamento e os constrangimentos que tendem a fazer dele um ponto de equilíbrio do sistema e depois, jogando com estes constrangimentos, procura-se determinar as condições de existência de um ponto de funcionamento mais satisfatório. (ARTIGUE, 1996, p.199).

Na citação anterior, percebe-se uma tentativa de refletir sobre quais aspectos geram por parte do professor uma reflexão sobre a construção de determinado conhecimento pelos alunos. Percebe-se que uma análise sobre o funcionamento do processo didático desencadeia por parte do professor reflexões sobre algumas questões envolvendo o desenvolvimento de determinado conhecimento pelos sujeitos envolvidos. Ou seja, na busca por motivos ou razões que expressam a necessidade de compreender a complexa organização e estruturação de determinado conhecimento, o professor organiza os principais pontos que buscam analisar e refletir sobre quais aspectos do sistema didático vigente devem passar por uma transformação, ou seja, ao promover a organização do primeiro nível é possível avançar para o nível seguinte da engenharia didáctica, caracterizado pela concepção do experimento, análise *a priori* e elaboração de hipóteses.

No nível consecutivo ao primeiro, o professor busca organizar sua ação sobre um determinado número de variáveis, consideradas por ele como pertinentes para o estudo. Portanto, pode-se conceber a análise *a priori* como:

[...] uma *análise do controlo do sentido*; muito esquematicamente, se a teoria construtivista coloca o princípio do compromisso do aluno na construção dos seus conhecimentos por intermédio de interações com determinado meio, a teoria das situações didáticas, que serve de referência à metodologia da engenharia, teve, desde a sua origem, a ambição de se constituir como uma teoria do controlo das relações entre sentidos e situações. (ARTIGUE, 1996, p. 204).

Ou seja, como objetivo da análise *a priori*, pode-se afirmar que há a necessidade de fundamentar de que forma as escolhas efetuadas podem contribuir no comportamento e nos sentidos estabelecidos pelos alunos durante sua ação sobre os objetos. Tal fundamentação será baseada na construção de hipóteses estabelecidas inicialmente pelo professor e que serão analisadas e posteriormente validadas nas fases seguintes da engenharia didáctica.

Sobre a etapa da análise *a priori*, pode-se dizer que a construção de hipóteses e conjecturas por parte do professor consiste em uma árdua tarefa, envolvendo aspectos que vão além do planeamento didático. Ao prever como será o desenvolvimento e o comportamento

dos sujeitos diante do objeto de conhecimento, o professor deposita expectativas e formulações sobre como o sujeito talvez aja em relação ao objeto.

O terceiro nível da engenharia didática, caracterizado pela experimentação, consiste na aplicação das atividades construídas com base nas hipóteses e nas análises *a priori* já produzidas. Nesse momento, além da experimentação, todos os sujeitos envolvidos passam por um momento de reflexão e reconstrução. Pela observação empírica, o professor pode conferir se o planejamento prévio e a sua organização das tarefas está conduzindo os estudantes pelas atividades, ou seja, se há mobilização dos estudantes na construção da compreensão do objeto que se está investigando.

Os estudantes, por outro lado, podem manifestar-se por meio da sua ação sobre o objeto de estudo, mobilizando seus diferentes esquemas e estruturas na tentativa de acessar o conhecimento proposto. A ação que deriva e ocorre ao longo do experimento, na terceira fase da engenharia didática, constitui uma importante ferramenta para análise e interpretação por parte do professor, pois é substancial a contribuição sobre a análise decorrente da produção dos estudantes no momento de validar a proposta metodológica de trabalho.

Durante o processo de investigação, é de suma importância conectar através de relações os níveis três e quatro da engenharia didática. A quarta fase, ou nível quatro, consiste em realizar as análises *a posteriori* juntamente à validação (ou à refutação) das hipóteses elaboradas na segunda fase da metodologia de trabalho. Sobre isso, Artigue (1996) aponta que:

a análise *a posteriori*, que se apoia no conjunto dos dados recolhidos aquando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela. Estes dados são frequentemente completados por dados obtidos através da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final. E, como já indicámos, é no confronto das duas análises, a priori e a posteriori, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação. (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Portanto, a quarta fase da engenharia didática corresponde a uma análise complexa por parte do professor, partindo desde as concepções iniciais de sua proposta metodológica envolvendo até o confronto com a validação ou não da metodologia. Ainda no quarto nível da engenharia didática é possível considerar relações que possam ser estabelecidas com o nível inicial da proposta de trabalho. Isso constituiu um momento importante durante a investigação, pois o professor pode, através da validação, interpretar e reavaliar suas concepções elaboradas nas análises prévias. Instaura-se assim um movimento cíclico na proposta de trabalho em que a validação do experimento e o confronto com as hipóteses pode

contribuir significativamente para uma análise sobre as concepções e definições estabelecidas nas análises prévias. Ou ainda, nas palavras de Silva et al (2014a):

Observamos que a engenharia didática constitui uma metodologia cíclica, ou seja, o professor pode durante a execução do seu roteiro de atividades (fase 3) se deparar com novas dificuldades apresentadas pelos alunos e que não foram detectadas anteriormente (fase 1). Neste momento o professor pode redefinir também a sua concepção do experimento e criar hipóteses adicionais, ou ainda refutar alguma das hipóteses anteriores. Assim, uma readequação da proposta metodológica visa a contribuir na construção e aprendizagem dos conceitos de matemática pelos alunos. (SILVA, 2014a, p. 6).

3 Hábitos de pensamento: contribuições da teoria de Goldenberg

Freudenthal (1973) afirma que:

A geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender matematizar com a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. (FREUDENTHAL, 1973, p.407).

Com isso, destacamos que os alunos precisam vivenciar situações de aprendizagem que envolvem exploração e investigação em sala de aula. Nesse sentido, as tecnologias, segundo Borrões (1998), se apresentam como recursos que podem ajudar; o autor afirma que o computador, por meio de suas potencialidades em nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos, é um instrumento poderoso de que atualmente dispõem os professores para proporcionar experiências aos seus alunos.

Jorge Filho (2006) e Goulart (2009) afirmam que o uso do computador tem um grande potencial para provocar o interesse e a motivação dos alunos. Nesse caso, um aluno motivado se compromete mais com as atividades que acontecem em sala de aula e isso tem reflexos na sua aprendizagem. Entretanto, é importante compreender o papel do professor nas práticas de ensino que agregam a tecnologia em sua metodologia de trabalho. Nesse caso, o professor tem a tarefa de definir e acompanhar as atividades a serem realizadas pelos alunos. Sobre isso, já nos primeiros anos de uso do computador em sala de aula, D'Ambrosio (1988) dizia:

[...] o uso do computador como meio institucional não torna dispensável o professor, antes, pode liberá-lo de algumas tarefas e reservar um espaço maior para o contato interativo entre ele e o aluno, necessário a um ensino que valorize a aprendizagem da descoberta. O computador não é o fim em si mesmo, mas um meio, um recurso instrumental a mais, cuja eficácia dependerá da capacidade daqueles que o utilizam. (D'AMBROSIO, 1988, p. 88).

Nesse sentido, a tecnologia transforma a aula em um momento de construção de conceitos, no qual professores e alunos trabalham juntos. Porém, isso não significa dizer que a tecnologia é o elemento principal desse processo. Com relação a isso, Moran (2003) afirma que se ensinar dependesse apenas da tecnologia, já teríamos encontrado as melhores soluções há muito tempo. O autor defende que as tecnologias são importantes, mas não resolvem a questão a fundo. Ensinar e aprender são desafios que enfrentamos e encontramos em todas as épocas.

Desse modo, ao optarmos pela utilização do computador nas aulas de matemática, torna-se necessário compreender que, ao fazer a escolha de um *software* para a aplicação de uma atividade matemática, precisamos ter o cuidado de verificar se os recursos disponíveis possibilitam experiências que possam permitir a construção do conhecimento.

Segundo Basso & Gravina (2011, p.14), os diferentes tipos de *software* devem:

- a) ser instrumento para externar, consolidar e comunicar o saber matemático;
- b) ser instrumento que dá suporte aos pensamentos, mais especificamente aos processos cognitivos que produzem conhecimento matemático.

É importante destacar que, para o ensino da matemática, muitos são os *softwares* que atendem essas duas funções. Os programas de geometria dinâmica são ferramentas que permitem a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem. Como indica Gravina et al (2011a), esses tipos de *software* possuem um interessante recurso de estabilidade sob ação de movimento.

A interface interativa dos diversos *software* de geometria dinâmica propicia a criação de situações que potencializam o desenvolvimento do pensamento matemático. A manipulação direta de objetos na tela do computador, com análise imediata da construção, concorre para esse desenvolvimento.

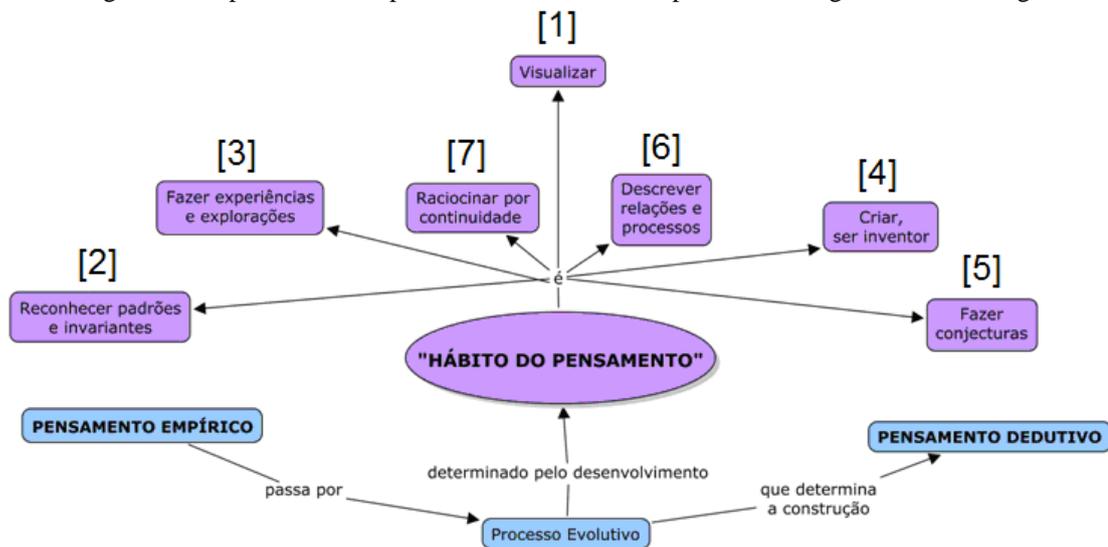
Nas palavras de Gravina et al (1998), referentes aos ambientes de geometria dinâmica, notam-se as possibilidades desses ambientes quanto ao desenvolvimento dos hábitos de pensamento:

Inicialmente, as construções dos alunos são desenhos do tipo “a mão livre”, reproduções de formas conhecidas, como quadrados e retângulos – predomina aí a percepção. Ao movimentarem o desenho, os alunos constatarem que a forma colapsa e deixam de apresentar a impressão visual desejada. Os recursos de “estabilidade sob ação de movimento” desafia os alunos a construir formas sob controle geométrico, isto é, submetidas a propriedades geométricas por eles escolhidas. Na tela do computador, os objetos vão se concretizando sob gradativo controle, na espiral *ação/formulação/validação*. (GRAVINA et al, 1998, p.88).

Nesse contexto, Paul Goldenberg apresenta uma proposta de organização do currículo da matemática centrada nos “hábitos do pensamento”, que se inserem como estratégias e

modos de pensar que contribuem para o desenvolvimento do pensamento, ou seja, podem influenciar o surgimento e o desenvolvimento de habilidades fundamentais para a matemática tais como: experimentar, testar, descobrir, raciocinar, generalizar e argumentar. Goldenberg (1998a) define “hábitos do pensamento” como modos de pensar que adquirimos e tornamos naturais ao os incorporarmos completamente ao nosso repertório e que se transformam em hábitos mentais. A Figura 1 apresenta um esquema organizando os hábitos de pensamento segundo Goldenberg.

Figura 1 - Mapa conceitual apresentando os hábitos de pensamento segundo Goldenberg



Fonte: Os autores.

O autor defende uma proposta de ensino fundamentado no desenvolvimento de hábitos mentais que possibilite ao aluno a criação de uma estrutura que pode ser aplicada em suas interações com o mundo. Nesse contexto, um currículo de matemática pode ser considerado coerente quando tem um "enredo", em outras palavras, a matemática não é o conteúdo, mas o raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a esses conteúdos; a matemática é, em parte, um modo de pensar, um conjunto de hábitos de pensamento (GOLDENBERG, 1998a).

Sobre a visualização, Goldenberg (1998b) afirma que essa capacidade não é natural e como toda a destreza exige aprendizagem e deve ser sistematicamente construída e exercitada para que seja adquirida. Sobre a busca de invariantes, outro autor que também aborda essa habilidade é Lage (2008):

[...] a procura de padrões e de invariantes atua como um conector entre conteúdos e ideias matemáticas, de maneira que os alunos possam descobrir relações, estabelecer leis, fazer generalizações, pensar de forma mais abstrata, desenvolvendo o poder da argumentação. (LAGE, 2008, p. 21).

Goldenberg enfatiza que quando o aluno faz suas próprias experiências e explorações, começa a jogar com informações, reconhecer os fatores independentes e analisar os resultados manipulando-os conforme a situação problemática. Quando o currículo promove tais experiências, está a fornecer o contraponto necessário para que as ideias importantes se distingam nitidamente. O autor ainda defende que uma formação matemática que possibilita aos alunos a oportunidade de conjecturar, buscando conexões dentro da própria matemática e desenvolvendo formas de pensamento matemático transforma-se em hábitos naturais do aluno. Sobre o ato de construir conjecturas, Fonseca (2000) nos diz:

O processo de formular conjecturas pode ser representado por um processo cíclico que compreende a seguinte sequência de fases: formular uma conjectura e acreditar nela quando seu surgimento; verificar que a conjectura cobre todos os casos conhecidos e exemplos; desconfiar da conjectura, tentando refutá-la encontrando um contra-exemplo ou usá-la para fazer predições que também podem ser verificadas; compreender por que razão é que a conjectura é verdadeira ou como é que tem de ser modificada. (FONSECA, 2000, p.31).

Segundo Goldenberg (1998b), para fazer matemática deve-se desenvolver o hábito de perceber relações, processos e conexões lógicas entre ideias, e deve-se ter a capacidade de descrevê-las. Ou seja, o aluno deve ser capaz de dizer com clareza o que as coisas significam. Para ele, um currículo, ao mesmo tempo em que comunica uma seleção de conteúdos matemáticos, deve estar organizado de modo a ajudar os alunos a desenvolver essas capacidades essenciais da comunicação matemática. Também em Lage (2008) temos:

[...] descrever é uma etapa importante para compreender, consistindo em: dizer o que significa; inventar a notação; discutir, tentar convencer os colegas que determinado resultado é verdadeiro ou plausível; descrever as evidências, mostrando os cálculos que constituem a prova; escrever resultados, conjecturas, argumentos, perguntas e opiniões sobre a situação em questão. Formular descrições escritas e orais sobre um trabalho favorece a negociação e divulgação das idéias matemáticas. (LAGE, 2008, p. 24).

Acredita-se que, na medida em que se trabalha com os *hábitos de pensamento*, outros hábitos importantes para a aprendizagem são também desenvolvidos. Dentre eles, podem-se citar a persistência para resolver um problema, a flexibilidade na busca por novas informações, a argumentação para resolução de problemas, a criatividade para enfrentar novos desafios e a aplicação de conhecimentos em novas situações. Ainda, que conteúdos e habilidades devam ser selecionados para construir um currículo, porém deve-se considerar principalmente o modo como eles são selecionados e, em especial, a maneira como são organizados, pois isso determina o tipo de formação escolar pretendida. Logo, ao propor uma metodologia de trabalho envolvendo a compreensão da matemática e seus métodos, está

possibilitando-se ao estudante uma formação que lhe permitirá uma atuação crítica dentro sociedade, uma vez que a matemática estudada e aprendida se tornará instrumento para entender e transformar o mundo.

4 Materiais e métodos

Para a aplicação do experimento didático foi desenvolvido o *site* “Geometria em Movimento”¹ conforme mostra a Figura 2. Esse *site* apresenta uma barra de navegação que organiza um conjunto de oito aulas que apresentam o estudo de três modelos geométricos — Porta Pantográfica, Janela Basculante e Balanço Vai e Vem — e dos conteúdos de geometria que são necessários para o desenvolvimento dos modelos.

Figura 2 - Página principal do *site* *Geometria em Movimento*.



Fonte: Os Autores

A partir do material disponibilizado no *site*, o experimento didático organizou-se em quatro blocos de estudo: os três primeiros tratavam, respectivamente, da modelagem da Porta

¹ Disponível em:

http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto_didatico/objetos/melissa/modelagemgeometrica/index.html



Pantográfica, da Janela Basculante e do Balanço Vai e Vem; no quarto bloco, os alunos produziram uma modelagem de sua escolha.

O trabalho realizado nos três primeiros blocos foi organizado em três etapas que possuíam os seguintes objetivos:

- a) Primeira Etapa: O modelo geométrico é apresentado ao aluno, que faz uma primeira investigação das características e do movimento do modelo tentando identificar os padrões matemáticos envolvidos.
- b) Segunda Etapa: O aluno realiza atividades direcionadas para o entendimento das relações matemáticas envolvidas na construção do modelo e responde aos questionamentos propostos.
- c) Terceira Etapa: O aluno constrói um modelo semelhante ao estudado na primeira etapa considerando suas ideias, percepções e conclusões.

Com o conhecimento construído nos três primeiros blocos da sequência didática, os alunos foram convidados a produzir uma modelagem de mecanismo ou situação de sua escolha, caracterizando o quarto bloco do experimento. A partir de observações feitas durante as atividades, salienta-se que o estudo das três etapas anteriores possibilitou a criação e o desenvolvimento de diferentes “hábitos do pensamento” e, dessa forma, acredita-se que foi possível para o estudante compreender a matemática envolvida nas construções a ponto de conseguir ser autor de seu projeto, construindo o seu próprio modelo geométrico.

Ao concluir os três blocos iniciais, notou-se que o aluno percebeu a necessidade de pensar nas relações geométricas que fazem parte do objeto escolhido para reproduzi-lo e isso resultou na elaboração de estratégias para sua construção, de modo que a forma e as propriedades geométricas deveriam ser mantidas quando o mecanismo fosse movimentado.

5 A organização do Experimento Didático

A sequência didática foi aplicada com uma turma de alunos do oitavo ano do ensino fundamental, do turno da manhã, na escola Olímpio Vianna Albrecht, escola pública da rede municipal da cidade de São Leopoldo no estado do Rio Grande do Sul. A turma observada possuía um total de 32 alunos, com idades variando entre 11 e 15 anos.

A dinâmica do trabalho ocorreu da seguinte forma:

- a) Todos os encontros aconteceram no laboratório de informática da escola, com alunos trabalhando em duplas. Os alunos que optaram por trabalhar juntos espontaneamente formaram duplas e, os demais, foram agrupados por sorteio. No total, foram formadas dezesseis duplas, sendo a metade formada por



afinidade e a outra metade por sorteio. O laboratório utilizado dispunha de 28 computadores com acesso à internet e de um projetor multimídia.

- b) Em todos os encontros, os alunos fizeram registros de suas ideias e responderam aos questionamentos propostos criando um documento digital com extensão HTML². O *software* utilizado para a criação desses documentos foi o Kompozer³, um editor de páginas HTML disponibilizado gratuitamente na internet.
- c) Ao final de cada encontro, o professor conduziu momentos de apresentação dos trabalhos desenvolvidos pelas duplas, propondo uma discussão coletiva em grupo. Esse momento da aula consistia em compartilhar com os demais da turma o conhecimento produzido nos momentos de trabalho em dupla.

Salienta-se que a concepção inicial do experimento didático foi readaptada durante os momentos de sua aplicação através da reestruturação de algumas atividades porque se percebeu a necessidade de intervir em momentos que não estavam previstos, de forma a esclarecer as dúvidas que se apresentavam e também a contribuir para o desenvolvimento de hábitos do pensamento que se mostraram pouco compreendido pelos estudantes no início da sequência didática.

A seguir, apresentam-se as construções dos estudantes referentes ao bloco IV do experimento didático, acompanhadas das análises a posteriori. Organiza-se a nossa análise a partir dos registros escritos pelos alunos no *software* Kompozer, seus arquivos criados no *GeoGebra*, a coletânea de modelagens geométricas construídas e, também, nossos próprios registros de observação realizados durante os momentos de trabalho e de apresentação das duplas. Ao final, retoma-se a questão inicial da pesquisa e procura-se apresentar possíveis argumentos para justificar nossa resposta para o questionamento apresentado na introdução desse texto.

6 Modelo Matemático com Geometria Dinâmica – Bloco IV

A última parte da sequência didática, intitulada bloco IV, foi reservada para a construção dos modelos escolhidos pelos estudantes. Entre os modelos produzidos, encontram-se alguns brinquedos, como também automóveis, teleféricos, elevadores, portas, janelas e um palhaço malabarista. Aqui é importante mencionar que foi através do *site*

² Sigla para “*Hyper Text Markup Language*”, que significa “Linguagem de Marcação de Hipertexto”. Consiste em uma linguagem para a criação de páginas na Web.

³ Disponível em <http://www.kompozer.net/>.

Geometria em Movimento que os estudantes da turma pesquisada tiveram o seu primeiro contato com geometria dinâmica. Naturalmente, nesse sentido, muitas das produções apresentadas podem ser classificadas como básicas e fundamentadas nas modelagens que foram estudadas nos blocos I, II e III.

Quando comparamos as ideias iniciais propostas pelos alunos sobre os modelos que programariam, apresentadas no início da experiência, com a construção efetivamente realizada, percebemos que, de modo geral, o desafio de trabalhar com a modelagem geométrica foi bem aceito. Considerando as duplas que fizeram uma indicação de modelo (12 duplas indicaram qual seria a sua construção no projeto), observa-se que: nove mantiveram a escolha inicial conseguindo completar a construção (em alguns casos com pequenas adaptações) do modelo escolhido e três alteraram o projeto inicialmente escolhido.

Quadro 1 - Quadro comparativo entre os modelos antes do experimento didático e o que foi produzido.

DUPLA	MODELO INDICADO NO INÍCIO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO	MODELO APRESENTADO NO FINAL DO EXPERIMENTO DIDÁTICO
1	Asa Delta sobrevoando um viaduto com automóveis em movimento e um campo de futebol com jogadores.	Ônibus
2	Prédio com porta abre e fecha + pessoas entrando e saindo.	Prédio com porta abre-fecha (modelo incompleto).
3	<i>Não indicaram o modelo escolhido</i>	Roda Gigante (modelo esteticamente incompleto)
4	Skatista fazendo manobras em uma pista.	Teleférico
5	Teleférico	Teleférico
6	<i>Não indicaram o modelo escolhido</i>	Roda Gigante
7	Ônibus + pessoas entrando e saindo.	Ônibus
8	Parque de diversão	Parque de diversão
9	Elevador	Elevador
10	Pracinha de brinquedos	Pracinha de brinquedos
11	Palhaço malabarista	Aluno A – Palhaço Malabarista Aluno B – Teleférico
12	Carro de corrida em pista (competição).	Carro de corrida em pista (competição).
13	Pula-pula + Gira-gira	Roda Gigante
14	<i>Não indicaram o modelo escolhido</i>	Porta Pantográfica (incompleta)
15	<i>Não indicaram o modelo escolhido</i>	Fachada da residência
16	Barco Viking	Barco Viking

Fonte: Os Autores

Constatou-se que nas duplas onde houve a troca do modelo a ser construído, o modelo previamente concebido foi tratado como muito complexo em sua elaboração, por exemplo:

asa delta sobrevoando um viaduto com automóveis em movimento, campo de futebol com jogadores em movimento e skatista fazendo manobras em uma pista. Notou-se também que os novos modelos indicados (ônibus, teleférico e roda gigante) já haviam sido escolhidos por outras duplas da turma. Concluímos, nesse sentido, que não houve a intenção de apenas cumprir a tarefa proposta visto que se tratava do mesmo grau de dificuldade já existente para outra dupla.

Sobre o desenvolvimento dos *hábitos do pensamento*, consideramos que o experimento didático conseguiu cumprir com os seus objetivos. Ao analisar as modelagens geométricas propostas pelos alunos, foram determinadas seis diferentes níveis de produção por parte dos alunos. São esses:

- a) Nível 0: não é possível identificar o desenvolvimento de hábitos do pensamento.
- b) Nível 1: há o desenvolvimento da habilidade de criar, inventar.
- c) Nível 2: há o desenvolvimento da habilidade de criar, inventar; de visualizar; de reconhecer padrões e invariantes; e de raciocinar por continuidade.
- d) Nível 3: ocorre o desenvolvimento da habilidade de criar, inventar; de visualizar; de reconhecer padrões e invariantes; de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra; e de raciocinar por continuidade.
- e) Nível 4: há o desenvolvimento da habilidade de criar, inventar; de visualizar; de reconhecer padrões e invariantes; de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo estabelecer dois movimentos, não simultâneos, ao modelo; e de raciocinar por continuidade.
- f) Nível 5: nota-se o desenvolvimento da habilidade de criar, inventar; de visualizar; de reconhecer padrões e invariantes; de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo estabelecer dois movimentos simultâneos ao modelo; e de raciocinar por continuidade.

Estes níveis de produção foram criados a partir dos hábitos do pensamento apresentados na figura 1, em que identificamos e acompanhamos desde o planejamento até a construção dos modelos apresentados pelos alunos. Na tabela 2, a seguir, apresentamos a classificação das duplas de acordo com os níveis de produção estabelecidos anteriormente.

Quadro 2 - Classificação dos modelos propostos pelos estudantes de acordo com o Nível de Produção.

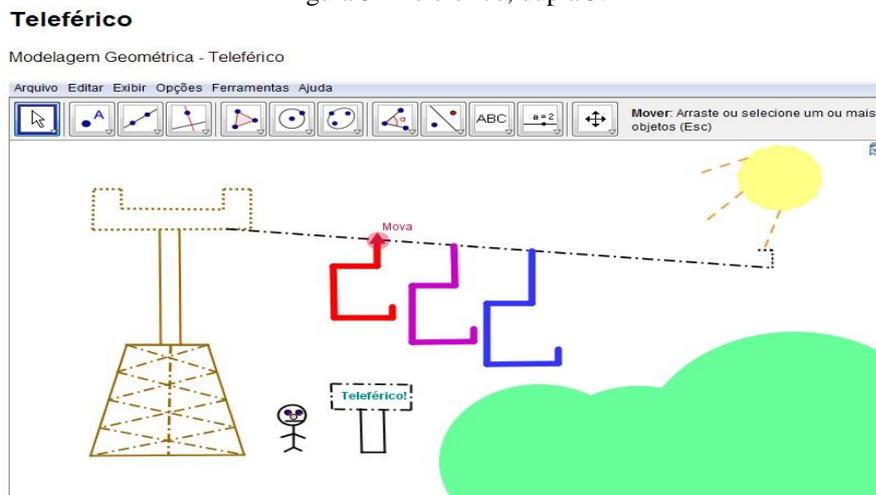
Níveis de Produção	Dupla – Modelo Geométrico
Nível 0	Dupla 3 – Roda Gigante Dupla 14 – Porta Pantográfica
Nível 1	Dupla 2 – Prédio com porta abre e fecha
Nível 2	Dupla 5 – Teleférico Dupla 12 – Carro em pista de corrida Dupla 11 (Aluno B) - Teleférico Dupla 1 – Ônibus
Nível 3	Dupla 16 – Barco Viking Dupla 13 – Roda Gigante Dupla 6 – Roda Gigante
Nível 4	Dupla 4 – Teleférico Dupla 8 – Parque de diversão Dupla 9 – Elevador Dupla 11 (Aluno A) – Palhaço Malabarista Dupla 15 – Fachada da residência
Nível 5	Dupla 10 – Pracinha de brinquedos Dupla 7 – Ônibus

Fonte: Os Autores

7 Algumas construções realizadas com o software GeoGebra

A presente seção ilustra alguns dos projetos desenvolvidos pelos alunos, referentes à proposta do bloco IV de atividades. Todos os arquivos podem ser visualizados e acessados através do *site* Geometria em Movimento. Observa-se que todas as figuras apresentadas a seguir constituem modelagens de situações que possuem geometria dinâmica, em que a sincronia dos movimentos ocorre pela movimentação de um ponto na tela.

Figura 3 - Teleférico, dupla 5.



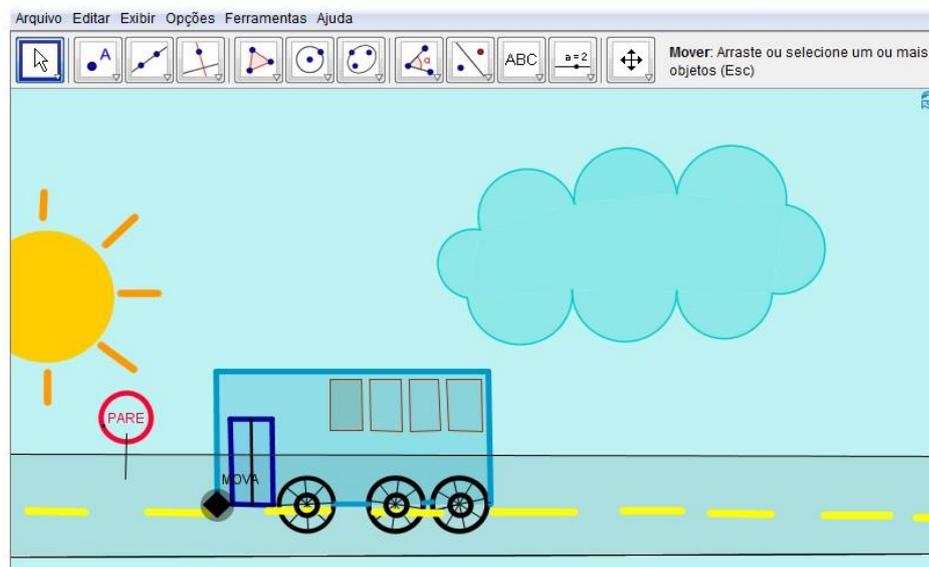
Dupla 5, criado com o [GeoGebra](http://www.geogebra.org)

Fonte: <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/duplasmodelagens.html>

Figura 4 - Ônibus, dupla 7.

Ônibus

Modelagem geométrica - Ônibus



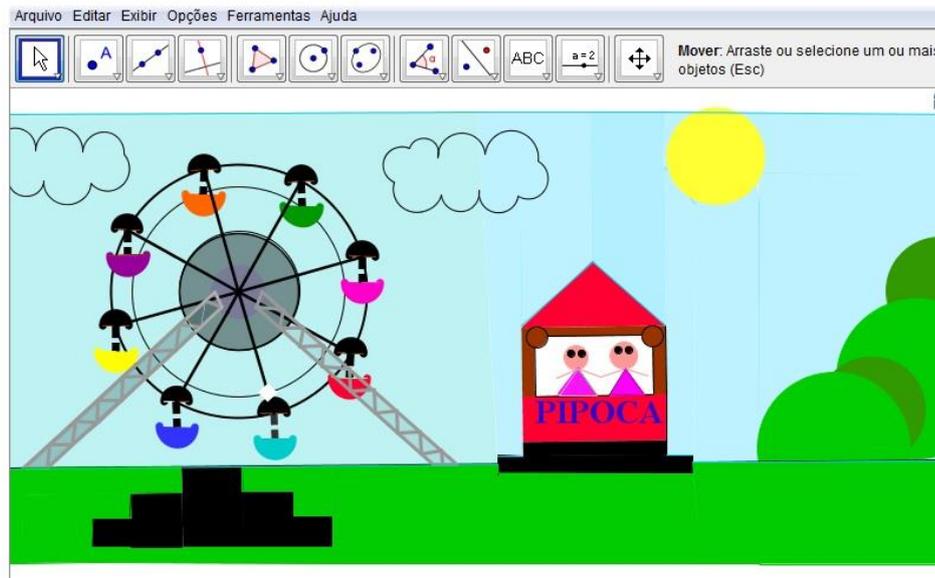
Dupla 7, criado com o [GeoGebra](http://www.geogebra.org)

Fonte: <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/duplasemodelagens.html>

Figura 5 - Roda gigante, dupla 6.

Roda Gigante

Modelagem Geométrica - Roda Gigante



Dupla 6, criado com o [GeoGebra](http://www.geogebra.org)

Fonte: <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/duplasemodelagens.html>

8 Algumas reflexões sobre os resultados da pesquisa

Com o experimento didático aliado ao uso da tecnologia, considera-se que a proposta foi além do tradicional estudo de ponto, reta e plano presente na escola básica. O *software* GeoGebra, com suas inúmeras possibilidades, permitiu que fosse feita uma abordagem dinâmica de temas importantes da geometria. Nesse sentido, entende-se que a atividade de modelagem geométrica funcionou como um incentivo para a aprendizagem dos estudantes e, dessa forma, a geometria dinâmica potencializou o trabalho voltado para o desenvolvimento dos hábitos do pensamento matemático. Sobre o trabalho desenvolvido, destacamos os seguintes aspectos:

- a) Houve aceitação positiva dos alunos do *software* GeoGebra e do *site* Geometria em Movimento, o que potencializou o estudo e o entendimento das relações matemáticas trabalhadas durante o experimento didático.
- b) A utilização do *software Kompozer* para a elaboração dos registros escritos dos alunos foi importante, pois ao final do experimento didático as ideias e as construções dos alunos estavam organizadas em textos que facilitavam a leitura dos pesquisadores e também dos demais colegas da turma.
- c) O comprometimento e o interesse dos alunos na realização das atividades foram relevantes e a dispersão ocorreu em raros momentos da aula.
- d) Os alunos demonstraram autonomia para fazer explorações com o *software*, em decorrência da familiaridade e da confiança na utilização de tecnologias.
- e) Os alunos demonstraram maior desenvolvimento, nesse experimento didático, do quarto hábito do pensamento, caracterizado pelo ato de criar, inventar, o que já era esperado considerando o caráter investigativo e lúdico da atividade de modelagem geométrica.
- f) A dificuldade percebida na turma foi o momento de efetuar os registros escritos das relações matemáticas observadas, o que evidencia não ser a redação de textos matemáticos e a forma de comunicação escrita das ideias hábitos cultivados permanentemente na escola.

O encaminhamento das atividades propostas no experimento didático buscou verificar e desenvolver os hábitos do pensamento conforme propõe Goldenberg (1998a, 1998b). Entende-se que, ao identificar movimentos que estão presentes no dia a dia e com isso perceber a geometria envolvida, os alunos puderam observar o mundo sob a ótica da matemática. Assim, eles iniciaram a construção de seus próprios modelos geométricos, com



aprofundamento dos hábitos do pensamento e, conseqüentemente, das diversas formas do pensamento matemático.

A pesquisa evidenciou que a partir do momento em que o professor passar a trabalhar com a modelagem geométrica em suas aulas, ocorrerá uma possibilidade de modificar o olhar dos alunos diante das situações cotidianas em que se visualiza a presença da matemática. Com os dados coletados nessa pesquisa, evidencia-se que há uma lacuna na formação matemática dos alunos; essa se manifesta na comunicação por escrito das ideias matemáticas. Reafirmamos a importância de ser considerada essa possibilidade no planejamento pedagógico do professor.

9 Algumas contribuições e conclusões finais

A elaboração e divulgação do *site* Geometria em Movimento pode ser considerada o produto que se disponibiliza com essa pesquisa. Durante a aplicação das atividades, o *site* serviu como um canal de comunicação entre professor e aluno, ampliando consideravelmente as fronteiras do tempo e do espaço da aprendizagem, uma vez que é possível estender a discussão para além da sala de aula. Com essa pesquisa, procurou-se mostrar que a abordagem dos conceitos ponto, reta, semirreta, segmento de reta, retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio, ângulos e quadriláteros ganhou um novo significado através da geometria dinâmica. No início os alunos esperavam ser guiados pelo professor e, à medida que as aulas ocorriam, eles aumentavam a autonomia e o poder de investigação na realização das atividades.

Embasados nas ideias de Goldenberg (1998a, 1998b) sobre hábitos de pensamento procurou-se com a pesquisa mostrar que a modelagem geométrica pode ser uma proposta para o professor abordar conceitos de geometria no ensino fundamental. Através de uma metodologia de trabalho baseada nos princípios da Engenharia Didática, procurou-se desenvolver, aplicar e refletir sobre uma sequência didática que estimulasse a percepção, a observação e a construção de elementos matemáticos necessários para o desenvolvimento conceitos matemáticos propostos.

Quanto à questão apresentada na introdução do texto: “Com a modelagem geométrica é possível desenvolver hábitos de pensamento matemático no ensino fundamental?” Acredita-se que sim; pois os ambientes de geometria dinâmica são fundamentais para que ocorra esse tipo de experimento didático. Em ambientes da geometria dinâmica, o estudante pode construir, simular movimentos e manipular suas construções diretamente na tela do computador, onde os efeitos produzidos pela sua construção o provocam e estimulam

constante necessidade de aperfeiçoamento. Para cada novo aperfeiçoamento construído, serão novos hábitos de pensamentos que estão elaborados e aperfeiçoados a cada momento.

TEACHING ENGINEERING AND MODELLING GEOMETRIC PROJECTS: POTENTIAL FOR BUILDING CONCEPTS IN ELEMENTARY EDUCATION IN THE LIGHT OF GOLDENBERG IDEAS

Abstract: The purpose of this paper is to present and discuss the results of a master degree research involving the use of technologies in mathematics teaching. It analyzes the manifestation and the development of mathematical thinking habits in elementary school students involved in working with geometric modeling. Search up the Goldenberg ideas the theoretical foundation required to analyze and evaluate the evolution of the subjects involved in the sequence of proposed activities. The construction of a research project involving the theoretical aspects proposed by the didactic engineering was essential for the interpretation and analysis of subsequent results to carry out the sequence of activities. With the proposal seeks to show that the inclusion of technology in math classes has become central to the construction of mathematical knowledge by students. At the end of the survey, assuming the form of a product available on the Internet a virtual environment constructed and used throughout the proposed activities.

Keywords: Mathematics education. Didactic Engineering. Mathematical thinking habits. Teaching sequence. Technology.

Referências

ARMELLA, L. M., KAPUT, J. J. **From static to dynamic mathematics:** historical and representational perspectives. 2008. Disponível em:
http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/11semiotic.pdf . Acesso em 03 out. 2012.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática.** Didáticas das matemáticas (Dir. Jean Brun). Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. (Horizontes Pedagógicos).

BASSO, M. A., GRAVINA, M. A. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: **Matemática, Mídias Digitais e Didática:** tripé para a formação de professores de Matemática. Porto Alegre. Cap. 1, p.4-25. 2011.

BORRÕES, M. **O Computador na Educação Matemática.** Programa Nónio Século XXI. 1998.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática.** São Paulo. Ática, 88p. 1988.

FONSECA, H. **Os processos matemáticos e o discurso em atividades de investigação na sala de aula.** Dissertação de Mestrado. Universidade de Lisboa. Departamento da Faculdade de Ciências. Lisboa. APM. 2000.



FREUDENTHAL, H. Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel, 1973, p.407 apud FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. **O ensino de geometria na escola fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte, Autêntica, 2001.

GOLDENBERG, E. P.. “Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (I). **Educação e Matemática**, 47, 31-35. 1998a.

_____. “Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (II). **Educação e Matemática**, 48, 37-44. 1998b.

GOULART, J.B.. **O estudo da equação $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ utilizando o software Grafeq**: uma proposta para o ensino médio. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS. 2009.

GRAVINA, M. A., SANTAROSA, L. M.. **Aprendizagem Matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.

GRAVINA, M. A., DIAS, M. T., BARRETO, M. M., MEIER, M.. **Geometria Dinâmica na Escola**. In: Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para a formação de professores de Matemática. Porto Alegre. Cap. 2, p.26-45. 2011a.

JORGE FILHO, A.. **Revista Construir Notícias**. Novembro/Dezembro, nº 31, ano 5. 2006.

LAGE, M. A. **Mobilização de formas de pensamento matemático no estudo das transformações geométricas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Belo Horizonte. PUCMINAS. 2008.

MORAN, J. M., BEHRENS, M.A., MASETTO, M.T. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. Campinas. São Paulo: Papirus. 2003.

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. Cadeias de Markov e Geogebra: Modelagem Matemática e Possibilidades para a Construção de Conceitos Através do Uso de Objetos Virtuais. In: **V Jornada Nacional de Educação Matemática, XVIII Jornada Regional de Educação Matemática**. Universidade de Passo Fundo. 2014a. Disponível em: <http://www.upf.br/jem/images/trabalhos-2014/minicursos/minicurso_seis.pdf> . Acesso em 10 fev.2015.

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. O uso do Geogebra como ferramenta para a construção de conceitos matemáticos: um primeiro estudo envolvendo Cadeias de Markov. **RENOTE**: Revista Novas Tecnologias na Educação. V 12. Nº1. 2014b. Disponível em: em: <<http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/50357>>. Acesso em 10 fev. 2015.