#tear
Revista de Educação, Ciência e Tecnologia

ENSINO DO CÁLCULO: UMA PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO NA PERSPECTIVA DO USO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Francisco Regis Vieira Alves*

Resumo: Esta é uma comunicação científica que põe em evidência a importância da exploração didática dos registros de representação semiótica no ensino do Cálculo Diferencial em uma Variável Real. Assim, referenciando-se nos trabalhos de Duval (1991, 1995a, 1995b), desenvolvem-se e discutem-se situações-problema de Cálculo. E, com suporte em noções concebidas pelo mencionado autor (formação, tratamento, conversão, apreensão perceptual), em adição ao emprego do uso do software Geogebra, pretende-se evidenciar a complexidade das operações cognitivas envolvidas nestas situações e suas aplicações. Por fim, indicam-se elementos que podem nortear futuras investigações, direcionadas para o entendimento da aplicação desta teoria no contexto de ensino do Cálculo a Várias Variáveis, que envolve registros em 2D e 3D.

Palavras-chave: Registros de representação. Cálculo. Ensino.

1 Introdução

Há décadas, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral em uma Variável Real é alvo da atenção de inúmeros estudiosos, tanto no Brasil bem como no Exterior. Tamanho interesse evidenciado em estudos desenvolvidos com este objeto de investigação, diz respeito à constatação relativa ao baixo rendimento, frágil evolução da aprendizagem e as dificuldades inerentes à transição do contexto escolar para o âmbito acadêmico.

Embora evidenciando décadas de esforço com vistas a desenvolver opções diferenciadas e a proposição de teorizações que proporcionem a superação deste quadro complexo, é preocupante o fato de que, nos dias atuais ainda se registre a cristalização, em sala de aula, de práticas indefectíveis e rituais de ensino de Matemática, ancoradas em perspectivas reducionistas atinentes ao conhecimento matemático.

Por exemplo, consideramos uma perspectiva reducionista acreditar que o raciocínio *lógico hipotético-dedutivo*, quando priorizado, resulta de modo irremediável em uma aprendizagem satisfatória. Ou ainda, desconsiderar os entraves intrínsecos às notações, fórmulas, gráficos, provas, demonstrações, simbologias matemáticas e as atividades cognitivas exigidas dos estudantes para seu entendimento. Tal perspectiva ou

* Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Mestre em Matemática e Doutor em Educação com ênfase no ensino superior pela Universidade Federal do Ceará

visão redutiva condiciona/determina a mediação, isto é, a *práxis* do professor.

Destarte, o ensino de Cálculo e de outras disciplinas, no *locus* acadêmico, preserva seu lado formal e estruturado por rotinas algorítmicas, de caráter estrutural, que dificultam a exploração de outras habilidades intelectivas necessárias para a aquisição progressiva do conhecimento. De outra parte, é oportuno observar que conhecimentos matemáticos envelhecem e podem, até mesmo, entrar em desuso. De modo semelhante, sucede com práticas de ensino, metodologias e determinadas abordagens que exigem modificações e aperfeiçoamento tendo em vista o ensino.

É justamente neste âmbito, porém, que o ensino de Matemática, apoiado em recursos tecnológicos, adquire destaque com escopo precípuo a evitar ou, pelo menos, suavizar esses anacronismos e obsolescências didáticas. O emprego, por si só, da tecnologia não garante, entretanto, um êxito garantido na missão do professor. Deste modo, na próxima seção, levando-se em conte estas questões, discutiremos a perspectiva diferenciada introduzida por Duval na aera de estudo que chamamos de Educação Matemática. Sua relevância para este contexto de discussão é justificada com arrimo na constatação da peculiaridade de a aprendizagem em Matemática solicitar atividades cognitivas complexas e emprego de sistemas de representação semiótica diversificados. Com arrimo em seu ponto de vista, indicaremos elementos distinguidos, no sentido da promoção de práticas de ensino do Cálculo diferenciadas.

2 Implicações da teoria das representações semióticas

A ideia de *representação* e o entendimento do seu papel para a aquisição do conhecimento são explorados sob diferentes enfoques, com origem na abordagem de certos autores. De tal maneira, podemos exprimir, os autores que desenvolvem uma análise pormenorizada dos fenômenos relacionados à aprendizagem em Matemática são concordes no argumento segundo o qual uma *representação* nos auxilia na evocação de objetos ausentes ao nosso campo perceptivo, mas que, residem, todavia, em nossa memória.

Note-se que, na atividade matemática, deparamos constantemente situações-problema que envolvem conceitos e *representações* variadas, sobretudo quando nos reportamos ao contexto do *Cálculo Diferencial* e *Integral*. Neste âmbito, adquire relevância destacada os trabalhos de Duval (1991, 1995a, 1995b) ao enfocar com

---

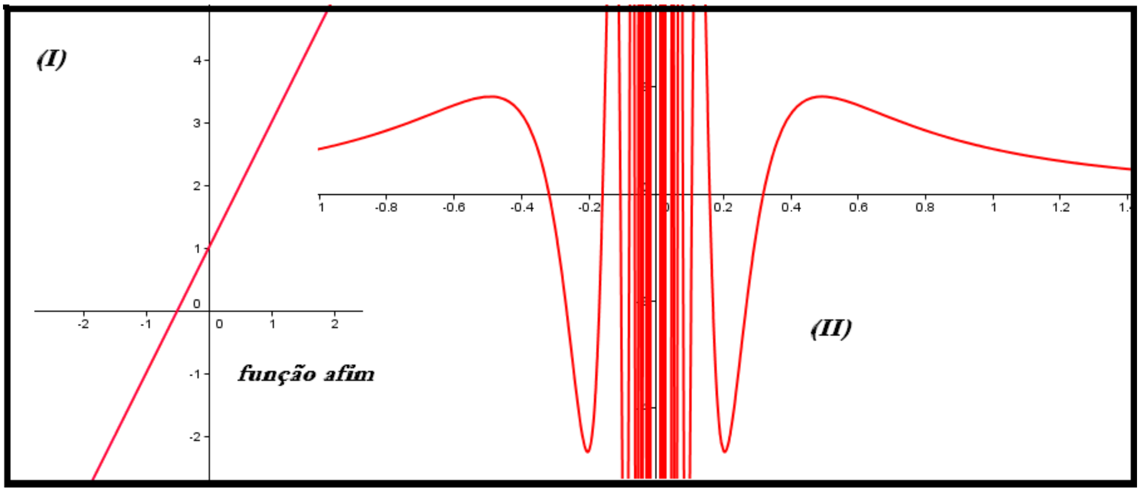
(UFC). Professor do Mestrado Profissional (UCF) e coordenador do PET/MATEMÁTICA do IFCE.

interesse específico e particular nos problemas de aprendizagem.

Duval (1995a, p.28) refere-se *aos registros de representação semiótica* relacionados a um sistema particular de signos. O autor sublinha a ideia de *formação* de uma *representação* em um registro semiótico particular, que pode servir para exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real.

Quando se menciona o ensino do Cálculo, esta noção é explorada em atividades cognitivas semelhantes ao que exibimos na figura 1. Com efeito, quando observamos a representação gráfica da figura 1-I (lado esquerdo), apoiando-nos em conhecimentos apreendidos no contexto escolar, escrevemos o *registro algébrico* ou *registro simbólico* designado por $y = 2x + 1$(figura 1-I) e que, em termos da língua natural, diz respeito a uma reta, não paralela ao eixo Ox, cortando o eixo Oy no ponto 1.

Figura 1 – Formação de registros de representação gráfica em 2D, com o auxílio computacional



Fonte: Autoria própria.

De modo diverso, ao analisarmos a figura 1-II (lado direito), buscando realizar a atividade cognitiva semelhante com vistas a escolher no conjunto de características que este gráfico apresenta, e as quais tencionamos representar ou as mais proeminentes, deparamos um grau de embaraço maior quando comparado ao primeiro da *função afim*.

No ensino de Cálculo, o *registro algébrico* relacionado com o *registro gráfico* que exibimos na figura 1-II é designado por $f(x) = \frac{1}{x} \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Atente-se para o fato de que, nesta situação, desenvolvemos uma atividade cognitiva, envolvendo uma transformação que produz como resultado final, outro registro diferente do registro inicial. Duval (1995a) chama esta atividade de *conversão* e acentua que “a produção de uma resposta, como de um texto ou de um esquema, mobiliza simultaneamente a formação de representações semióticas e seu tratamento.” (p. 36).

Ante a resolução de problemas, a elaboração de uma *figura* (DUVAL, 1995b, p. 142) pode apoiar a evolução de um raciocínio heurístico, tácito e inicial do estudante e também desempenhar um papel decisivo para seu entendimento; com procedência, entretanto, em *registros* descritos por $g(x) = 2x+1, h(x) = x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ ou ainda $f(x) = \frac{1}{x} \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (como na figura 1) o estudante tem mais chances de êxito no sentido de elaborar uma *figura* no ambiente lápis e papel, que se assemelha ao comportamento dos gráficos das funções da figura 1 obtidos por intermédio do *Geogebra*? Tais registros fornecidos pelo computador promovem a evolução de *imagens mentais* adequadas?

Duval (1995b, p. 142) suscita um questionamento essencial, ao declarar que “uma figura pode ser uma representação, mas nem toda representação é uma figura.”. De fato, podemos considerar os seguintes *registros algébricos* $\lim_{x\to 0}(2x+1)$ ou, $\lim_{x\to 0} x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ ainda, nos reportar a *figuras* associadas a estes *registros*. Quando indicamos, todavia, os registros $"\lim"$, $"\lim_{x\to 0}"$ ou $"\ _{x\to 0}"$, não é possível elaborar uma *figura* associada a cada um deles.

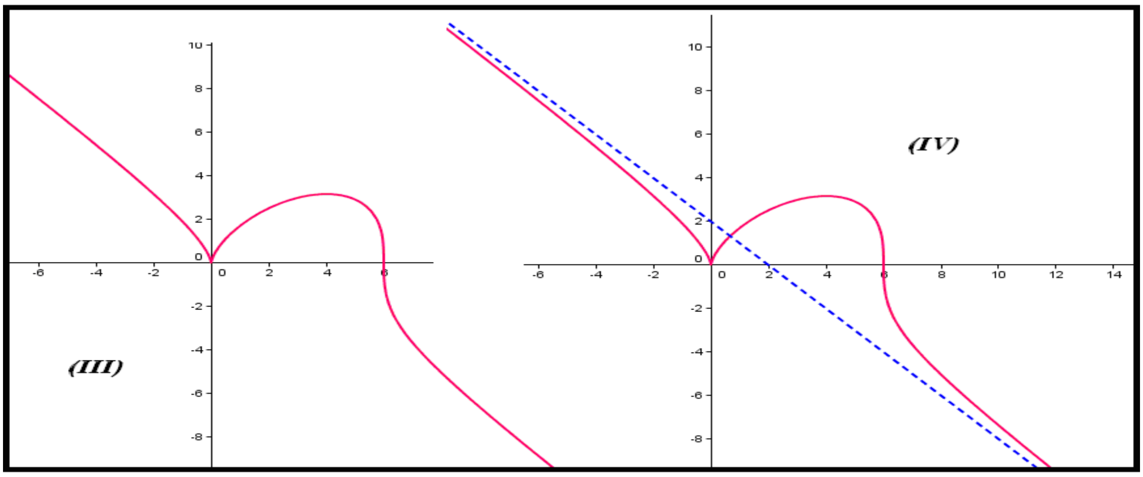
Com a intenção de analisar o trabalho heurístico figural, Duval (1995b, p. 143) considera uma *figura* como uma “apreensão” cognitiva, acentuando a diversidade de maneiras de se observar uma *figura* ou um estímulo visual. De tal maneira, o autor distingue quatro apreensões cognitivas *perceptual*, *discursiva*, *sequencial* e *operativa*.

Ao se discorrer sobre a *apreensão perceptual*, é importante lembrar o fato de que aquilo que é percebido numa *figura* diz respeito às suas leis de organização figural. Este processo, segundo o autor, nem sempre é consciente. A imagem retinal pode se alterar, na medida em que analisamos uma figura. Nesta etapa, ocorre a mais imediata das apreensões cognitivas, a qual possui uma profunda dependência da visualização e, portanto, depende da acuidade visual do observador.

No caso da *apreensão discursiva*, é por meio desta que uma *figura* é vista em relação a uma denominação, uma legenda ou uma hipótese que apresentam algumas de suas propriedades. De fato, um desenho sem uma denominação ou hipótese *é uma representação ambígua* (DUVAL, 1995b, p. 144). E, no caso da *apreensão sequencial*, nosso interesse é pela ordem de construção de uma *figura* dependente das propriedades matemáticas e dos instrumentos empregados.

Por fim, existe a *apreensão operativa*, que pode proporcionar a obtenção de um *insight* para determinada solução quando observamos uma *figura*. No contexto do ensino da *Geometria Plana*, Duval (1995b, p. 145) indica que esta forma de "apreensão" depende dos modos pelos quais modificamos uma dada *figura*, a saber: as maneiras mediante as quais é possível dividir a *figura* e combiná-las em subfiguras; o modo de mudança de orientação ou sua posição no plano ou no espaço. Por exemplo, no contexto do Cálculo, quando considerado o *registro algébrico* $h(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$, não se logra com facilidade associar uma *figura* correspondente (conversão) para este registro particular. Por outro lado, seu *registro gráfico* pode ser construído em etapas pelo *software Geogebra* (instrumento).

Figura 2 – Registro gráfico da assíntota obliqua ao gráfico de $h(x)$ obtido no Geogebra



Fonte: Autoria própria.

3 Exemplos de situações-problema no ensino do Cálculo com apoio computacional

O ensino de *Cálculo Diferencial* e *Integral* apoiado em instrumentos computacionais evidencia e proporciona melhor visibilidade aos fenômenos cognitivos envolvidos em situações-problema (ALVES, 2012c). Ademais, a perspectiva de Duval

(1991; 1995a; 1995b) pode proporcionar a identificação de interpretações e pontos de vista alvissareiros, visando à promoção de seu ensino/aprendizagem.

Destacamos o seguinte exemplo de tarefa: *avaliar o seguinte limite* $Lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x\right]$. Note-se que este *registro algébrico* é *formado* com base na atividade solucionadora, com a intenção de identificar a "existência" de *retas assíntotas* ao gráfico da função $h(x)=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$. Neste primeiro exemplo, entretanto, destacamos o seguinte *tratamento* de *registros algébricos* exigidos para a avaliação do limite.

$$\left[\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x\right]==\frac{6x^2}{(\sqrt[3]{(6-x)^2\cdot x^4}-x\cdot\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2)}=\frac{6x^2}{(x\cdot\sqrt[3]{(6-x)^2\cdot x}-x\cdot\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2)}=$$

$$=\frac{6x}{(1\cdot\sqrt[3]{(36-12x+x^2)\cdot x}-1\cdot\sqrt[3]{x^3(\frac{6}{x}-1)}+x)}=\frac{6x}{(1\cdot\sqrt[3]{(36x-12x^2+x^3)}-x\cdot\sqrt[3]{(\frac{6}{x}-1)}+x)}=$$

$$=\frac{6x}{(1\cdot\sqrt[3]{x^3\cdot(\frac{36}{x^2}-\frac{12}{x}+1)}-x\cdot\sqrt[3]{(\frac{6}{x}-1)}+x)}=\frac{6x}{(x\cdot\sqrt[3]{1\cdot(\frac{36}{x^2}-\frac{12}{x}+1)}-x\cdot\sqrt[3]{(\frac{6}{x}-1)}+x)}=$$

$$=\frac{x}{x}\cdot\frac{6}{(1\cdot\sqrt[3]{1\cdot(\frac{36}{x^2}-\frac{12}{x}+1)}-1\cdot\sqrt[3]{(\frac{6}{x}-1)}+1)}\underset{\substack{cancelando\\ 'x'}}{=}\frac{6}{(1\cdot\sqrt[3]{1\cdot(\frac{36}{x^2}-\frac{12}{x}+1)}-1\cdot\sqrt[3]{(\frac{6}{x}-1)}+1)}$$

É comum no ensino do Cálculo o emprego de "argumentos", "artifícios", fórmulas ou identidades algébricas para a resolução de determinadas classes de limites. Neste caso, só depois do fastidioso *tratamento* dos *registros algébricos*, o aluno poderá avaliar que

$$Lim_{x\to+\infty}\frac{6}{(1\cdot\sqrt[3]{1\cdot(\frac{36}{x^2}-\frac{12}{x}+1)}-1\cdot\sqrt[3]{(\frac{6}{x}-1)}+1)}=\frac{6}{(1\cdot\sqrt[3]{1\cdot(0-0+1)}-1\cdot\sqrt[3]{(0-1)}+1)}=2.$$

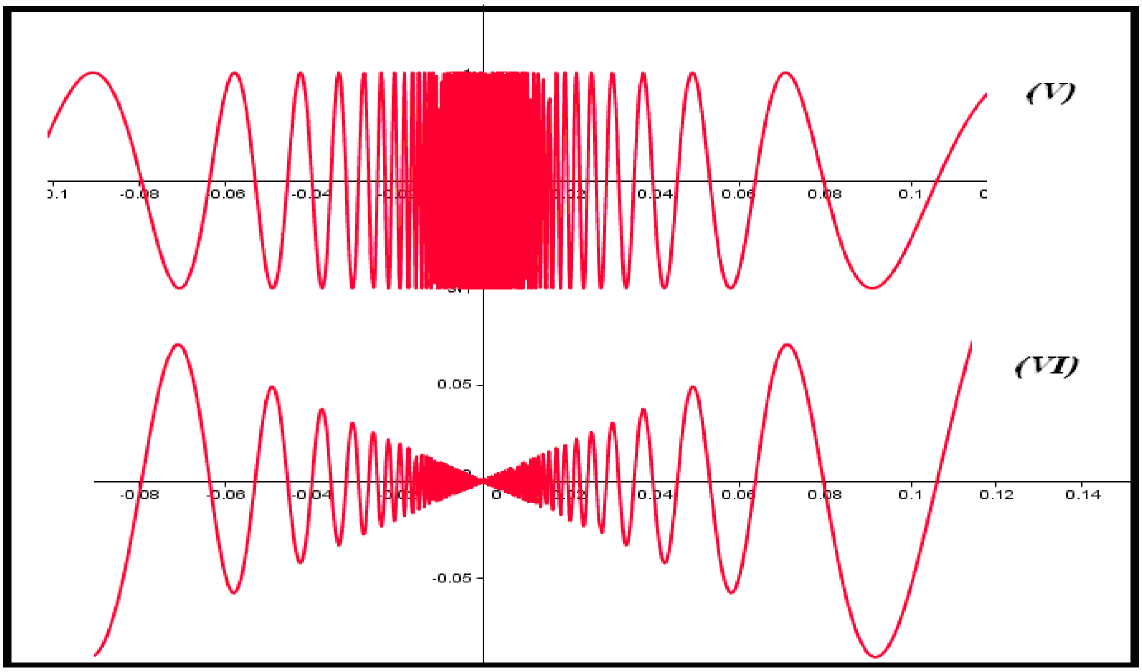
De outra parte, com suporte no que discutimos na seção passada, neste tipo de tarefa, não é proporcionada ao solucionador do problema a possibilidade de "*apreensão cognitiva*"; tampouco nenhum elemento que viabilize a antecipação ou elaboração de alguma conjectura ou *insight* relacionado à sua existência.

Note-se que mencionamos, *en passant*, a verificação da "existência" de alguma reta *assíntota* ao gráfico da função $h(x)$. Por meio do estímulo da *apreensão perceptual*, podemos instigar o estudante na produção de conjecturas e sentenças proposicionais relacionadas com o gráfico da figura 2-III (lado esquerdo). Esta situação didática, quando apoiada em uma boa mediação metodológica, poderá evoluir para uma *apreensão discursiva* da mesma situação-problema.

Observamos ainda que o *registro gráfico* da figura 2-IV (lado direito) funciona como uma fonte razoável na promoção de um *insight* adequado para este problema, quando o aluno, apoiado na *apreensão operativa*, declara uma resposta afirmativa, ou seja, “existe” uma *reta assíntota oblíqua*, e que, com apoio na *percepção* de propriedades intrínsecas do gráfico, não pode ser horizontal nem vertical.

No tipo de situação-problema em que exploramos a *formação*, o *tratamento* e a *conversão* de registros, deparamos possibilidades concretas de promover, de modo didático, a aquisição do *valor epistêmico* (DUVAL, 1991) de proposições elaboradas com procedência na *apreensão perceptual* de um *registro gráfico* ou *figura*. Sendo assim, sugerimos a possibilidade desenvolvermos uma *apreensão relacional* dos *registros gráficos* exibidos na figura 3.

Figura 3 – Percepção relacional estabelecida entre dois registros gráficos



Fonte: Autoria própria.

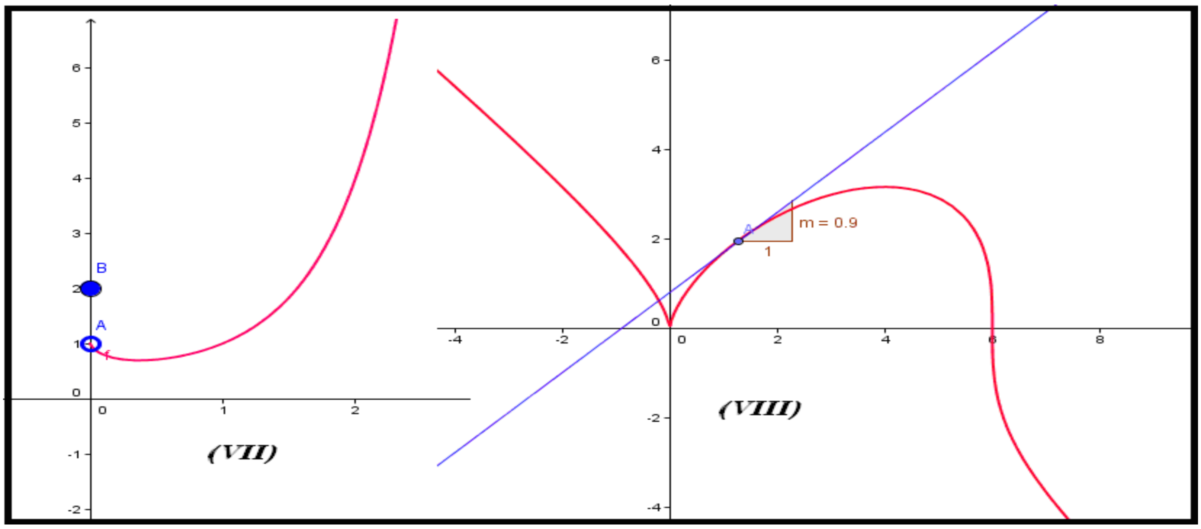
Neste exemplo, torna-se menos tortuoso extrair e compreender alguma propriedade acima com suporte na “visualização” dos dois *registros* de modo concomitante do que executar a mesma tarefa com os dois gráficos isolados. Há de ser destacada a potencialidade dinâmica e flexível para a geração de gráficos de funções complexas do tipo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$, x^x pelo *Geogebra*.

Na figura 3, por meio de uma exploração didática adequada, pode-se estimular a *apreensão sequencial* dos registros gráficos ora focalizados. Apontamos ainda a possibilidade do entendimento de "propriedades topológicas", que podem ser divisadas quando comparamos os dois registros gráficos.

De fato, de modo intuitivo, o aluno poderá compreender que, em ambos os casos, ocorre aumento gradativo da concentração (ou incidência) dos gráficos das funções $sen\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$, pois $x = 0$ é um *ponto de acumulação*. Ademais, o professor pode influenciar na aquisição de uma certeza ou, pelo menos, uma crença vinculada ao caráter limitado da imagem destas funções em ambos os gráficos. Tal atitude conduz à evidência não apenas o *valor lógico* (DUVAL, 1991) das operações e as *inferências lógicas* (regras de tratamento) necessárias para a resolução destes e de outros limites.

No ensino de Cálculo, não é possível deixar de lado as dificuldades que os estudantes enfrentam quando deparam a necessidade de demonstrar ou fornecer contra exemplos para situações-problema. Num curso inicial de Cálculo (no primeiro ano de estudos acadêmicos); com efeito, o estudante ainda não dispõe de uma instrumentação poderosa que lhe permita desenvolver o *tratamento* do *registro algébrico* x^x e, assim, investigar formalmente o comportamento dos *limites laterais* da função $p(x) = x^x$, digamos, na origem, inclusive as condições de descontinuidade na origem e continuidade fora da origem, como exibimos na Figura 4-VII (lado esquerdo).

Figura 4 – Registros gráficos possibilitam a compreensão das propriedades topológicas.

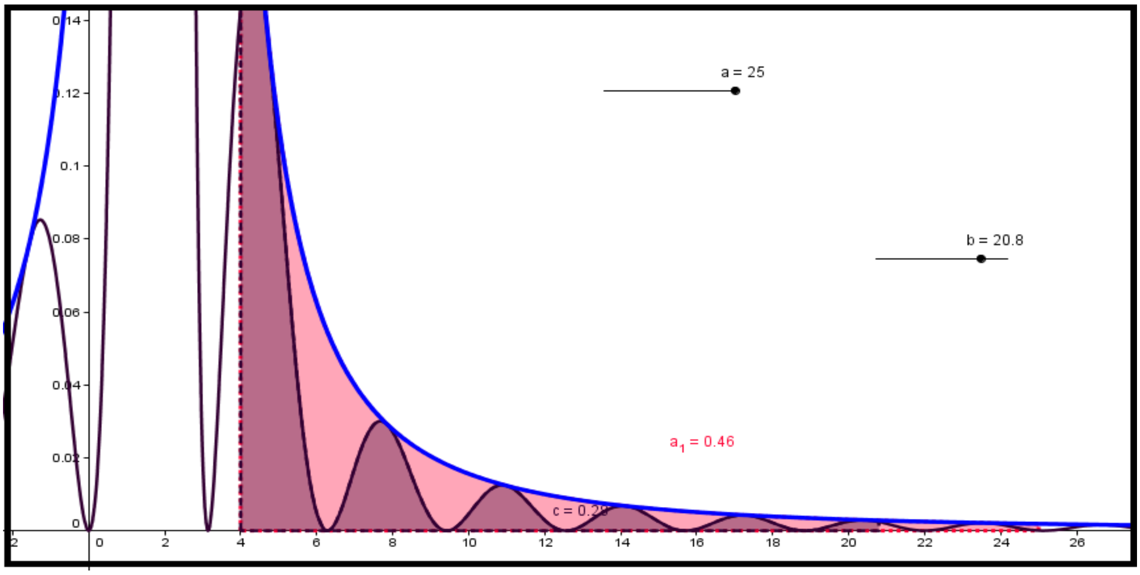


Fonte: Autoria própria.

Observamos que, com base numa atividade cognitiva específica, podemos relacionar os *registros algébricos* $p(x) = x^x$ e $q(x) = x^{2/3} \cdot (6-x)^{1/3}$ com os *registros gráficos* (figura 4) que obtivemos graças ao programa *Geogebra*. Sublinhamos a noção de que no gráfico da figura 1-I, realizamos a *conversão* de registros ao buscar verificar o comportamento dos limites $\lim_{x\to 0^+} 2x+1$ ou $\lim_{x\to 0^-} 2x+1$. Por outro lado, é possível, com base somente no gráfico exibido na figura 4-VIII, e sem efetuar algum *tratamento* dos registros, inspecionar os comportamento dos *limites laterais* $\lim_{x\to 0^-} q'(x)$ ou $\lim_{x\to 0^+} q'(x)$, embora o grau da dificuldade seja maior neste caso.

Nosso último exemplo se encontra no contexto do ensino da noção de *integral imprópria*. Neste sentido, sublinhamos a situação discutida em Alves (2012c). Neste sentido, o autor exibe (na figura 4). Neste caso, o autor compara as integrais impróprias $\int_5^\infty \frac{\cos^2(x)}{x^3}dx$ e $\int_5^\infty \frac{1}{x^3}dx$. Reparemos que conseguimos visualizar, no sentido algébrico e, sobretudo, geométrico, a seguinte desigualdade $\frac{\cos^2(x)}{x^3} \le \frac{1}{x^3}$. De fato, na figura 5, extraímos tal propriedade. A *apreensão relacional* possibilita extraímos conjecturas com origem em registros algébricos e gráficos. Neste caso, a partir do comportamento de convergência dos valores numéricos fornecidos pelo software Geogebra, depreendemos a convergência da integral imprópria $\int_5^\infty \frac{\cos^2(x)}{x^3}dx$.

Figura 5- Comportamento geométrico de integrais impróprias e a noção de convergência



Fonte: Autoria própria.

Para concluir, vale observar que o rol de aplicações do *Geogebra* no ensino do Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real - CUV é amplo e diversificado (ALVESa, ALVESb, 2012), e tais aplicações adquirem significado maior na medida em que interpretamos as situações-problema na perspectiva dos fenômenos envolvidos com emprego dos registros de representação semiótica.

Asseveramos que um ensino cuja prioridade é o *tratamento* de registros não estimula de modo eficiente a *formação* e evolução de *imagens mentais* dos conceitos. Com um repertório restrito de *imagens mentais*, porém, não devemos esperar dos estudantes habilidades satisfatórias na interpretação de gráficos e na elaboração de figuras ou desenhos, os quais podem funcionar como guias para o raciocínio, e registrar uma marca residual da evolução e a internalização progressiva dos conceitos matemáticos.

4 Considerações finais

Certamente a existência de múltiplas perspectivas e enfoques para a interpretação dos problemas relacionados ao ensino/aprendizagem em Matemática nos diferentes níveis de ensino não é um indicação de modismos na área de investigação chamada de Educação Matemática, mas sim consequências da própria natureza multifacetada dos fenômenos envolvidos. Neste âmbito de discussão acadêmica, Duval (1991, 1995a, 1995b) proporciona uma visão de análise impar para os problemas aqui tratados.

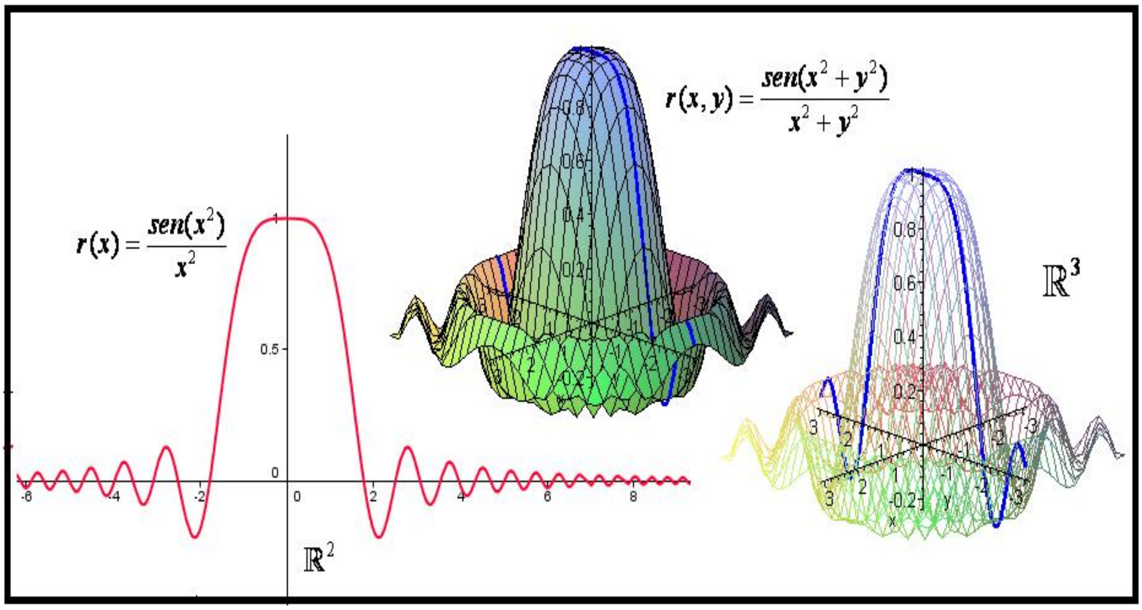
Duval (1995b, p. 157) adverte a respeito de o fato ser *é conhecido que existe sempre um conflito potencial entre uma apreensão perceptual de uma figura e a percepção matemática*, entretanto, o estímulo pela investigação, compreensão de propriedades matemáticas e a descoberta de uma prova pode se apoiar, de modo inicial, na inspeção de uma figura ou gráfico, tanto no caso de duas ou três dimensões.

Neste escrito, imprimimos ênfase nos *registros gráficos*. Uma vez efetivada a progressiva familiarização com estas representações particulares, todavia, a expectativa é de que o estudante adquira *imagens mentais* relacionadas a estes conceitos, elaboradas de um modo idiossincrásico. Destarte, na perspectiva do professor, criamos expectativas no que se refere à produção de seus próprios desenhos e figuras, como conseqüência de apreensões de natureza *perceptual*, *discursiva*, *seqüencial* e, em um nível mais elevado, *operatória*.

Por fim, preservando a atenção em algumas das questões suscitadas neste texto, o ensino de Cálculo amparado nos recursos computacionais oferece ricas e diversificadas implicações para sua teoria, sobretudo, no ensino do Cálculo a Várias Variáveis - CVV (MARTINEZ-PLANELL & GAISMAN, 2010), No âmbito do CVV deparamos a possibilidade de comparar os fenômenos cognitivos envolvidos na apreensão cognitiva e na *visualização* de propriedades dos registros semióticos em 2D e 3D, como exemplificamos na figura 6.

Nela exibimos gráficos plotados com o *CAS Maple*, que despertam de imediato a *percepção* e o interesse do observador. Situações como esta podem estimular a *transição interna* do CUV para o CVV (ALVES & BORGES NETO, 2011; ALVES, 2012). Ademais, com o aperfeiçoamento da nova versão do *Geogebra* 3D, esperamos que este programa apresente potencialidades semelhantes aos *softwares* de computação algébrica existentes no mercado, entretanto, de alto custo para o usuário.

Figura 6 – Percepção relacional entre registros gráficos em 2D e 3D fornecidos pelos Geogebra/Maple



Fonte: Autoria própria.

THE CALCULUS TEACHING: A PROPOSAL OF EXPLORATION IN THE PERSPECTIVE OF THE USE OF REPRESENTATION REGISTERS

Abstract: This is a scientific communication that highlights the importance of didactic exploration of register of semiotic representation in teaching of Calculus in a Real Variable. Thus, referring to work of Duval (*1991*, *1995a*, *1995b*), develop and discuss problems-situations of the Calculus. And, with support of the notions designed by the author (formation, treatment, conversion, perceptual apprehension), in addition with the employment of Geogebra software, our usage is intended to highlight the complexity of the cognitive operations involving in this situations and their applications. Finally, we indicate that may guide future research aimed at understanding the application of this theory in the context of teaching of Calculus at Several Variables, involving 2D and 3D registers.

Keywords: Registers of representation. Calculus. Teaching.

Referências

ALVES, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. **Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros**. In: *Educação Matemática Pesquisa*. v. 13-3, 597-626, 2011. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive>. Acesso em: 25 dez. 2011.

ALVES, Francisco. R. V. (2012a). **Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra**. In: REVISTA DO INSTITUTO GEOGEBRA INTERNACIONAL DE SÃO PAULO, 1, P. CLXV-CLXXIX. 2012a. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index>. Acesso em: 04 de abr. 2012.

ALVES, Francisco R. V**. Interpretação geométrica para a regra de L`Hospital com o auxílio do Geogebra.** Conferência Latinoamericana do Geogebra. 1-8. 2012b. Montevidéu. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php>. Acesso em: 18 out. 2012.

ALVES, Francisco R. V. **Discussão sobre a noção de integral imprópria com o auxílio do Geogebra.** Conferência Latinoamericana do Geogebra. 1-8. 2012c. Montevidéu. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php>. Acesso em: 18 out. 2012.

DUVAL, R. Strutucture du raisonnement déductif e apprentissage de la démonstration. **Educational Studies in Mathematics**, n.22, p. 233-261, 1991.

DUVAL, R. **Sémiosis et Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Paris: Peter Lang Editeur, 1995a.

DUVAL, R. Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. In. R. Sutherland & J. Mason. (Ed.) **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education**, p. 142-157. Berlim: Springer-Verlag. 1995b.

MARTINEZ-PLANELL. R. & GAISMAN. M. T. Geometrical representations in the learning of two-variable functions**. Educational Studies in Mathematics,** n. 73, p. 3-19, 2010.