

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS E TIC'S: CONCEPÇÃO, APLICAÇÃO E ANÁLISE DE UM EXPERIMENTO DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

Andriceli Richit*

Rodrigo Sychocki da Silva**

Resumo: O presente trabalho é o resultado de uma experiência didática realizada com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Caxias do Sul, em 2013, na disciplina de Geometria Analítica II. Através de uma metodologia de pesquisa qualitativa, os alunos investigaram o conceito de Superfície Quádrica e suas relações com outros objetos matemáticos, em que, através de um experimento didático realizado no laboratório de informática, foi possível observar e analisar como os estudantes se apropriaram dos conceitos matemáticos envolvidos na proposta. A teoria das representações semióticas de Raymond Duval foi usada para analisar e interpretar a realização das atividades pelos sujeitos envolvidos. Com a pesquisa, demonstramos ser profícuo o uso da tecnologia digital para a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvendo superfícies quádricas. Ao final da proposta, disponibilizamos, na forma de produto, a sequência de atividades utilizada no experimento e apresentada no artigo, com o objetivo de propiciar aos demais colegas reflexões e possibilidade de contribuir em sua prática pedagógica no que se refere ao ensino de Superfícies Quádricas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Representações Semióticas. Superfícies Quádricas. Tecnologia Digital.

1 Introdução

O ensino do conteúdo Superfícies Quádricas, tradicionalmente, ocorre em cursos de nível superior, mais especificamente em cursos relacionados com a área exata e que possuem em sua matriz curricular disciplinas de geometria analítica e cálculo. A crescente e perceptível expansão tecnológica atual torna possível que os professores envolvidos com o ensino de matemática potencializem as suas aulas através do uso da tecnologia, mobilizando os alunos na direção da compreensão e da construção de conceitos matemáticos, conforme algumas pesquisas apresentadas ao longo deste texto.

* Mestre em Educação Matemática (UNESP). Doutoranda em Educação Matemática (UNESP). Professora de Matemática no Instituto Federal Catarinense – Campus Concórdia.

** Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS). Doutorando em Informática na Educação (UFRGS). Professor de Matemática no IFRS – Campus Caxias do Sul.



Nesse cenário, emergem para a discussão quais são os reais objetivos e metas elaborados pelos professores envolvidos, preocupados com o ensino de matemática. Almeida (2008) propõe que essa reflexão deve possuir relação direta com a concretização das ações, pela qual se busca, através de objetivos e metas, contribuir significativamente para a formação dos estudantes inseridos no âmbito acadêmico.

Portanto, as práticas avançam, tropeçam, contornam obstáculos e traçam trajetórias singulares, mas apesar da crescente quantidade de equipamentos colocados nas escolas, da articulação triádica entre equipamentos, conexão e desenvolvimento profissional de educadores observada tanto nos países mais ricos como nos mais pobres, a concretização das ações se mostra aquém dos objetivos, metas, desejos e utopias do discurso humanista, da prática crítico-reflexiva, do compromisso ético e solidário. (ALMEIDA, 2008, p.125)

Na busca pela compreensão do objeto matemático, estabelece-se um caminho, uma trajetória, onde cada avanço possui qualidades e características essencialmente novas em relação ao nível anterior, possibilitando que o sujeito se aproxime mais do conceito matemático. Nesse sentido, Richt (2010) expõe que a Informática pode potencializar as mais diversas formas de pensamento e contribuir significativamente para a qualidade da aprendizagem:

Ademais, ao utilizarmos a Informática no âmbito educacional, o foco dos processos de ensino e aprendizagem não está somente nos procedimentos utilizados para solucionar determinado problema, mas, também, na aprendizagem visto que a utilização dos recursos das tecnologias digitais pode conduzir os estudantes a modos diferentes de pensar e produzir conhecimentos. Esses conhecimentos podem ser favoráveis à compreensão destes e envolvem aspectos como a visualização, simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, conjecturas e validações por parte dos alunos, entre outros. (RICHIT, 2010, p. 30)

O curso de Licenciatura em Matemática oferecido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) possui, dentre seus componentes curriculares, a disciplina intitulada Geometria Analítica II. Nela são abordados os conteúdos envolvendo geometria analítica espacial, incluindo-se as Superfícies Quádricas, que fazem parte da ementa da disciplina. Com o objetivo de possibilitar a investigação desse conteúdo fazendo uso da tecnologia, elaboramos uma sequência de atividades, pela qual o aluno avança progressivamente na elaboração e na compreensão dos conceitos matemáticos. Com isso, acreditamos que uma proposta de ensino do conteúdo matemático Superfícies Quádricas envolvendo os alunos no processo de construção cognitiva implica uma melhor compreensão desse objeto matemático.

Através da teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, foi possível analisar e compreender a evolução dos alunos durante o desenvolvimento da pesquisa. Esta teve cunho qualitativo, segundo as ideias de Flick (2009), segundo o qual inicialmente elaboramos um esboço de desenho da pesquisa, destacando quais os principais objetivos e metas que deveriam ser alcançados com a execução da proposta.

Portanto, neste artigo, apresentamos o desenvolvimento e a análise do trabalho desenvolvido com alunos da graduação em Licenciatura em Matemática do IFRS – Caxias do Sul. O trabalho está organizado em cinco partes. Inicialmente apresentamos o embasamento teórico sobre as representações semióticas de Duval, o qual será necessário para a análise e as interpretações das produções dos alunos. Na terceira seção, apresentamos uma reflexão teórica sobre o uso das tecnologias digitais e sua importância para o ensino da matemática. Em seguida, a quarta seção consiste em explorar a metodologia de pesquisa utilizada no trabalho. Na quinta seção, são apresentadas e discutidas as atividades produzidas pelos alunos durante o experimento, analisadas à luz da teoria das Representações Semióticas de Duval. A parte final consiste em apresentar algumas conclusões acerca desta investigação, apontando as possíveis implicações da pesquisa para o ensino da matemática, em especial nas possíveis contribuições deste trabalho na formação de futuros professores.

2 Embasamento teórico: representações semióticas de Raymond Duval¹

Partimos da ideia de ‘representação’ para compreender as ideias de Duval sobre a construção do conhecimento. O autor considera como hipótese para o aprendizado humano, em especial o aprendizado da matemática, que existem relações entre as formas de representação que o sujeito faz sobre determinado conteúdo. Segundo Duval (2009; 2003), há relações de dependência entre como estão organizados os registros e as impressões internas sobre determinado conteúdo, e ainda sobre as maneiras utilizadas por cada sujeito em transformar as informações em registros que serão usados futuramente.

Ao realizar uma análise sobre o desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais do raciocínio e da construção dos tratamentos lógicos e matemáticos, Duval (2009, p.37) apresenta a existência de três fatos interligados:

- a) O primeiro fato é que existe uma diversidade nos registros de representação semiótica, onde a oposição entre linguagem e imagem é uma possível diversificação. A língua

¹ Filósofo e psicólogo. Pesquisador e autor de trabalhos envolvendo psicologia cognitiva, com destaque para as contribuições dos registros de representação semiótica durante a elaboração do conhecimento matemático.



natural e as línguas simbólicas não podem ser consideradas como formadoras de um mesmo registro de representação.

- b) O segundo fato é que existe uma diferenciação entre os representantes e os representados, ou seja, entre forma e conteúdo, em uma representação semiótica. Essa diferenciação está relacionada à compreensão do significado de uma representação, juntamente com a possibilidade de associá-la a outras representações para integrá-la em um sistema de tratamento.
- c) O terceiro fato é que deve existir uma coordenação entre os diferentes registros nas representações semióticas. Apenas conhecer as regras de correspondência entre dois sistemas semióticos distintos não é suficiente para que eles possam ser mobilizados e utilizados juntos. Em outras palavras, isso significa que pode não ocorrer uma apropriação do conceito abordado, produzido em dois sistemas de representação semióticos distintos.

Os três fatos apresentados anteriormente fazem parte do estudo relativo à *semiósis*, ou seja, à capacidade intelectual dos sujeitos em estabelecer ‘relações de representação’. Duval (2009) aponta que não devemos tratar um objeto e sua representação como um mesmo ente, uma vez que, realizando operações em mais de um sistema de representação, é implícito que nenhuma das representações consideradas é propriamente o objeto matemático, mas apenas estamos diante de um representante, um ente que está no lugar dele com a finalidade de permitir o acesso às ideias e aos objetos abstratos.

Até o presente momento, com os argumentos apresentados, podemos afirmar que ao representar, tratar e converter em representações semióticas, se faz necessária a mobilização do sistema cognitivo do sujeito, que seja capaz de dar conta da multiplicidade de representações. Para a aprendizagem da matemática, essa teoria propõe que somente podemos chegar perto da compreensão efetiva de determinado conceito matemático depois de estabelecidas relações entre as múltiplas formas de representações semióticas do objeto em estudo. Durante o processo de aprendizagem, ocorre a manipulação das diferentes representações semióticas, com a finalidade de transformá-las em outras, se necessário para a apropriação de determinado conceito.

Duval (2003) propõe que a originalidade da atividade matemática está na mobilização síncrona de pelo menos dois registros de representação, ou ainda, na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Logo, a atividade cognitiva envolvida na aprendizagem da matemática requer regras e códigos próprios. Cada um dos registros desenvolvidos possui limitações representativas específicas, surgindo, portanto a necessidade

da utilização de outros sistemas de expressão e de representação, além da linguagem usual e de imagens, como ferramenta para a compreensão mais efetiva dos conceitos (DUVAL, 1993, 1995).

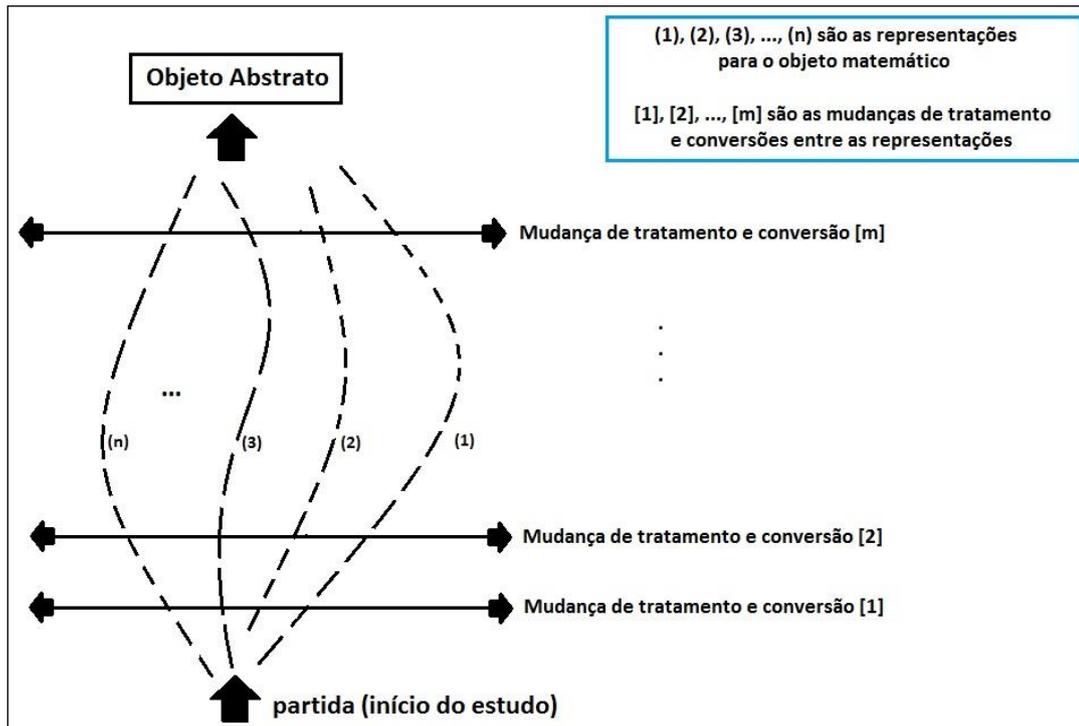
Considerando a possibilidade de representar os objetos matemáticos, Duval propõe que as noções de ‘tratamento’ e de ‘conversão’ são operações cognitivas diretamente envolvidas durante processo de compreensão do conhecimento matemático, isto é, na elaboração dos conceitos. Para a aprendizagem de matemática, é importante destacar que a mobilização dos registros desempenha papel importante durante a atividade cognitiva realizada no decorrer de uma proposta de atividade. Ao escolher o registro semiótico mais adequado para aplicar os tratamentos, isso implica primeiramente o desenvolvimento do raciocínio e, conseqüentemente, conduz à criação de soluções para os problemas matemáticos, conduzindo o sujeito durante o seu processo de aprendizagem.

A necessidade da diferenciação entre o objeto matemático e sua representação constitui-se um aspecto de relevância para Duval, pois a compreensão de um conteúdo conceitual está sobre a coordenação de pelo menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Ao dispor de vários registros, é possível estabelecer a distinção essencial do objeto matemático em relação ao registro na representação semiótica, ou seja, estabelecer a distinção correta entre o representante e o representado. Ao compreender a proposta de Duval, inicialmente percebemos o quanto a matemática é dependente das representações utilizadas para ser acessada e, em segundo lugar, consideramos que o professor deve elaborar estratégias específicas para o trabalho pedagógico com essa disciplina.

A Figura 1, a seguir, esboça a tentativa de esquematizar o assunto apresentado nessa seção. Percebemos que, ao iniciar o estudo sobre determinado conteúdo, a ocorrência da atividade cognitiva possibilita ao sujeito criar diferentes representações para o objeto em estudo, sendo que para título de ilustração, estas podem chegar a n representações distintas. Em seguida, conforme o sujeito avança, gradualmente, na tentativa de compreensão do objeto abstrato, ocorrem mudanças de tratamento e conversões, as quais podem chegar, a título de ilustração, a m mudanças de tratamento e conversões. Assim, durante o processo, há qualificação da ação e do pensamento, os quais enriquecem as relações e a construção dos conceitos sobre o objeto de estudo em questão. Como apresentado anteriormente, as alterações no tratamento e as conversões são operações de pensamentos essenciais durante o processo de elaboração dos conceitos, sendo que os números n e m podem ser

quantitativamente grandes. A complexidade que envolve o estudo do objeto abstrato é uma variável que depende das relações e das ações do sujeito envolvido desde o ponto de partida do processo. Mesmo não chegando a pleno no objeto matemático, a proposta de Duval é que consigamos evoluir até a sua máxima compreensão.

Figura 1 - Diagrama sobre o processo de mudança de tratamento e conversão das representações.



Fonte: Os autores.

A Figura 1 esboça uma tentativa de demonstrar que, conforme o sujeito aprimora as suas conversões e mudanças de tratamento para o objeto em estudo, é possível que este aumente progressivamente a sua compreensão sobre o objeto. Trata-se de um possível melhoramento no tratamento e conversão das formas de representação, as quais possibilitam ao sujeito gradualmente avançar na direção dos conceitos abstratos. Para ilustrar de modo dinâmico a Figura 1, imaginemos a trajetória ao longo do ponto de partida para o objeto abstrato, percorrendo simultaneamente direções horizontais, marcadas pelas mudanças de tratamento e conversões sobre representações mais elementares do objeto; também, na direção vertical, caracterizada por um avanço qualitativo nas mudanças de tratamento e conversões entre representações menos elementares do objeto abstrato. Portanto, a evolução, na tentativa de melhor compreender o objeto abstrato, consiste em um processo complexo, traduzido pela intensa atividade do sujeito envolvido e suas ações, onde o progresso qualitativo nas mudanças

de tratamento e conversões entre as possíveis representações implicam uma reorganização e reconstrução das mesmas.

3 Tecnologia, ensino e matemática: alguns estudos já produzidos

Os ambientes informatizados possibilitam ao professor uma alternativa para complementar o seu planejamento pedagógico. Ao incorporar o uso das tecnologias digitais na sua proposta de trabalho, Santos (2006) disserta:

Diante do exposto, ao usar as TI durante o desenvolvimento de uma atividade matemática o modo de se pensar, os caminhos a percorrer em busca da solução ou do entendimento, são moldados pelas possibilidades que estas mídias oferecem e, além disso, a maneira de investigar e a visualização são diferentes daquelas na qual lápis e papel e suas interfaces são as únicas tecnologias utilizadas. (SANTOS, 2006, p.26)

Nesse contexto, a autora apresenta, em sua pesquisa, a convergência da discussão entre matemáticos profissionais e educadores matemáticos sobre a possibilidade de softwares contribuírem na construção e na formalização de conceitos da matemática. Ainda, segundo a autora “softwares de geometria dinâmica não fazem demonstrações, mas a partir de sua utilização elas poderão ser estimuladas. Neste sentido, ao ser estimulada a demonstração terá um novo sentido para o aluno” (SANTOS, 2006, p.35). Ou seja, percebemos que, na escolha de um *software* para a abordagem de determinado conteúdo, o professor possibilita que os alunos trilhem caminhos e analisem suas possibilidades e hipóteses, que podem ser verificadas de modo simultâneo e dinâmico na tela do computador.

Estimula-se assim o potencial de argumentação e o estabelecimento de novas relações entre os objetos matemáticos em estudo. Progressivamente a complexidade das relações aumenta significativamente, enquanto as interações entre sujeito e objeto ocorrem de modo gradual. A contribuição da tecnologia informática para o ensino de matemática é que a mesma permite que o aluno possa experimentar, elaborar relações, realizar a verificação de suas ideias e construir argumentos capazes de explicar ou descrever determinado fenômeno. Nesse aspecto, sobre o ensino de geometria analítica, Richt (2005) argumenta:

O ensino de geometria analítica deve ser capaz de desenvolver no aluno a capacidade de interpretar geométrica e algebricamente um dado problema. É preciso que o professor dessa disciplina esteja preparado para desenvolver nos seus alunos a capacidade para interpretar uma construção gráfica, geométrica e algebricamente, pois, essa capacidade poderia reduzir certas dificuldades em geometria e álgebra. (RICHIT, 2005, p.42)

Sobre as possíveis dificuldades observadas no ensino da matemática, Andrade (2010) disserta:

Atribui-se, em parte, a origem das dificuldades de aprendizagem de seus conteúdos à sua natureza. Tal atribuição deve-se ao fato de que os alunos conseguem manipular os algoritmos característicos do conhecimento, mesmo sem entendê-los. (ANDRADE, 2010, p.22)

Isso acontece em uma grande parte dos conteúdos da matemática, e não somente em geometria analítica e cálculo. Um exemplo que pode ser percebido já nas séries iniciais é que podemos encontrar alunos que operam números naturais através do algoritmo da soma e da multiplicação, porém desconhecem o significado das operações que estão realizando. O fato é que, para o estudo da matemática, há a exigência de um nível formal de pensamento, e muitas vezes os alunos que estão cursando a disciplina operam ainda predominantemente apenas com elementos concretos. Quanto a isso, Andrade (2010) destaca a presença e a importância das diferentes formas de linguagem na matemática:

Identificam-se três diferentes tipos de linguagem (a aritmética, a algébrica e a geométrica) que são relacionadas aos seus respectivos modos de pensamento (analítico aritmético, analítico estrutural e sintético geométrico) e dessa maneira oferece ao aprendiz diferentes perspectivas sobre um mesmo conceito, ampliando ou restringindo a profundidade de compreensão do aluno de acordo com as situações vivenciadas. (ANDRADE, 2010, p.23)

Com isso, ao propor em sua pesquisa o ensino de vetores envolvendo ambientes de geometria dinâmica, a autora destaca:

Em um ambiente de geometria dinâmica, o usuário poderia mobilizar o mesmo vetor e rapidamente perceber se este se “encaixaria” para o mesmo deslocamento solicitado anteriormente. Contudo, há que se atentar que essa é uma alternativa arriscada visto que, em atividades de natureza diferente, ao utilizar a mesma noção do objeto geométrico, o aprendiz pode também flexioná-lo em respeito ao sentido e direção distintos dos iniciais e acreditar que também se trata do mesmo vetor. (ANDRADE, 2010, p.33)

Logo, a autora apresenta, através de suas ideias, que o uso da tecnologia não é suficiente para garantir a generalização, a abstração e a formalização das ideias matemáticas, uma vez que é necessária a intervenção adequada do professor como mediador nesse processo. Esse, porém, é um recurso indispensável e complementar para a proposta de trabalho do professor de matemática.

Mineiro (2011), em sua pesquisa de mestrado, aponta sobre as Superfícies Quádricas:

As superfícies quádricas, como todos os objetos matemáticos, são entidades abstratas, inacessíveis à nossa percepção sensorial. Não podemos “ver”, “tocar”, ou



“pegar” uma superfície quádrica. O acesso e a comunicação sobre estas entidades se dão exclusivamente por meio de sua representação. Para isso, podemos utilizar um sistema de representação, que pode ser discursivo (quando nos referimos às quádricas por meio da linguagem escrita ou falada, ou por meio da expressão algébrica correspondente), figural (quando utilizamos desenhos) ou gráfico (quando utilizamos um sistema de coordenadas, como o sistema cartesiano tridimensional). (MINEIRO, 2011, p.15)

Nesse sentido, o autor procura desenvolver uma abordagem que envolva tratamentos e conversões entre diferentes registros de representação semiótica, mediada por um modelo de representação tridimensional, favorecendo a visualização de superfícies quádricas.

Mota e Laudares (2010) apresentam um estudo envolvendo o uso da tecnologia, o qual contempla a construção de objetos no espaço tridimensional: planos, cilindros e superfícies quádricas. A pesquisa fundamenta-se na elaboração de uma sequência de atividades que propõe explorar a habilidade de visualização, utilizando o método tradicional com lápis e papel e o *software* Winplot², para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Sobre a pesquisa, Mota e Laudares (2010) concluem:

Com esta proposta metodológica, pretendemos desafiar a curiosidade do estudante, fazendo com que este tenha motivação para o estudo. Assim, é necessário que ele atue na construção do seu próprio conhecimento, através de uma participação mais ativa na construção e elaboração de atividades. [...] As atividades possibilitarão ao estudante o desenvolvimento do pensamento geométrico no trabalho com planos e quádricas, especialmente no traçado de seus gráficos. (MOTA; LAUDARES, 2010, p.9)

É notável que as pesquisas apresentadas nesta seção buscam contribuir na discussão envolvendo a importância de envolver o aluno em atividades que utilizem a informática como ferramenta para a construção do conhecimento. As pesquisas apresentadas retratam a necessidade do pesquisador, mediador do processo, em potencializar a apropriação e a aprendizagem dos conceitos matemáticos, fazendo uso da tecnologia em sala de aula e, com isso, contribuindo para a máxima compreensão do objeto matemático em estudo.

Finalmente, ainda quanto à integração da tecnologia no trabalho do professor e suas contribuições para o ensino da matemática, Zuchi (2009) apud Mota e Laudares (2010) aponta:

Com a integração das TICEs, novos elementos aparecem, em especial, a necessidade de desenvolver recursos didáticos para a implementação das atividades em sala de aula, onde o trabalho colaborativo entre professores e pesquisadores tem um papel chave. [...] o desenvolvimento de recursos que permitem a integração das

² *Software* livre, disponível em: <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> . Acesso em: 04 maio 2013.

tecnologias no ensino da matemática toma, em diferentes países, um espaço considerável na pesquisa em educação matemática. (ZUCHI, 2009, p.240)

4 Metodologia de pesquisa

A metodologia da presente pesquisa caracteriza-se por ser qualitativa, uma vez que o acompanhamento da evolução dos estudantes no decorrer da proposta ocorre segundo afirma Flick (2009):

A pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve a postura interpretativa e naturalística do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem. (FLICK, 2009, p.16)

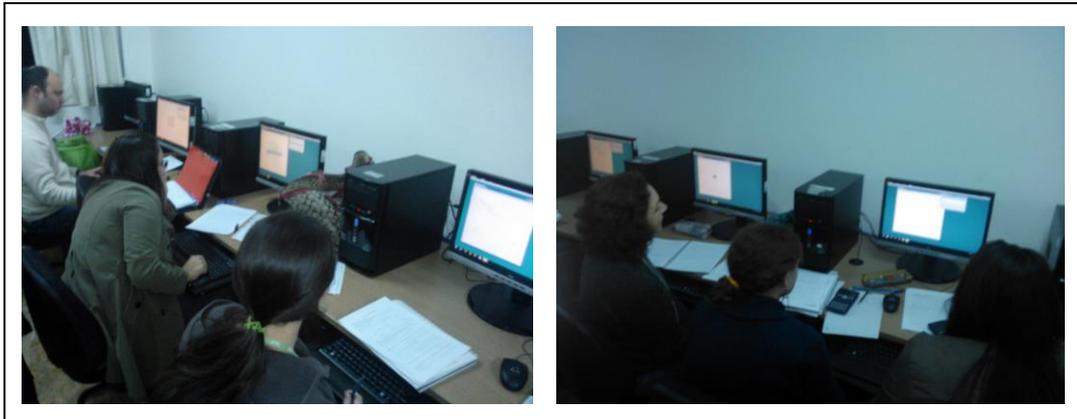
A elaboração de um plano de ação inicial, considerado como o desenho de pesquisa, que fosse adequado ao tema e à proposta metodológica, foi necessário para garantir a qualidade do estudo e dos resultados obtidos para análise. De acordo com Ragin (1994), o desenho de pesquisa:

O desenho de pesquisa é um plano para coletar e analisar as evidências que possibilitarão ao investigador responder a quaisquer perguntas que tenha feito. O desenho de uma investigação toca em quase todos os aspectos de uma pesquisa, desde os detalhes minuciosos da coleta de dados até a seleção de técnicas de análise de dados. (RAGIN, 1994, p.191)

A sequência de atividades³, realizada no laboratório de informática do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Caxias do Sul, conforme mostra a Figura 2, foi aplicada em uma turma com quatorze estudantes regularmente matriculados na disciplina de Geometria Analítica II no ano de 2013. Destacamos que não foi necessário o uso da Internet, pois os alunos receberam uma versão impressa da sequência proposta, na qual poderiam registrar o desenvolvimento das suas atividades.

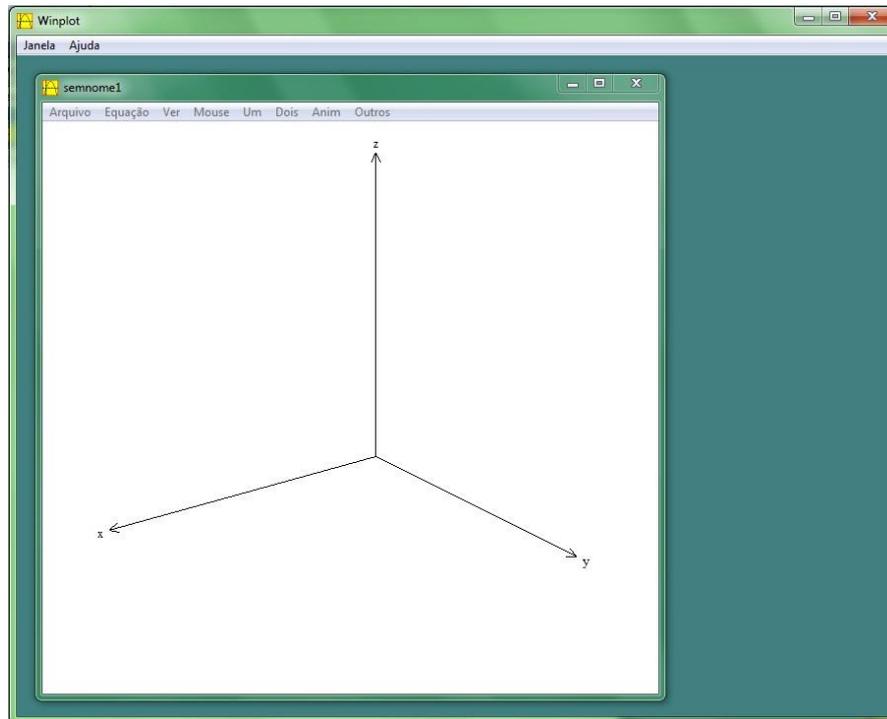
³ A sequência de atividades completa encontra-se acessível e disponível para download em: https://dl.dropboxusercontent.com/u/60260993/superficies_quadricas_atividades.pdf.

Figura 2 – Estudantes durante a realização das atividades no laboratório de informática.



Fonte: Os autores.

O trabalho foi mediado pelo professor da disciplina, o qual buscava investigar as relações produzidas pelos estudantes durante o estudo do conteúdo superfícies quádricas, como também a criação e a manutenção de possíveis representações e relações com outros objetos matemáticos. Durante a sequência de atividades, foi utilizado o *software* livre Winplot, o qual possui uma janela de representação e visualização tridimensional (3D) para os objetos na tela do computador. No momento que antecede a primeira etapa da sequência de atividades, foram informados alguns comandos básicos para a utilização do *software*, sendo que, durante a execução da proposta, os alunos teriam que desenvolver outras habilidades relacionadas ao seu uso para desenvolvê-la. Na Figura 3, podemos visualizar a interface da janela 3D presente no *software*.

Figura 3 – Interface da janela 3D no *software* Winplot.

Fonte: Arquivo pessoal.

As atividades propostas consistiam em explorar, junto aos estudantes, a manifestação e os tratamentos dos registros nas representações produzidas. Ao longo da proposta, foi explorado o tratamento produzido pelos sujeitos na representação tridimensional dos objetos em estudo, sendo que a inspiração e a fonte para a construção do conhecimento matemático seriam provenientes das relações produzidas entre as formas de representação e o registro dos objetos em estudo. A sequência de atividades utilizada com os estudantes foi organizada em três etapas, sendo cada uma delas apresentada brevemente a seguir:

- a) *Construção das Superfícies Quádricas*: Nessa etapa inicial, buscamos identificar uma possível construção, a qual o uso do *software* desempenhou papel central na obtenção de um modelo tridimensional que esboçasse a superfície envolvida. Os nomes utilizados e atribuídos às Superfícies Quádricas, objeto de estudo na atividade, foram concomitantemente sendo informados conforme as construções eram produzidas. Por exemplo, após a construção do esboço da equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, obtemos um objeto chamado de elipsóide. A exploração dos demais objetos ocorreu de forma análoga. Ainda nessa primeira etapa, investigamos o método utilizado pelos estudantes para a construção dos modelos tridimensionais que poderiam

representar através de um esboço a superfície em questão. Na Figura 4, apresentamos as outras situações abordadas na primeira etapa da sequência proposta.

Figura 4 – Exemplo das atividades na primeira etapa.

1) De acordo com as equações abaixo, construa cada uma das quádricas abaixo e classifique-as:		
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$	$z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$	$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$	$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$	$z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
2) Para a construção das superfícies quádricas anteriores, você usou o mesmo método de construção em todas? Justifique.		

Fonte: Arquivo pessoal.

- b) *Interseções entre objetos geométricos:* Após as construções ocorridas na primeira etapa, na segunda fase da sequência de atividades, foram apresentadas quatro situações-problema, com, ao todo, oito questionamentos envolvendo possíveis relações entre objetos geométricos e suas representações. Nessa segunda fase, as atividades procuravam investigar as relações elaboradas pelos estudantes entre os objetos geométricos, e também observar a evolução na construção do conhecimento matemático através das conversões e das mudanças de tratamento entre os objetos e suas representações em estudo, sob o ponto de vista da teoria de Duval. A Figura 5 mostra um exemplo de situação-problema proposto nessa etapa.

Figura 5 – Exemplo das atividades na primeira etapa.

4) Considere o plano de equação $2x + y + 3z = 3$ e a quádrlica de equação $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$.
i) Através de sua construção feita no Winplot, há pontos de interseção entre esses dois objetos geométricos? Quantos? Justifique.

ii) Qual o procedimento analítico para decidir se há ponto de interseção?

Fonte: Arquivo pessoal.

- c) *Encerramento*: Esta etapa consistiu em observar os relatos e as percepções dos alunos quanto às atividades realizadas. Procuramos verificar se a tecnologia, no uso do *software* Winplot, auxiliou no desenvolvimento e na elaboração das ideias. Os estudantes poderiam registrar suas impressões e opiniões sobre a sequência de atividades proposta. Ao final da proposta, o professor pesquisador coletou as atividades produzidas pelos estudantes para análise e interpretação dos registros produzidos. Tal análise será feita com maiores detalhes na próxima seção.

5 Análise das atividades produzidas pelos estudantes

O objetivo desta seção é apresentar a produção dos estudantes, pela qual, e por meio da fundamentação teórica discutida anteriormente, procuramos demonstrar que o conhecimento matemático construído por parte dos estudantes é resultado da manipulação de representações, mudanças de tratamento e possíveis conversões entre as representações semióticas elaboradas sobre o objeto Superfícies Quádricas. Ao final da análise, apresentamos um mapa conceitual com a organização e o mapeando as principais ideias e contribuições percebidas no desenvolvimento da presente pesquisa.

Na atividade que envolvia a construção das superfícies através do *software*, um fato observado é que os estudantes descreveram em suas respostas a mudança no método utilizado, para efetivar a construção de uma representação para o objeto através da análise de sua equação, conforme mostra a Figura 6. O “primeiro fato”, segundo Duval, apresentado na seção dois, afirma que há uma diversidade nas formas de registro. Nesse sentido, essa diversidade se manifestou quando os estudantes observaram que a construção no *software*

dependia também da maneira como a equação estava apresentada e como deveria ser definida no *software*, implicitamente ou explicitamente.

Figura 6 – Respostas dadas por três grupos de estudantes.

2) Para a construção das superfícies quádricas anteriores, você usou o mesmo método de construção em todas?
Justifique.
Não. Usamos equação explícita para $z = f(x, y)$ e implícita p/ equação do tipo $f(x, y, z) = \text{constante}$

2) Para a construção das superfícies quádricas anteriores, você usou o mesmo método de construção em todas?
Justifique.
Não. Usamos um método de equações implícitas e o de equações explícitas

2) Para a construção das superfícies quádricas anteriores, você usou o mesmo método de construção em todas?
Justifique.
Não, utilizamos dois métodos distintos, são eles: explícito p/ 3° e 4° equações e implícito p/ as demais.

Fonte: Arquivo pessoal.

A segunda etapa da sequência de atividades, ao longo de todas as situações-problema apresentadas, consistiu em observar se os estudantes conseguiam mobilizar os seus registros de representação semiótica envolvendo a construção de representantes dos objetos matemáticos, estabelecendo e produzindo relações entre eles, no uso do *software* Winplot. Também observamos se os alunos conseguiam relacionar a representação geométrica, elaborada através do *software*, com a representação analítica das expressões envolvendo as superfícies.

Nessa segunda etapa da sequência de atividades, o uso do *software* Winplot demonstrou relevante importância, pois possibilitou que os alunos produzissem inferências através de suas construções para representar uma Superfície Quádrica. A mobilização do conceito de representação para os objetos na tela do computador permitiu que fossem produzidas relações entre a visualização e o esboço dos representantes construídos. A possibilidade do uso da ferramenta ‘rotação’ disponível no *software* foi percebida pelos estudantes, ao passo que ela foi fonte para a elaboração do raciocínio envolvendo o posicionamento geométrico dos representantes esboçados na tela do computador.

Percebemos que, na manipulação dos registros analíticos, confrontados com a percepção do registro geométrico, manifesta-se, segundo Duval, a mudança no tratamento sobre o objeto em estudo e, com isso, os estudantes enriquecem as relações produzidas

durante a investigação dos problemas. Na Figura 7, como exemplo, apresentamos a manifestação da mudança de tratamento elaborada por um grupo de estudantes. O que percebemos é que a convergência do estudo analítico sobre os objetos ocorre ao mesmo tempo em que o esboço do representante geométrico e suas relações são estabelecidos. Isso, segundo Duval, manifesta no sujeito a possibilidade de compreensão maior sobre o objeto de estudo, chegando-se mais próximo do conceito abstrato envolvido. Outras relações análogas às demonstradas na Figura 7 foram produzidas pelos demais grupos de estudantes, demonstrando que a análise geométrica, através do uso do Winplot, e a investigação analítica estão relacionadas meio da mudança de tratamento, ocorrendo, segundo Duval, uma conversão entre os registros de representação para a melhor compreensão do objeto matemático.

Figura 7 – Mudança de tratamento elaborada por um grupo de estudantes.

<p>2) Considere a quádrlica de equação $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} = 1$ e a reta de equação $t \in \mathbb{R} /$</p>	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$
<p>i) Através de sua construção feita no Winplot, há pontos de interseção entre esses dois objetos geométricos? Quantos? Justifique.</p>	
<p><i>Não há pontos de interseção, pois a reta não toca o objeto, (não atravessa, nem encosta).</i></p>	
<p>ii) Qual o procedimento analítico para decidir se há ponto de interseção?</p>	
$\frac{(1+t)^2}{3} + \frac{(2-t)^2}{4} + \frac{(t)^2}{5} = 1$	
$\frac{20(t^2 + 2t + 1)}{60} + \frac{15(t^2 - 4t + 4)}{60} + \frac{12t^2}{60} = \frac{1}{60}$	
$20t^2 + 40t + 20 + 15t^2 - 60t + 60 + 12t^2 = 60$	
<p><i>4t^2 - 20t + 20</i> <i>20 ± √-3360</i> <i>94</i> <i>∴ V com</i> <i>∴ não há interseção, então não tem</i> <i>valor t para t.</i></p>	

Fonte: Arquivo pessoal.

Ainda referente à segunda etapa de atividades, é importante destacar que o uso das ferramentas disponíveis no *software* Winplot foi essencial para o estudo dos objetos na tela do computador. Ao executar as ações de ‘girar’, ‘mover’ e ‘dar zoom’, há o estabelecimento de relações com as operações de ‘rotação’, ‘translação’ e ‘homotetia’, nessa ordem. Durante a execução dessas ações, isoladamente ou combinadas entre si, os estudantes mobilizam a criação de formas diferenciadas de tratamento para o objeto em estudo. A mudança do ponto de vista sobre o objeto tridimensional representado na tela do computador permite que novas relações sobre sejam criadas, permitindo melhoramentos na compreensão das ideias matemáticas envolvidas.

Segundo o “terceiro fato” de Duval, apresentado na fundamentação teórica desse texto, há a necessidade de uma coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica. Ao propormos a investigação do conteúdo matemático Superfícies Quádricas or meio do uso do Winplot, a evolução da compreensão do objeto está diretamente relacionada com a criação de diferentes representações e formas de tratamento, onde a coordenação entre elas é uma atividade necessária por parte sujeito, uma vez que essa evolução na atividade cognitiva é condição necessária para o melhoramento da compreensão do objeto em estudo. Na Figura 8, apresentamos um exemplo dessa manifestação, na qual, durante a investigação do problema, o grupo de estudantes destaca que a infinidade de pontos que há pode ser visualizada como resultado de operações sobre o esboço do objeto.

Figura 8 – Exemplo de demonstração no uso das ferramentas do Winplot.

4) Considere o plano de equação $2x + y + 3z = 3$ e a quádrlica de equação $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$.

i) Através de sua construção feita no Winplot, há pontos de interseção entre esses dois objetos geométricos? Quantos? Justifique.

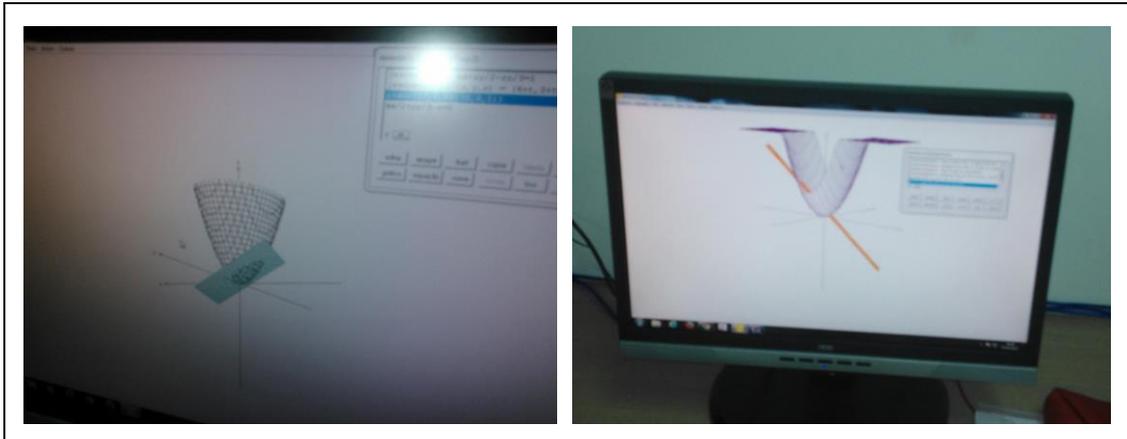
Sim, infinitos pontos visualizados ao girar, mover, dar zoom.

ii) Qual o procedimento analítico para decidir se há ponto de interseção?

Substituído variáveis, pela dedução da conta. Encontrei 0 lugar geométrico $3x^2 + 4x + 2y^2 + 2y = 0$.

Fonte: Arquivo pessoal.

Portanto, as construções dos objetos na tela do computador permitiram o estabelecimento de novas relações entre as situações-problema propostas na sequência de atividades. Ao proporcionar que os estudantes criassem os modelos de representantes do objeto de estudo e pudessem analisar não somente do ponto de vista analítico, acreditamos que as mudanças de tratamento e conversões entre os registros de representação semiótica possibilitaram uma melhor compreensão dos conceitos abstratos de matemática envolvidos na proposta. A Figura 9 apresenta dois exemplos de construção no Winplot elaborados pelos estudantes durante a execução das atividades.

Figura 9 – Exemplo de construção utilizando o *software* Winplot.

Fonte: Os autores.

A última etapa da sequência de atividades consistia em questionar os estudantes quanto ao uso do Winplot durante a proposta. Além disso, também objetivamos avaliar as concepções envolvendo a construção do conhecimento durante a proposta. As respostas apresentadas pelos grupos envolvidos demonstram convergência no que se refere à elaboração do conhecimento matemático. Os grupos julgaram o uso do *software* como uma alternativa para consolidar o estudo analítico dos conceitos, ou seja, o *software* permitiu ir além do visualizar, possibilitando e potencializando o estabelecimento de relações, produzidas durante as mudanças de tratamento e a conversão entre os registros de representação semiótica. Na Figura 10, apresentamos alguns exemplos de relatos produzidos pelos estudantes.

Figura 10 – Exemplos de relatos sobre a sequência de atividades.

6) Você considerou importante o uso do Winplot para a abordagem do assunto quádricas? Qual a avaliação que você faz sobre a construção dos conceitos envolvidos nos problemas apresentados?

Muito interessante, pois facilita a visualização dos objetos geométricos e as possíveis interseções entre eles, o que, posteriormente pode ser comprovado com o procedimento analítico.

6) Você considerou importante o uso do Winplot para a abordagem do assunto quádricas? Qual a avaliação que você faz sobre a construção dos conceitos envolvidos nos problemas apresentados?

Muito importante, pois quando visualizamos os objetos com os eixos, temos uma noção real de como eles se comportam, fazendo assim a compreensão do conteúdo abordado em aula teórica até agora.

6) Você considerou importante o uso do Winplot para a abordagem do assunto quádricas? Qual a avaliação que você faz sobre a construção dos conceitos envolvidos nos problemas apresentados?

O USO DO SOFTWARE É MUITO RELEVANTE PARA FACILITAR/CONSOLIDAR AS FORMAS DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS, BEM COMO TORNAR VISÍVEIS CONSTRUÇÕES ANALÍTICAS QUE PARA ALGUNS PODEM, NUM PRIMEIRO MOMENTO, PARECER PURAMENTE ABSTRAÍDAS. O SOFTWARE É UMA PONTE ENTRE O ANALÍTICO E O GEOMÉTRICO.

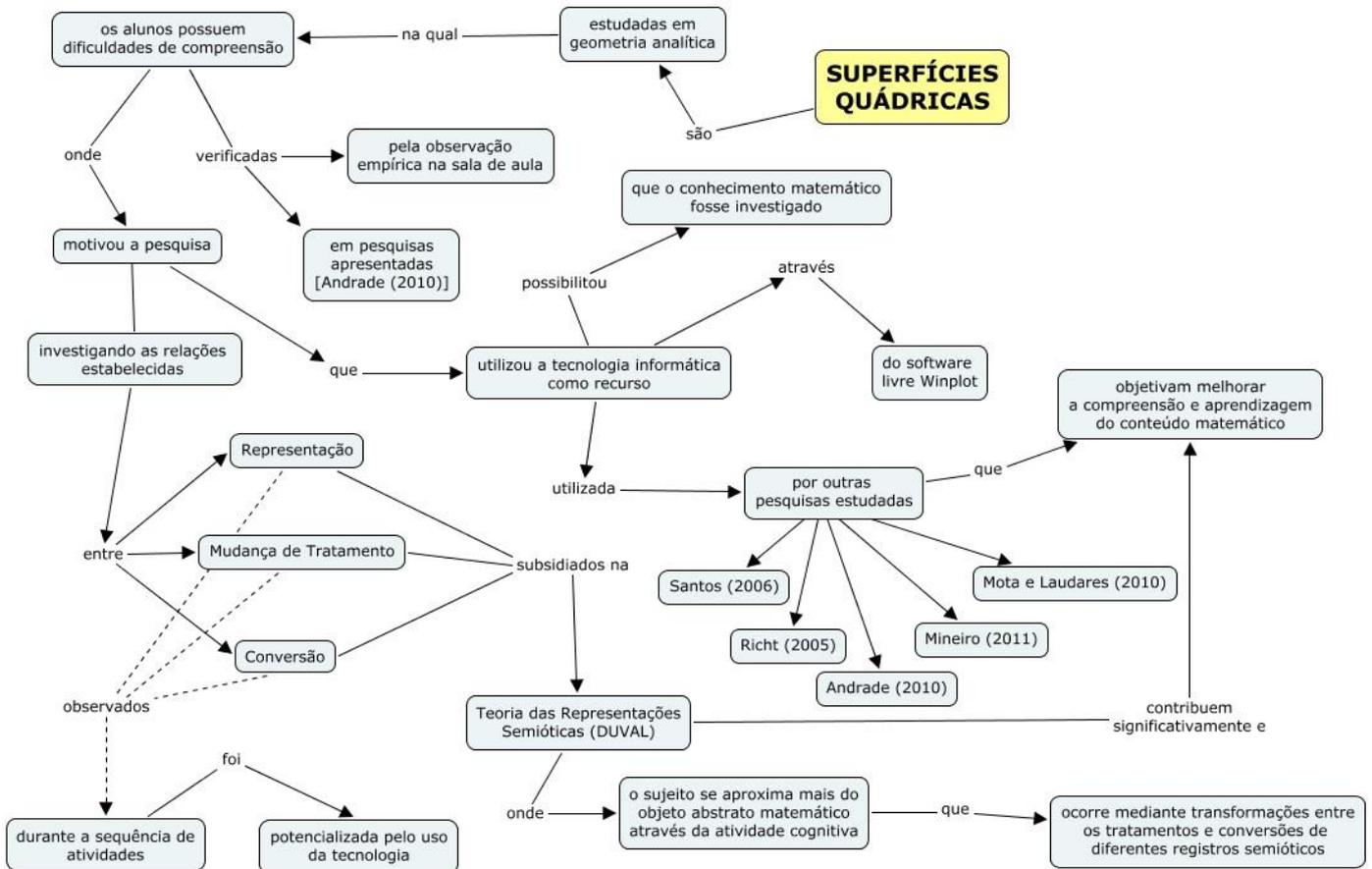
6) Você considerou importante o uso do Winplot para a abordagem do assunto quádricas? Qual a avaliação que você faz sobre a construção dos conceitos envolvidos nos problemas apresentados?

Sim, através do winplot podemos visualizar as construções que fazemos em aula e compreender como são as quádricas, os eixos de nível. Com isso é possível "emergir" o que construímos através dos métodos analíticos.
Muito bom!

Fonte: Arquivo pessoal.

Conforme mencionado no início desta seção, a apresentação de um mapa conceitual sobre a pesquisa relatada neste artigo visa organizar e mapear as principais ideias e contribuições percebidas com o desenvolvimento da pesquisa, fortalecendo assim a discussão apresentada. Procuramos, através do mapa conceitual apresentado na Figura 11, consolidar os aspectos relevantes produzidos ao longo da investigação, e também contribuir para a discussão no campo de pesquisa da educação matemática, em especial à discussão envolvendo o uso das tecnologias para o melhoramento do ensino da matemática.

Figura 11 – Mapa conceitual sobre a pesquisa.



Fonte: Os autores.

6 Considerações finais

A presente pesquisa procurou demonstrar que a inserção da tecnologia produziu resultados profícuos no ensino do conteúdo Superfícies Quádricas na disciplina de geometria analítica. Consideramos que as pesquisas apresentadas ao longo do texto convergem para dois aspectos: o primeiro seria a contribuição da informática para o ensino da matemática, no sentido que ela possibilita verificar, testar, validar hipóteses instantaneamente, apenas alterando a representação do objeto na tela do computador. O segundo aspecto é que a informática possibilita ao sujeito reconstruir suas afirmações e conhecimentos a cada verificação. Esse último aspecto pode ser inferido a partir da fundamentação teórica apresentada ao longo do texto. Duval (1993, 1995, 2009), em suas pesquisas, propõe que a coordenação do sujeito, ao longo das mudanças de tratamento e conversões dos registros de representação, é essencial para a melhor compreensão do objeto abstrato. Esse fato pode ser verificado ao longo da aplicação e da análise dos resultados obtidos com a pesquisa.

Por fim, acreditamos que a utilização do *software* Winplot foi significativa para a melhor compreensão do conteúdo proposto na investigação. As pesquisas apresentadas no decorrer deste texto contribuíram para uma melhor reflexão sobre o tema, tornando-se elementos de relevante importância para a elaboração e a construção da sequência de atividades. Ainda notamos, com a referida metodologia de trabalho e o estudo com estudantes da Licenciatura em Matemática, que houve contribuição ao processo de formação dos futuros professores, pois o experimento didático vivenciado pode gerar a reflexão sobre o uso de tecnologias e a criação de práticas de ensino inovadoras em sala de aula. Esperamos, com os resultados alcançados na pesquisa, contribuir para o ensino desse conteúdo, possibilitando que demais professores e interessados no tema possam vir a utilizar, adaptar ou inspirar a criação de outras atividades, com vistas ao melhoramento no ensino de Superfícies Quádricas, em especial nas aulas de geometria analítica.

QUADRICS SURFACES AND TIC'S: DESIGN, IMPLEMENTATION AND ANALYSIS OF AN EXPERIMENT TEACHING IN THE LIGHT OF THE THEORY OF REPRESENTATION OF DUVAL SEMIOTICS

Abstract: This paper is the result of a teaching experiment conducted with undergraduate Mathematics at the Federal Institute of Rio Grande do Sul - Caxias do Sul Campus in 2013 in the discipline of Analytic Geometry II. Through a qualitative research methodology, students investigated the concept of quadric surface and its relations to other mathematical objects, in which, it was possible to observe and analyze how students appropriated the mathematical concepts involved in proposal through a teaching experiment conducted in the computer lab. The theory of semiotic representations of Raymond Duval was used to analyze and interpret the performance of activities by those involved. The research shows the the use of digital technology is fruitful for the learning of mathematical concepts involving quadric surfaces. At the end of the proposal a sequence of activities used in the experiment and presented in the article is available as a product developed by the research, with the goal of providing teachers with reflections and possibilities of innovation in their practices.

Keywords: Teaching of Mathematics. Representations Semiotics. Quadric Surfaces. Digital Technology.

Referências

ALMEIDA, M.E.B. Tecnologias na Educação: dos caminhos trilhados aos atuais desafios. **BOLEMA**, Rio Claro, n.29, p.99–129, 2008.

ANDRADE, J. P. G. **Vetores: interações à distância para aprendizagem de Álgebra Linear**. Dissertação (Mestrado). Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

DUVAL, R. Registre de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM – ULP. v.5. p.37-65. 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels**. Berna: Peter Lang. 1995.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy, Marisa Rosâni Abreu de Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, p.11-33, 2003.

FLICK, U. **Desenho da pesquisa qualitativa**. Porto Alegre, Artmed, 2009.

MINEIRO, R. M. **Atividades para o estudo de Superfícies Quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Educação Matemática. 2011.

MOTA, J. F., LAUDARES J. B. Desenvolvimento do pensamento geométrico com metodologia para o estudo de superfícies no espaço – planos, cilindros e quádricas. **X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade**. Salvador, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T12_CC444.pdf>. Acesso em: 05 set.2013

RAGIN, C. **Constructing Social Research: The Unit and Diversity of Method**. Thousand Oaks, CA: Pine Forge Press, 1994.

RICHIT, A. **Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro, SP: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2010.

RICHIT, A. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro, SP: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2005.

SANTOS, S. C. **A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro, SP: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2006.



ZUCHI, I. A integração de ambientes tecnológicos no ensino: uma perspectiva instrumental e colaborativa. In: FROTA, Maria Clara Rezende, NASSER, Lilian. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**. Recife: SBEM, 2009.