

VISUALIZAÇÃO DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS EM UM PARÂMETRO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Francisco Regis Vieira Alves*

Resumo: A noção de integral generalizada constitui elemento obrigatório de estudo no contexto de Análise. Neste trabalho, discutiremos uma classe particular de integrais generalizadas de funções $f(x,t)$, que se caracterizam pela dependência de um parâmetro 't'. Dentre alguns dos critérios que empregaremos com o objetivo precípuo de descrever o comportamento de algumas dessas integrais, destacamos a passagem de derivação sob o sinal da integral. Enfatizaremos, também, a visualização de propriedades possibilitadas pelo uso do software Geogebra. Com ele, mostraremos, do ponto de vista gráfico-geométrico, as relações de dependência conceitual e do comportamento (convergência/divergência) das integrais do tipo $\int_a^{\infty} f(x,t)dx$. Por fim, pela exploração de certas características qualitativas deste objeto, indicaremos vias de transmissão deste saber, com vistas ao entendimento no contexto de ensino.

Palavras-chave: Integral generalizada, Visualização, Software Geogebra.

1 Sobre a noção de integral em um parâmetro

Usando a notação matemática *standard* que registramos nos compêndios de Análise, vamos considerar, para ilustrar, o seguinte exemplo preliminar:

$$\int_0^1 f(x,t)dx = \int_0^1 (2x+t^3)^2 dx = \frac{(2x+t^3)^3}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} = 4/3 + 2t^3 + t^6 = g(t). \text{ A diferenciação sob o}$$

símbolo de integral é, então, determinada do seguinte modo: $\frac{d}{dx} \int_0^1 (2x+t^3)^2 dx =$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (2x+t^3)^2 dx = \int_0^1 (12t^2x + 6t^5) dx = [6t^2x^2 + 6t^5x]_{x=0}^{x=1} = 6t^2 + 6t^5 = h(t).$$

De modo simplificado, integramos na variável 'x' e obtemos algo que depende do parâmetro 't'. Tal procedimento é fundamentado, do ponto de vista formal, num teorema devido a Leibniz (1646-1716). O mesmo proporciona a consistência para o cálculo formal que realizamos há pouco. Por outro lado, questionamos a abordagem deste conteúdo que se restringe e enfatiza apenas os aspectos lógico-formais (ALVES & LOPES, 2013). Nas

* Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE).

próximas seções, recorreremos ainda a determinados critérios envolvendo a natureza de convergência/divergência de integrais generalizadas.

Teorema (Regra de Leibniz): Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f: U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades: (i) Para todo $x \in U$, a função $t \mapsto f(x, t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$; (ii) a i -ésima derivada parcial $\partial f / \partial x_i(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua. Então, a função $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida

por $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$, possui i -ésima derivada parcial em cada ponto de $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt \text{ (derivação sob o sinal de integral).}$$

Para concluir esta seção preliminar, recordamos que Vidiane (1986) acentua métodos clássicos envolvendo o cálculo de integrais. Por outro lado, apesar do grande repertório de métodos analíticos, não extraímos uma significação geométrica no trabalho deste autor. Doravante, buscaremos interpretar qualitativamente, com recurso no *software Geogebra*. A visualização assume papel fundamental nas situações.

2 Visualização/propriedades das integrais em um parâmetro

Antes de nos lançar ao estudo e discussão de um objeto matemático particular, não podemos desconsiderar a complexidade do raciocínio matemático, especialmente o crescente e complexo raciocínio numérico envolvido em Análise (TYLES, 1991, p. 33). Esta autora considera a função $f(x) = 4x - x^2 = 4x(1 - x)$ e imediato, por meio da aplicação de procedimentos, transformamos tal expressão, e inferimos facilmente propriedades particulares relativas aos valores individuais indicados por $x = 0$ e $x = 1$ para esta função.

Por outro lado, podemos questionar o comportamento de $f(x)$, para todos os valores em $0 \leq x \leq 1$. Neste sentido, Tyles (1991, p. 34-35) acentua que “nós podemos provar coisas sobre a parábola (na totalidade relacionada de seus argumentos e valores da função) pelo estudo dos seus valores individuais tomados por $f(x)$ relativamente a determinados condicionantes oriundos de sua definição.”. Com origem em todos os dados coligidos nesta investigação em torno do objeto que chamamos de função, poderemos adquirir, possivelmente, um entendimento do conceito matemático.

Feita esta pequena digressão de ordem filosófica, discutiremos certas propriedades formais relacionadas com o objeto integral generalizada em um parâmetro ‘t’ e, com vistas ao



entendimento do conceito matemático em foco, acentuaremos nossas discussões amparadas pelo uso do *software Geogebra* que enfatizam a visualização.

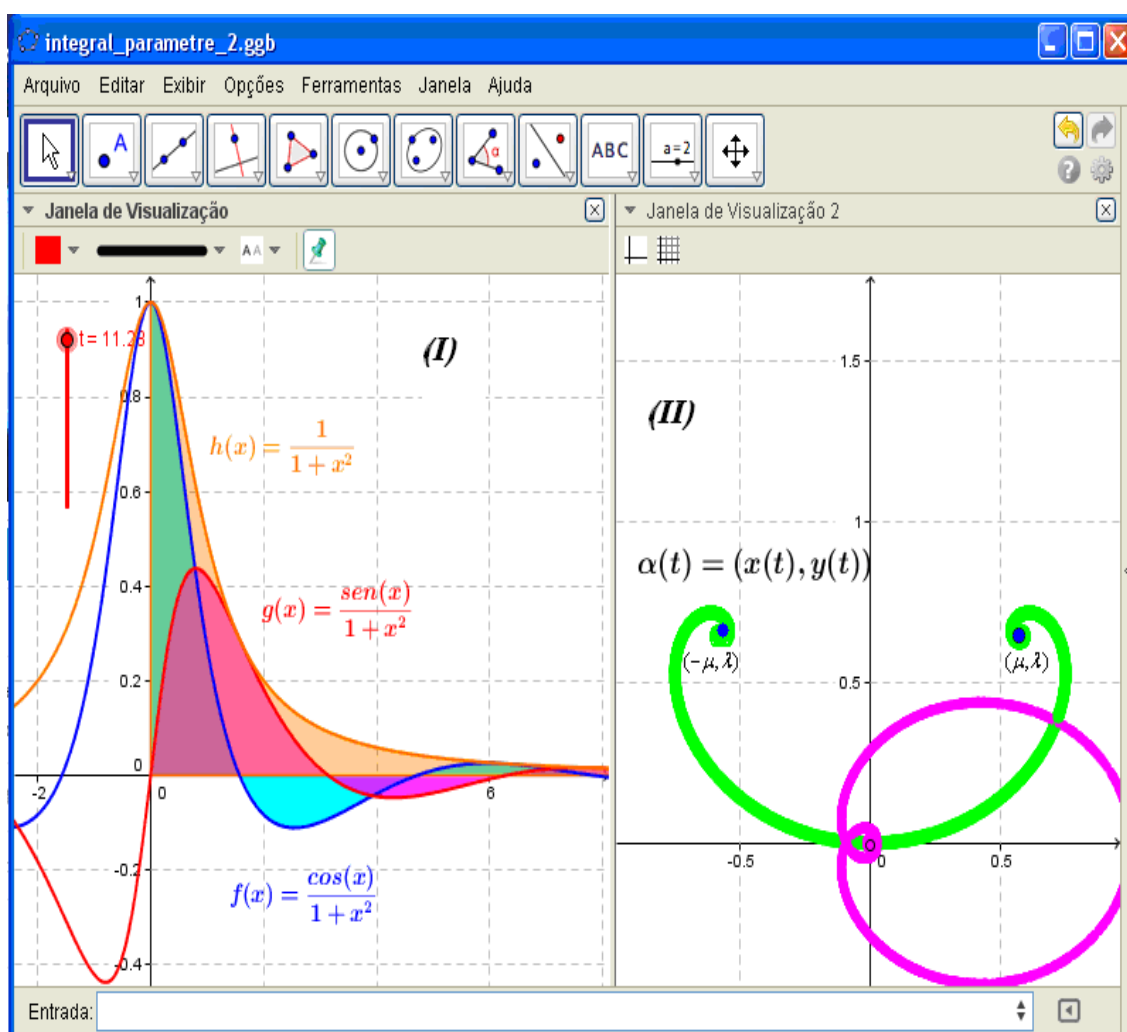
Nosso primeiro exemplo é descrito pela curva parametrizada $\alpha(t) = \left(\int_0^t \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt, \int_0^t \frac{\text{sen}(t)}{1+t^2} dt \right) = (x(t), y(t))$. Não é difícil concluir que $x(-t) = -x(t)$ e que $y(-t) = y(t)$, para $\forall t \in \mathbb{R}$. Tal propriedade conferirá o caráter de simetria relativa ao eixo Oy em seu traço (descrito no plano) uma vez que falamos de uma curva no parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Ademais, podemos obter ainda que $\alpha'(t) = \left(\frac{\cos(t)}{1+t^2}, \frac{\text{sen}(t)}{1+t^2} \right)$ indicará o comportamento do vetor velocidade, ao longo de toda a trajetória. Na fig. 1-II a trajetória fechada (em cor rosa) indica a convergência.

De imediato, inferimos que $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(t)}{1+t^2} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ e, de modo similar, escrevemos $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\text{sen}(t)}{1+t^2} \right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$. Conclusão, com base no comportamento de convergência da integral $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} < \infty$ inferimos que ambas as integrais anteriores convergem. Na Figura 1, logo em seguida, divisamos a convergência absoluta das integrais indicadas por cada componente $(x(t), y(t))$. Ao lado direito, exibimos o rastro (em cor verde) descrito na Figura 1-II.

Os valores indicados por esses pontos correspondem aos valores assumidos pelo par ordenado $(x(t), y(t))$. A Figura 1, logo abaixo deve estimular a sensação de convergência, na medida em que, em seus extremos (nos laços), o ponto móvel não efetuará uma trajetória circular (em espiral) indefinida, dado que tais integrais convergem absolutamente, como evidenciamos há pouco.

Indicaremos, pois, os seguintes números: $\lambda = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t)dt}{1+t^2}$ e $\mu = \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)dt}{1+t^2}$. Ora, diante da propriedade de simetria, que assinalamos logo no início, podemos inferir que a referida curva parametrizada possui os seguintes pontos limites $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ e $(-\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

Figura 1 – Visualização de curva parametrizada descrita em termos de integrais

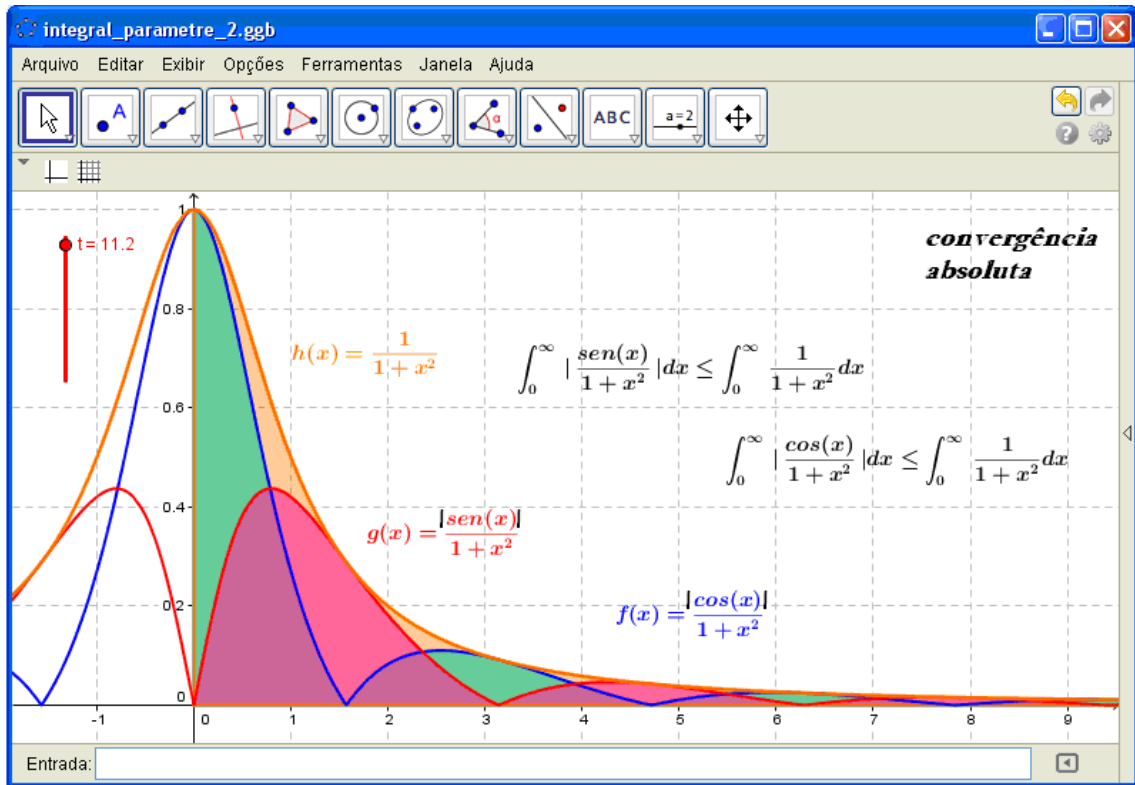


Fonte: Autoria própria

Vale acrescentar que nas desigualdades acima, empregamos a noção de convergência absoluta de integrais. Na Figura 1 (ao lado esquerdo), divisamos que ocorrem regiões abaixo do eixo, acentuando valores numéricos negativos. Por outro lado, quando tomamos seus valores absolutos, todas as regiões tendem a permanecer na parte positiva do eixo das ordenadas, indicando ainda o decrescimento das contribuições de área, de acordo com o que mostramos na Figura 2.

Acentuamos que o comportamento visual indicado na fig. 1-I pode ser relacionado com uma série alternada e, por intermédio do uso do critério de Leibniz para séries de números reais, depreendemos sua convergência. O mesmo padrão será indicado na Figura 8-I. Ademais, toda integral imprópria absolutamente convergente será também convergente (TRENCH, 2012, p. 161). O padrão correspondente visual a tal propriedade é indicado na Figura 2.

Figura 2 – Descrição visual da convergência absoluta com o software Geogebra

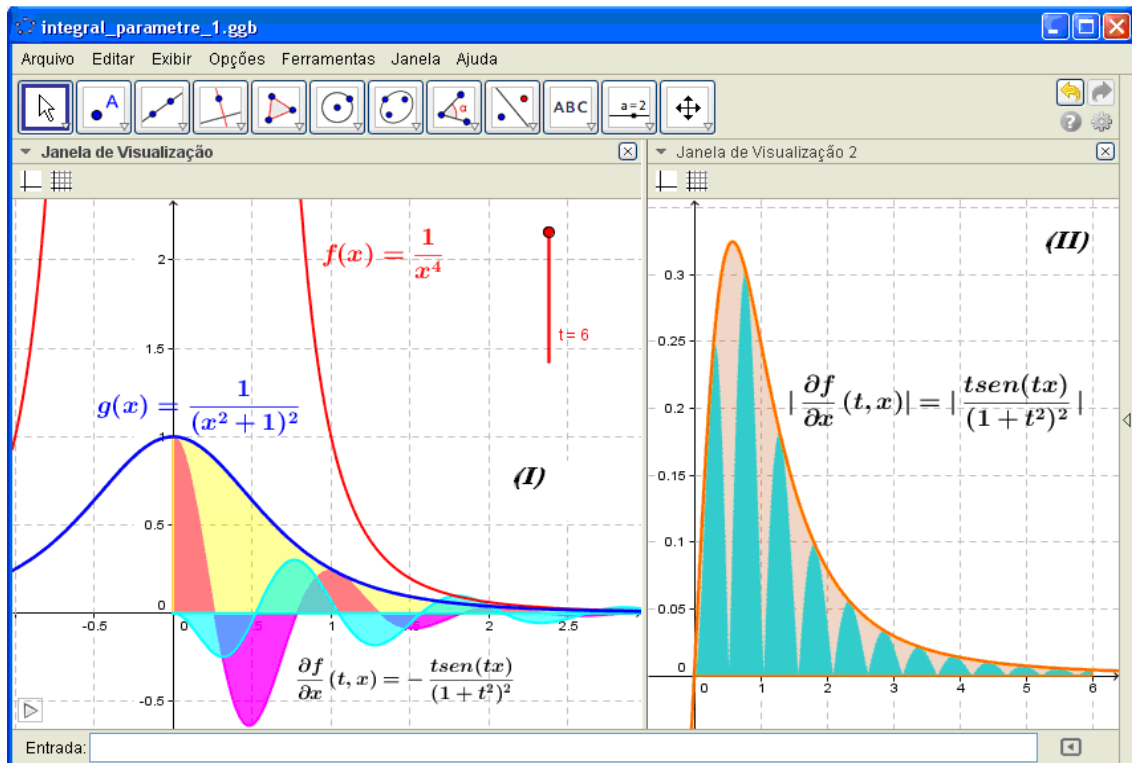


Fonte: Autoria própria

Vamos considerar a seguinte integral $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)dx}{(1+x^2)^2}$. Na primeira fase, buscaremos descrever para que pontos $t \in \mathbb{R}$ teremos a convergência de $F(t)$. Assim, fixando $x \in \mathbb{R}$, sabemos que a função $x \mapsto \frac{\cos(tx)}{(1+x^2)^2}$ é contínua em $[0, +\infty)$. Ademais, podemos escrever ainda que $\left| \frac{\cos(tx)}{(1+x^2)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+x^2)^2}$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, com origem no limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^4}{1/(1+x^2)^2} = 1$, podemos concluir que $\frac{1}{(1+x^2)^2} \square \frac{1}{x^4}$. Deste modo, não registramos nenhuma restrição correspondente ao parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Pelo fato que indica as funções equivalentes (TRENCH, 2012, p. 158) acima, podemos inferir que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} < \infty$ se, e somente se, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4} < \infty$ (possuem a mesma natureza de comportamento). Com origem na Figura 3-I (ao lado direito), divisamos que as contribuições de área tendem a diminuir, na medida em que tomamos valores $x \rightarrow +\infty$. Reparemos que, a

comparação entre as últimas integrais, dado o ponto de descontinuidade de $\frac{1}{x^4}$, indica o uso da seguinte integral $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^4} < \infty$, com $a > 0$.

Figura 3 - Visualização do comportamento de convergência da função integranda e sua derivada parcial



Fonte: Autoria própria

Tendo em vista o teorema de Leibniz, estabelecemos que $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -\frac{t \cdot \text{sen}(tx)}{(1+t^2)^2}$, ainda que $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = -\frac{t^2 \cdot \cos(tx)}{(1+t^2)^2}$. Com o procedimento semelhante ao anterior, podemos concluir:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = \left| \frac{t \cdot \text{sen}(tx)}{(1+t^2)^2} \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)^2} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) \right| = \left| \frac{t^2 \cdot \cos(tx)}{(1+t^2)^2} \right| \leq \frac{t^2}{(1+t^2)^2}, \quad \text{com a condição que}$$

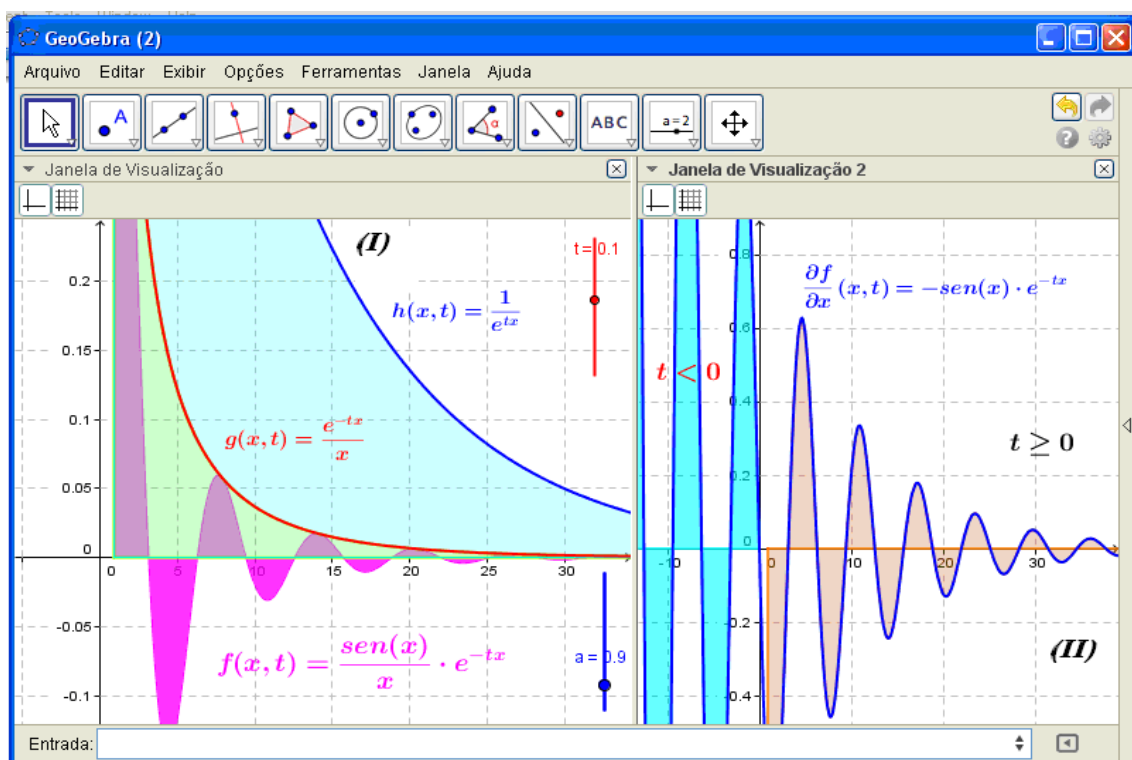
$t \in (0, +\infty)$. Do primeiro caso, podemos comparar as seguintes funções $\frac{t}{(1+t^2)^2} \square \frac{1}{t^3}$.

Ademais, podemos verificar ainda que $\frac{t^2}{(1+t^2)^2} \square \frac{1}{t^2}$. Por fim, prevemos seu comportamento,

diante da convergência das integrais $\int_a^\infty \frac{1}{t^2} dt$ e $\int_a^\infty \frac{1}{t^3} dt$.

Vamos tomar, pois, a seguinte função $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot e^{-tx} dx$, com $t \geq 0$. Observamos que, por meio de um prolongamento analítico, teremos que a função $x \mapsto \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot e^{-tx}$ é contínua em $[0, +\infty)$, fazendo $F(0) = 1$. Para $t > 0$ e $x \rightarrow +\infty$, podemos inferir, com origem na Figura 4-I, que: $\left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot e^{-tx} \right| \square \frac{1}{x} \cdot e^{-tx} \square \frac{1}{e^{tx}} = h(x, t)$.

Figura 4 – Visualização do comportamento de convergência da função integrada e sua derivada parcial de 1ª ordem em relação ao parâmetro ‘t’



Fonte: Autoria própria

Na ultima desigualdade, usamos que $|\text{sen}(x)| \leq |x|$. Por fim, estabelecemos a comparação entre as seguintes integrais: $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot e^{-tx} \right| dx \leq \int_a^{+\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$. Em seguida, diferenciamos sob o símbolo da integral (teorema) obtendo ainda que:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot e^{-tx} dx = - \int_0^{+\infty} \text{sen}(x) \cdot e^{-tx} dx = - \frac{1}{1+t^2} \therefore \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot e^{-tx} dx = C - \text{arctg}(t)$$

Agora, com base na Figura 4-II, ao lado direito, identificamos que $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot e^{-tx} dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Não obstante, desde que $\text{arctg}(t) \rightarrow \frac{\pi}{2} \therefore C = \frac{\pi}{2}$. Ora, por fim,



concluimos que $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot e^{-tx} dx = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(t)$, para todo $t > 0$. Ademais, para $t \rightarrow 0^+$

concluirmos, de modo particular que $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Para concluir, podemos usar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \pi.$$

Vale comentar que, por intermédio do teorema de Mclaurin (HAIRER & WANNER, 2008, p. 259), evidenciamos que a série (alternada) correspondente a esta integral é convergente, não obstante, estes autores não apontam o valor numérico assumido pela mesma.

Consideremos a família de integrais $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Observamos o

seguinte comportamento $\frac{1}{(1+x^3)^n} \square \frac{1}{x^{3n}}$ o que pode ser vislumbrado nas figuras 5-I e 6-I, ao

lado esquerdo. Adquirimos, pois, um entendimento da região em que em se torna exequível a

comparação das seguintes integrais $I_n = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ e $J_n = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}}$ (com $a > 1$). Notamos

ainda, na Figura 5-I, ao lado direito, o par ordenado que indica a monotonicidade relativa aos valores numéricos assumidos pela áreas correspondentes aos números I_n , para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

Ora, com origem nos pontos indicados em cor verde, deprendemos que $0 < \dots < I_{n+1} < I_n < I_{n-1} < \dots < I_1$.

Acentuamos na Figura 5-II que, para valores $1 < a$ conseguimos comparar as integrais I_n e J_n , do ponto de vista visual, na medida em que, descrevemos uma outra sequência de pontos que manifesta o mesmo comportamento de monotonicidade. Neste sentido, indicamos também que: $0 < \dots < J_{n+1} < J_n < J_{n-1} < \dots < J_1$ (ao lado direito da Figura 6-II). Ademais,

observamos que $\frac{\frac{1}{x^{3n}}}{\frac{1}{(1+x^3)^n}} = \frac{1}{x^{3n}} \cdot \frac{(1+x^3)^n}{1} = \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^n \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{n \in \mathbb{N}} 1$. Tal limite garantirá que as duas

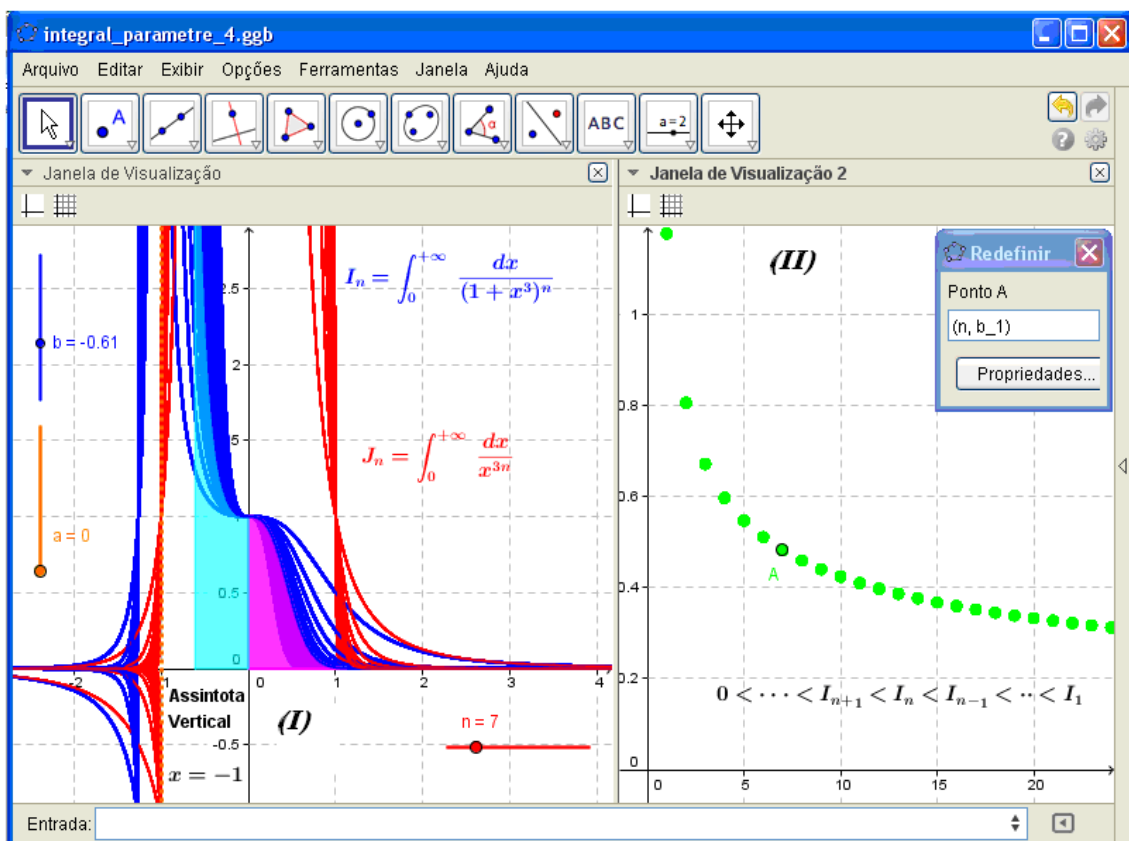
integrais I_n e J_n manifestam um comportamento de mesma natureza (ambas convergem ou ambas divergem), para $n \in \mathbb{N}^*$.

De imediato, podemos concluir que: $J_n = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^{1-3n}}{1-3n} \right] - \frac{a^{1-3n}}{1-3n}$, com

$1 < a$ e cada $n \in \mathbb{N}^*$. Observamos que, nas vizinhanças da reta $x = -1$, vislumbramos um comportamento em que as contribuições de área, para cada membro da família de funções

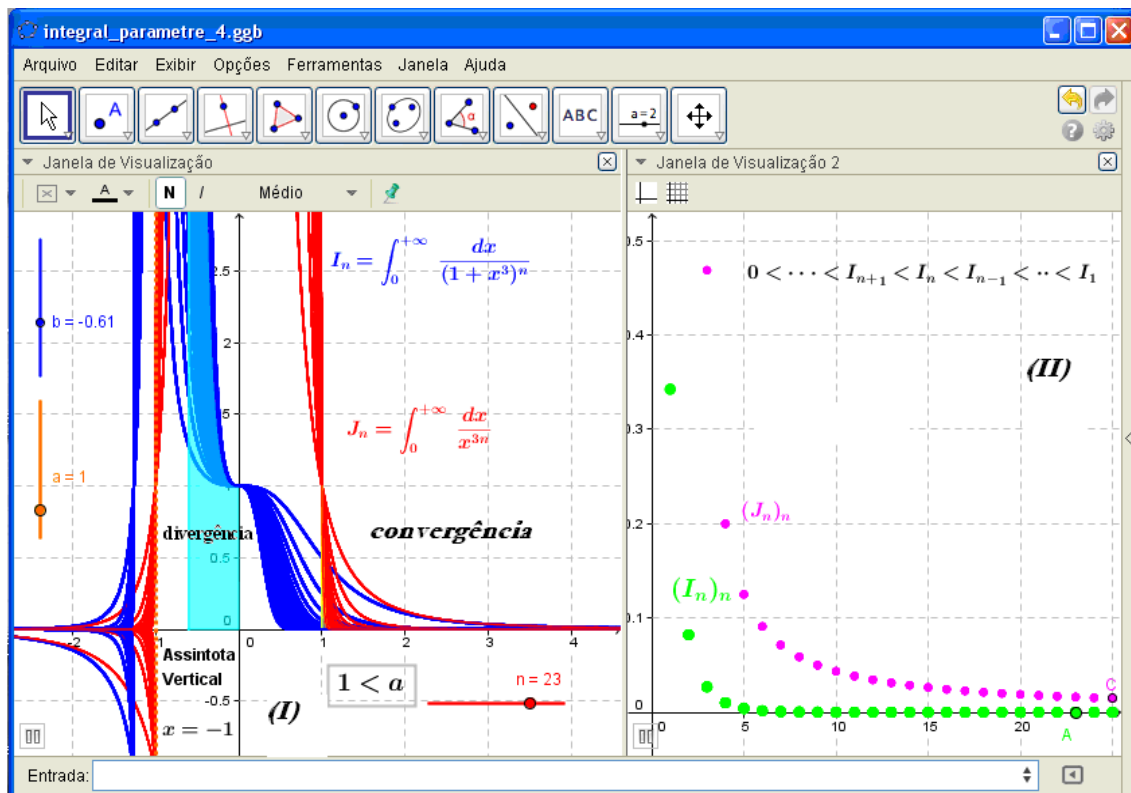
$\frac{1}{(1+x^3)^n}$ tendem a crescer, indicando o comportamento de divergência. Deste modo, nas vizinhanças do ponto $x = -1$ as integrais I_n e J_n divergem. Neste exemplo, visualizamos e descrevemos o comportamento de uma família de integrais impróprias. E, em consonância com determinados métodos analíticos discutidos em Zajta & Goel (1989) e Conrad (1980), podemos inserir ainda um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ e discutir o comportamento correspondente para $I_n(t)$ e $J_n(t)$.

Figura 5 – Descrição visual da região de comparação e convergência/divergência das integrais



Fonte: Autoria própria

Figura 6 – Descrição visual da comparação entre as integrais I_n e J_n



Fonte: Autoria própria

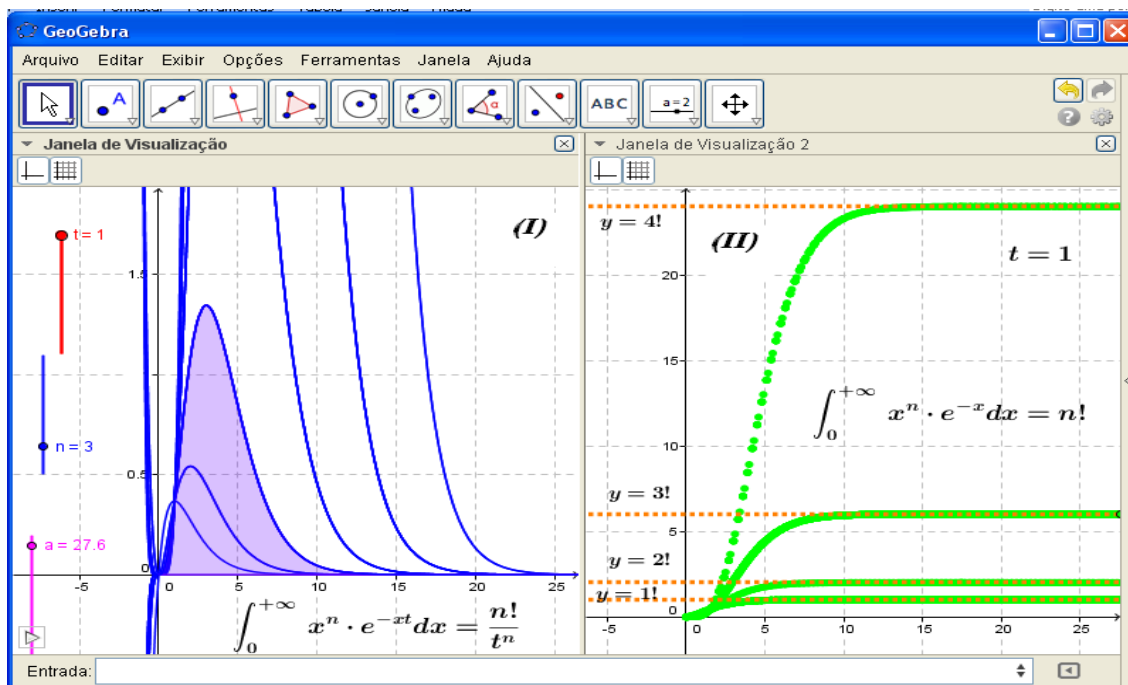
Para concluir, discutiremos a integral de Euler que permite uma sofisticada definição para o símbolo de fatorial. Neste sentido, recordamos que $\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx = n!$. De imediato, podemos obter que $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1!$. Apoiar-nos-emos na argumentação de Zajta & Goel (1989), por meio da introdução de um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ e o cálculo de derivação repetida do seguinte modo: $t > 0$ e $x = t \cdot u \therefore 1 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-tu} du$. Segue, então, que $\int_0^{\infty} e^{-tu} du = \frac{1}{t} (t > 0)$. Daí em diante, empregar-se-á a Regra de Leibniz, diferenciando sob o símbolo da integral. Escrevemos em seguida que:

$$\int_0^{\infty} x e^{-tx} du = \frac{1}{t^2}; \int_0^{\infty} x^2 e^{-tx} du = \frac{2}{t^3}; \int_0^{\infty} x^3 e^{-tx} du = \frac{6}{t^4}; \int_0^{\infty} x^4 e^{-tx} du = \frac{24}{t^5}; \int_0^{\infty} x^5 e^{-tx} du = \frac{120}{t^6}; \dots$$

O padrão correspondente às expressões acima nos permitem conjecturar que $\int_0^{\infty} x^n e^{-tx} du = \frac{n!}{t^{n+1}}$. Por fim, assumindo de modo particular $t=1 \leftrightarrow x=1 \cdot u \therefore \int_0^{\infty} x^n e^{-x} du = n!$. Com origem na Figura 7-II, indicamos ao lado direito, a existência de retas horizontais, que assumem os valores indicados por $y_n = n!$, com $n \geq 1$. Na

Figura 7-I, observamos a evolução das contribuições de área correspondentes à integral de Euler que aponta os valores que descrevem a convergência desta integral.

Figura 7 – Descrição visual das assíntotas horizontais que indicam o valor numérico da integral de Euler com recurso ao software Geogebra

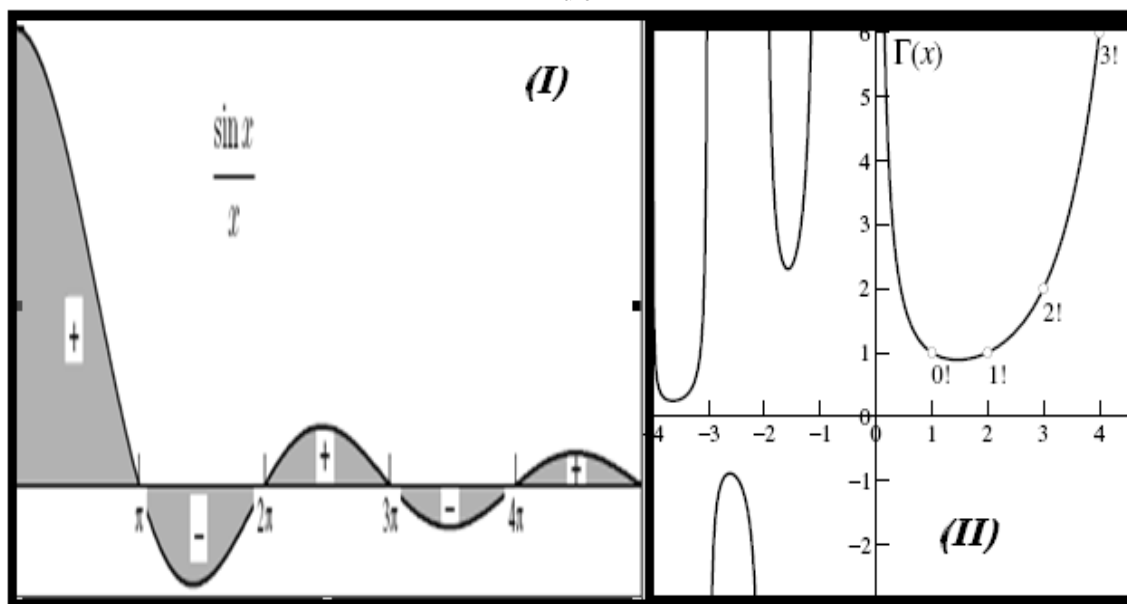


Fonte: Autoria própria

Hairer & Wanner (2008, p. 261) explicam que ao longo de sua vida, Euler se interessou pela interpolação de fatoriais. A descrição exibida na Figura 7, proporcionada pelo *software* Geogebra permite uma exploração dinâmica e entendimento de suas propriedades no plano. Hairer & Wanner (2008, p. 258) indicam ainda outros exemplos interessantes de integrais generalizadas, como a integral de Dirichlet (fig. 8-I), que pode ser determinada, segundo sua convergência. Não obstante, os critérios empregados por esses autores permitem concluir sua convergência, mas não indicar seu valor numérico.

Na Figura 8, registramos o esforço dos autores no sentido de transmitir uma interpretação heurística para o leitor, embora estática, do comportamento de convergência/divergência de integrais generalizadas, sob o uso de certos critérios formais de verificação. Com o *software*, adquirimos um viés de dinamicidade e possibilidades de inspeção/verificação de propriedades gráfico-visuais (ALVES, 2014a; 2014b).

Figura 8 – Hairer & Wanner (2008, p. 262) comentam o comportamento da integral de Dirichlet e da integral de Euler



Fonte: Autoria própria

Para concluir esta seção, sublinhamos o exemplo apontado por Tiles (1991, p. 36) quando indica $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (4x - 4x^2)dx = \frac{2}{3}$. A autora menciona que “o valor $\frac{2}{3}$ não depende apenas de um único valor de $(4x - 4x^2)$, todavia, todos os infinitos valores que assumem argumentos entre $0 \leq t \leq 1$.” Por outro lado, advertimos que, no caso da classe de funções estudadas aqui, do tipo $f(x,t)$, podemos discernir propriedades conceituais de dependência entre variáveis que exigem um grau de maturidade elevado (ZAJTA & GOEL, 1989, p. 318), no que concerne ao contexto de ensino/aprendizagem.

3 Considerações finais

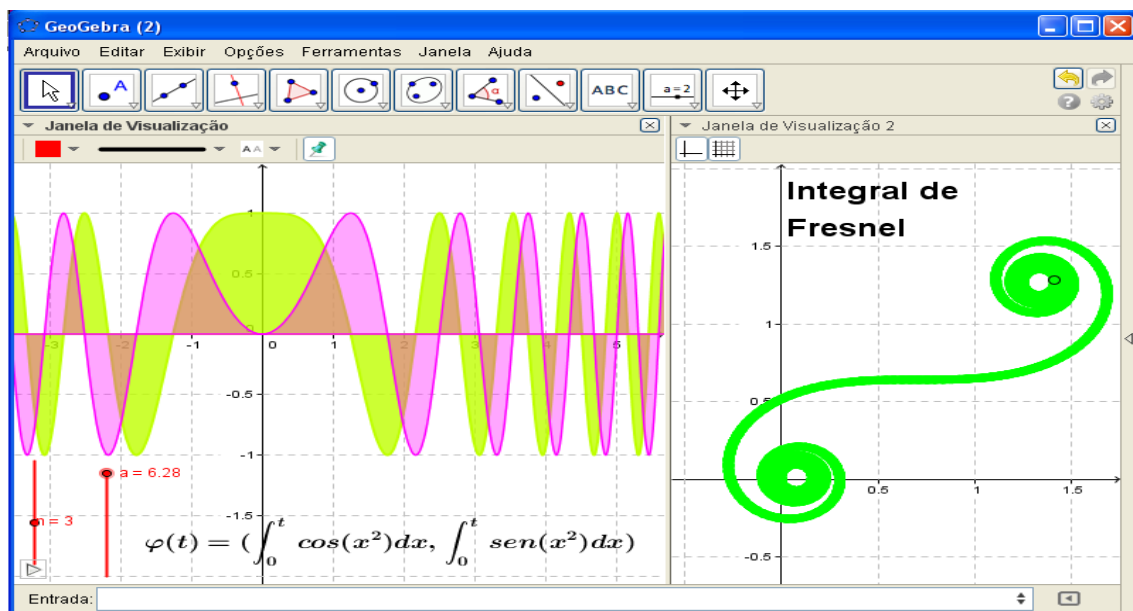
Nos compêndios especializados de Análise (LIMA, 2009; TRENCH, 2012), registramos uma abordagem para o objeto integral generalizada dependente de um parâmetro, que enfatiza o caráter analítico e o uso de regras formais que asseguram o trato consistente com o mesmo. Por outro lado, assinalamos que “um conceito é algo que é aplicado a determinado objeto e que permite produzir um valor de verdade” (TYLES, 1991, p. 35).

Nesta perspectiva, indicamos e discutimos determinadas potencialidades do *software Geogebra*, no sentido de enfatizar certos caracteres perceptuais, visuais e qualitativos, atinentes ao conceito matemático em foco. Ora, tais elementos detêm grande potencial para o entendimento e motivação para os estudantes, sobretudo, no contexto do ensino do Cálculo (ÁVILA, 1986; 2002).

Ao longo do texto, discutimos o comportamento gráfico-geométrico atinentes a determinadas integrais distinguidas (ver fig. 7 e 9) e comentadas por autores de livros em História da Matemática (BOURBAKI, 1994; EVES, 1969; HAIRER & WANNER, 2008). Nesses casos como em outros, mostramos que a classe de integrais impróprias dependentes de um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ detém certas propriedades que se tornam acessíveis aos sentidos, por meio do uso deste *software* (ALVES, 2013b, 2013c).

Por fim, concordamos com Tiles (1991, p. 36) quando acentua que “o poder funcional das notações reside em sua habilidade de produzir representações das relações entre proposições particulares e gerais.”. Com este pressuposto, podemos proporcionar ao aprendiz, com origem no que preceitua a regra geral do teorema de Leibniz, a produção de sentenças proposicionais particulares, oriundas visualização.

Figura 9 – Hairer & Wanner (2008, p. 127-128) comentam discutem a integral de Fresnel



Fonte: Autoria própria

VISUALIZATION OF IMPROPER INTEGRALS ON A PARAMETER BY THE USE OF GEOGEBRA SOFTWARE

Abstract: The notion of generalized integral is an element of the required study in the Analysis's context. In this paper, we discuss a particular class of generalized integrals of the functions $f(x, t)$, which are characterized by dependence on a parameter. Among some of the criteria that we will use with the primary objective to describe the behavior of some of these integrals, we highlight the passage of derivation under the integral sign. Also will emphasize the visualization of properties made possible by the use of Geogebra software. With it, we will show the graphical point of view, geometric, conceptual dependency relationships and



behavior (convergence / divergence) integrals of the type $\int_a^\infty f(x,t)dx$. Finally, the use of certain qualitative properties of this object, we will indicate routes of transmission of this knowledge, with a view to understanding the concept in the teaching context.

Keywords: Generalized integrals, Visualization, Software Geogebra.

Referências

ALVES, Francisco. R. V.. Computational Technique for Teaching Mathematics - CT^2M : the quadratic form's case. In: **Geogebra International of Romania**. v. 3, n.2, 2014a. p. 21-30. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/>

ALVES, Francisco. R. V.. Infinite products and infinite sums: visualizing with the Dynamic System Geogebra. In: **Geogebra International of Romania**. v. 3, n. 2, 2014b. p. 31-45. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/>

ALVES, Francisco. R. V.. Visualizing in Polar Coordinates with Geogebra. In: **Geogebra International of Romania**. v. 3, n. 1, 2013a. p. 21-30. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/>

ALVES, Francisco. R. V.. Exploring L'Hospital Rule with the Geogebra. In: **Geogebra International of Romania**. v. 3, n. 1, 2013b. p. 15-20. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/>

ALVES, Francisco, R. V. & Lopes, Marco. A.. Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software Geogebra, In: **Revista do Geogebra Internacional de São Paulo**, v. 2, n. 2, 2013. p. 5-21. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/12524/12200>

ALVES, Francisco, R. V.. A noção de integral generalizada: sua exploração apoiada na tecnologia e no contexto histórico. In: **Anais do VI HTEM**, 2013c. pp. 1-19. Disponível em: <http://htem2013.dm.ufscar.br/>

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo e da Análise. In: **Matemática Universitária**, n. 33, 2002. p. 83-94. Disponível em: http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n33/n33_Artigo05.pdf

ÁVILA, Geraldo. O cálculo das integrais de Fresnel. In: **Matemática Universitária**, n. 5, 1987. p. 77-81. Disponível em: http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n05/n05_Notas_de_Ensino.pdf

Bourbaki, N.. **Eléments des Histoire des Mathématiques**. New York: Springer, 1994.

CONRAD, Keith. Differentiating under the sign of the Integral. In: *Mathematical Gazette*, 1980. Disponível em: <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/diffunderint.pdf>

HAIRER, E. & WANNER, G.. **Analysis by its History**. New York: Springer, 2008.



EVES, H.. **An introduction to History of Mathematica**. Third edition, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

LIMA, Elon, L.. **Curso de Análise**, v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

PILIPOVIC, Stevan; TAKACI, Djudicca (2011). On the delta distribution: historical remarks, visualization of delta sequences. In: **Teaching Mathematics and Statistics Science**. p. 1-16.
Trench, William, F.. **Functions defined by improper integrals**. San Antonio: University Press, 2012.

TYLES, Mary. **Mathematics and the Image of Reason**. London: Routledge London and ew York, 1991.

VIDIANE, L. G.. Limites et équivalents de fonction définies par des intégrales dépendent de paramètres. In : **Revue des Mathématiques Speciales**, 1986. p. 967-982.

ZAJTA, Aurel. J. & Goel, Sudhir, K.. Parametric integration techniques. In : **Mathematical Magazine**. v. 62, n° 5, 1989. Disponível em :
<http://www.maa.org/sites/default/files/268948443847.pdf>