

CONTRIBUIÇÕES DA INFORMÁTICA NA INTERPRETAÇÃO, ANÁLISE E CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS EM SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO CADEIAS DE MARKOV: DA AÇÃO À COMPREENSÃO

Rodrigo Sychocki da Silva

Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS).
Doutorando em Informática na Educação (UFRGS). Docente IFRS – Campus Caxias

Dante Augusto Couto Barone

Doutor em Informática (INPG). Docente UFRGS

Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Doutor em Informática na Educação (UFRGS). Docente UFRGS

Resumo: O artigo apresenta o recorte de uma pesquisa de doutorado que estuda as contribuições da informática na construção de conceitos matemáticos. Em particular, discute alguns resultados da aplicação de uma sequência de atividades realizada com alunos da graduação em matemática e professores de matemática da região de Passo Fundo (RS). Através de uma metodologia de trabalho baseada nos princípios da Engenharia Didática, a exploração de uma situação-problema envolvendo processos estocásticos fazendo o uso de um objeto virtual possibilitou aos sujeitos envolvidos a criação, manutenção e validação/reformulação de hipóteses sobre o modelo matemático investigado. A análise da proposta feita através da teoria da abstração reflexionante de Piaget aponta que o uso da informática durante as atividades possibilitaram sucessivos e graduais micro-avanços dos participantes na direção do conhecimento, como também possibilitou que os sujeitos envolvidos fossem construtores do seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Abstração reflexionante. Construção do conhecimento. Modelagem matemática. Tecnologia.

CONTRIBUTIONS OF COMPUTER TECHNOLOGY IN THE INTERPRETATION, ANALYSIS AND CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS IN PROBLEM SITUATIONS INVOLVING MARKOV CHAINS: ACTION TO UNDERSTANDING

Abstract: The article presents the fragment of a doctoral research that studies the computer's contributions in the construction of mathematical concepts. In particular, we discuss some results of the application of a sequence of activities carried out with undergraduate students in mathematics and mathematics teachers in the region of Passo Fundo (RS). Through a network based on the principles of Engineering Teaching methodology of work, the exploration of a problem situation involving stochastic processes making use of a virtual object enabled the subjects involved the creation, maintenance and validation/reformulation of hypotheses about the mathematical model investigated. The analysis of the proposal made by the theory of Piaget's reflective abstraction indicates that the use of computers during activities enabled micro-successive and gradual progress of participants toward the knowledge, but also enabled the subjects involved were constructors of their own knowledge.

Keywords: Reflective abstraction. Construction of knowledge. Mathematical modeling. Technology.

1. INTRODUÇÃO

Quando o conhecimento matemático apresentado aos estudantes é tratado como isolado e sem relação com os demais, acaba por tornar a matemática uma ciência isolada e sem sentido, desvinculada com os aspectos da realidade que cerca o sujeito. Concebe-se que seja necessária e suficiente a ação e o trabalho cognitivo sobre os objetos do conhecimento em estudo, os quais possibilitam aos estudantes a evolução, compreensão e construção dos conceitos matemáticos. Com isso, a possibilidade de explorar matematicamente alguns fenômenos da realidade através da Modelagem Matemática, segundo as ideias de Bassanezi (2002), constitui um cenário em potencial para o desenvolvimento e aprimoramento do pensamento hipotético e abstrato, caracterizado pela criação, validação/refutação, reformulação de hipóteses pelo sujeito envolvido com a proposta.

Nesse sentido, através do uso recursos tecnológicos, utilizou-se um objeto virtual para acompanhar a evolução dos sujeitos durante a investigação de um fenômeno da realidade envolvendo a migração da população entre duas cidades. Ao longo da proposta buscou-se compreender como era possível o sujeito construir um modelo matemático capaz de explicar o fenômeno investigado. O uso da tecnologia emergiu como uma possibilidade do sujeito agir sobre o objeto do conhecimento, tornando possível o estabelecimento de relações que permitam a construção de conceitos matemáticos. A teoria da abstração reflexionante proposta por Piaget (1977) constituiu uma ferramenta importante, necessária e suficiente, para analisar a evolução dos sujeitos envolvidos com a proposta. Com essa teoria, almejou-se ser possível analisar se a construção de um possível modelo matemático seria o resultado de sucessivos e graduais micro-avanços do sujeito durante a sua ação sobre o objeto em estudo.

A intenção do presente texto é demonstrar que a construção do conhecimento matemático é resultado da possível combinação dos fatores: (1) evolução da atividade cognitiva do sujeito, manifestada pelo aperfeiçoamento do fenômeno da abstração; (2) do aperfeiçoamento da ação do sujeito sobre os objetos; (3) do uso da tecnologia como parceira no estabelecimento de relações entre o sujeito e o objeto do conhecimento, potencializando a análise, interpretação e construção de modelos matemáticos no computador.

O presente texto está estruturado em seis seções. Na seção 2 são apresentadas algumas pesquisas que destacam a utilização do software GeoGebra no estudo de assuntos matemáticos. Na seção 3 discute-se características do processo da abstração reflexionante, necessária para a análise do experimento. Na seção 4 apresenta-se a Modelagem Matemática segundo as ideias de Bassanezi (2002), dissertando sobre algumas de suas características, essenciais para a compreensão da pesquisa. Na seção 5 apresentamos os procedimentos metodológicos. Na seção 6 são apresentados e discutidos alguns resultados obtidos com a aplicação da sequência de atividades, bem como as relações com a fundamentação teórica utilizada para a interpretação dos dados. E finalmente, na seção 7, apresentamos algumas conclusões parciais do trabalho, destacando algumas contribuições para o ensino de matemática aliada ao uso da tecnologia.

2. PESQUISAS SOBRE O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Nessa seção discute-se sobre algumas pesquisas já produzidas e suas contribuições para o estado da arte na Educação Matemática, em especial para a discussão que envolve o uso das tecnologias informáticas no estudo de conceitos matemáticos. Vaz (2012) propõe quanto ao uso do GeoGebra:

No Geogebra podemos contemplar geometria e álgebra dinamicamente, interagindo entre si na mesma tela, possibilitando ao usuário relacionar as várias faces de um mesmo objeto matemático. Permite trabalhar conceitos do ensino fundamental, médio e superior e realizar construções matemáticas diversificadas a alterá-las após a construção ser finalizada. Esse dinamismo possibilita que o aluno perceba diversas relações entre os objetos matemáticos, faça conjecturas e até mesmo formalize os resultados, de forma visual, no próprio software. (VAZ, 2012, p.40)

A passagem anterior manifesta que o uso do *software* GeoGebra intensifica o fazer matemático dos sujeitos envolvidos, uma vez que a elaboração de hipóteses e conjecturas pode ser verificada de modo dinâmico na tela do computador. Nesse sentido, a pesquisa de Vaz (2012) consistiu em desenvolver junto aos estudantes a investigação matemática baseada na ação sobre problemas, verificando se eles conseguiam elaborar e desenvolver o pensamento matemático durante a compreensão das situações apresentadas.

As contribuições com a investigação de Vaz (2012) indicam que o estudante envolvido com a produção do conhecimento matemático se torna autodidata. Isso possibilita que o sujeito vá além dos seus limites, alcançando patamares mais complexos na sua forma de pensamento. O *software* nesse aspecto vem para contribuir no processo, possibilitando que o sujeito envolvido na sua ação sobre os objetos progrida na direção da compreensão do fenômeno investigado.

O papel das tecnologias na compreensão e construção de conceitos desempenha atualmente grande importância no cenário das pesquisas em Educação Matemática. As pesquisas convergem para o pensamento de que o professor ao utilizar o *software* GeoGebra como ferramenta ou recurso para a abordagem de determinados conceitos alcança objetivos maiores do que os inicialmente propostos. Acreditamos que o docente através do uso da tecnologia passa por um processo de reconstrução de saberes e conceitos, reconstruindo os significados e modos de conceber o conhecimento matemático.

Silva (2014) em sua investigação de mestrado propõe que o uso do GeoGebra contribui para além da construção do conhecimento, possibilita também uma reflexão sobre sua prática do professor. E ainda, o autor acredita que para os demais professores e pesquisadores interessados no tema de investigação, a ideia de utilizar o *software* pode romper com algumas concepções consideradas tradicionais, contribuindo na formação dos estudantes inseridos no contexto de sociedade predominantemente tecnológico. Portanto, além da tecnologia contribuir na aprendizagem de conceitos de matemática, ela contribui para a formação de um sujeito crítico e consciente do seu papel enquanto inserido na sociedade atual. Sobre o uso do *software* GeoGebra e o convite à reflexão sobre a prática docente, Silva (2014) defende:

As tecnologias apresentam hoje um papel no desenvolvimento da sociedade, em particular, da educação. Utilizar o software Geogebra no desenvolvimento de nossa pesquisa foi, sem dúvida, primordial para o sucesso de sua aplicação. Pensemos que o uso da mesma como ferramenta auxilia, e muito, o professor. Pensamos ser importante fazer uma reflexão de nossa prática diária enquanto professores. Centrar nossa visão para o espaço da sala como docentes, significa, muitas vezes, direcionar nosso trabalho para um ensino voltado ao uso apenas dos livros didáticos e de resumos de aula, que em sua maioria apresentam uma matemática limitada e desconectada com a realidade, que não aborda o conteúdo como um todo e não promove as transformações necessárias para garantir a aprendizagem dos alunos. Precisamos investigar, criar, experimentar novas propostas de trabalho. Sabemos que nossa

sociedade está em constante transformação e necessitamos promover mudanças significativas no ensino da matemática, de forma que acompanhe a sociedade. (SILVA, 2014 p.132)

No âmbito de contribuir na formação do sujeito, o uso do *software* GeoGebra em atividades que estimulam o pensamento matemático contribui na formação de hipóteses, escolha dos procedimentos e posturas a serem adotadas diante do problema. Pedroso (2012) ao investigar a aprendizagem de conceitos de trigonometria pelos estudantes observou que o uso dessa tecnologia potencializa a aproximação entre os sujeitos e os objetos investigados, onde através de sucessivas e aperfeiçoadas relações é possível que o sujeito avance mais e qualitativamente na busca do conhecimento. Nas palavras da autora:

O uso do Geogebra mostrou-se um programa eficaz como auxílio na elaboração de simulações de aprendizagem escolar ricas em possibilidades e construção de conhecimentos. As manipulações das figuras apresentadas para os alunos, bem como as construções realizadas por eles, promoveram dinamismo nas atividades, possibilidades de realização de tentativas, confirmação de hipóteses, observação de relações entre objetos variáveis e fixos. No Geogebra, várias informações foram apresentadas aos alunos e eles precisavam desenvolver a capacidade de selecionar aquelas que eram pertinentes ao exercício ou problema que estavam resolvendo. (PEDROSO, 2012, p.229)

Nota-se com a passagem anterior a importância dada ao uso do *software* no que se refere aos seus aspectos dinâmicos. A possibilidade de investigar determinado conteúdo matemático podendo utilizar recursos dinâmicos, nas pesquisas apresentadas possui uma unânime posição favorável ao desenvolvimento do pensamento matemático. O fato é que o sujeito, ao investigar através do *software* determinado comportamento ou fenômeno, faz com que relações sejam estabelecidas mais rapidamente, possibilitando ao pensamento construir ou reconstruir conceitos de uma nova forma. Ao investigar a aprendizagem das funções de primeiro e segundo grau pelos estudantes, Ferreira (2013) dá-se conta de que o caráter dinâmico contribui na criação de relações, ou, ainda, da observação de situações na tela do computador é possível construir progressivamente conceitos que talvez em uma aula expositiva com o uso quadro apenas não fosse possível.

Tratando-se de um processo na qual o sujeito investiga e procura estabelecer estratégias na construção do seu conhecimento é notório destacar que o *software* GeoGebra contribui ao longo desse progresso. A análise de diferentes situações-

problema juntamente com o uso da tecnologia possibilita ao sujeito organizar e estruturar os elementos que serão necessários para a compreensão de determinado conteúdo. Para justificar que a aprendizagem não ocorre de modo isolado e sim como resultado de um processo de constatação do estudante sobre a situação investigada, Araújo (2010) expõe:

A inserção de uma estratégia pedagógica mediada pelo software Geogebra foi muito importante para a consolidação de algumas aprendizagens sobre a circunferência e a mediatriz como lugares geométricos. Os estudantes puderam experimentar suas hipóteses, conjecturar sobre distintas possibilidades de resolução, abandonando aquelas que não representavam caminhos vistos como válidos. Interessante observar, neste aspecto, que na maioria das vezes, os aprendizes recorriam às tarefas anteriores ou à teoria aprendida nos momentos de institucionalização, para dar continuidade na solução de uma atividade nova na qual se envolviam. Esse aspecto é importante para denotar a possibilidade de que os alunos não desenvolvam dependência tecnológica para a construção de elementos matemáticos, mas que a utilizem como parceira e mediadora, na direção da resolução de um problema. (ARAÚJO, 2010, p.100)

A investigação de Araújo (2010) sobre como os estudantes construíam aprendizagem envolvendo lugares geométricos com o auxílio do GeoGebra conduz para reflexões importantes; dentre elas, quanto ao momento que o estudante se dá conta da importância na continuidade do processo de aprendizagem, sendo que essa não ocorrerá de modo isolado. Ao utilizar a tecnologia como parceira na tentativa de resolver determinados problemas, a construção de soluções fundamentadas nas ações feitas anteriormente e nas teorias anteriores mobiliza o sujeito na tentativa de organizar os seus esquemas para que seja possível vencer os obstáculos impostos pelo objeto.

3. ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE: FONTE PARA A ELABORAÇÃO DOS CONCEITOS

A epistemologia genética de Jean Piaget é a teoria que apresenta como hipótese para o desenvolvimento cognitivo humano a ação do sujeito sobre os objetos e os seus sucessivos avanços, devido à organização das *coordenações das ações* realizadas pelo sujeito. Na epistemologia genética considera-se “objeto” tudo

o que não é o sujeito. O termo “coordenações de ações” apresentado no parágrafo anterior é a fonte de estudo no processo de abstração proposto por Piaget (1977). O verbo abstrair significa retirar, extrair, puxar, neste caso temos que a abstração consiste no processo de retirada de qualidades dos objetos ou também a retirada de uma elaboração através das coordenações de ações sobre os objetos. Nesse sentido, a abstração proposta por Piaget divide-se em duas categorias gerais: abstração empírica e abstração reflexionante. Inicialmente vamos expor o ponto de vista do autor sobre essas categorias:

Recordemos inicialmente nossas definições. A abstração “empírica” (empirique) tira suas informações dos objetos como tais, ou das ações dos sujeitos sobre suas características materiais; de modo geral, pois, dos observáveis, ao passo que a abstração “reflexionante” (refléchissante) apóia-se sobre as coordenações de ações do sujeito, podem estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas. (PIAGET, 1977, p.274)

Logo, pode-se afirmar que a abstração empírica consiste em extrair dos objetos as qualidades que eles possuem, onde através delas o sujeito terá a possibilidade de fazer relações e elaborar novas características ou qualidades para os objetos. Portanto, a abstração empírica é uma etapa inicial e necessária para a evolução cognitiva do sujeito, uma vez que sem ela não é possível evoluir qualitativamente o pensamento através dos níveis da abstração reflexionante.

No processo de retirada das características dos objetos não se pode confundir isso com a retirada de qualidades que atribuímos aos objetos, caracterizando o segundo procedimento segundo Piaget (1977) por abstração pseudo-empírica. A abstração chamada pseudo-empírica é um tipo de abstração reflexionante e exige do sujeito a coordenação de suas ações para que ela ocorra. Conforme dito, o processo de abstração empírica é necessário para que o sujeito evolua cognitivamente. Porém, somente com esse tipo de abstração não é possível dar conta nas explicações sobre os processos de generalizações, característicos dos conteúdos de matemática propostos.

No estudo da matemática a empiria se faz presente, ao passo que a extração das características próprias dos objetos é necessária e contribui para elaborações mais complexas e que generalizam as qualidades, enriquecendo assim o objeto de estudo. À medida que se aumenta o número de abstrações do sujeito durante o processo interativo com o objeto, a qualidade de seu pensamento evolui devido ao

progresso da abstração reflexionante e as sucessivas tomadas de consciência durante o processo. A abstração reflexionante possui duas características essenciais para a compreensão sobre como os níveis de abstração e tomada de consciência progredem no decorrer da ação do sujeito. Trata-se dos processos de reflexão e reflexionamento. Sobre isso, Piaget (1977) apresenta:

Lembre-mos, igualmente, de que a abstração reflexionante comporta sempre, dois aspectos inseparáveis: de um lado, “reflexionamento” (réfléchissement), ou seja, a projeção (como através de um refletor) sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior e, de outro lado, uma “reflexão” (réflexion), entendida esta como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior. (PIAGET, 1977, p.274)

A união da reflexão e do reflexionamento constitui uma estrutura capaz de não apenas atravessar de um nível para o seguinte as formas de pensamento, mas juntas possuem o caráter de uma estrutura capaz de desenvolver características qualitativas superiores no decorrer das passagens, ou projeções. Isso significa que os patamares superiores atingidos pelo sujeito através da ação e coordenação de ações possuem relação intrínseca com os patamares inferiores ou iniciais desenvolvidos através da ação. Sobre isso, o autor manifesta o seu ponto de vista em duas passagens:

Com efeito, a formação de cada um desses patamares acarreta, por sua vez, novas “reflexões”, porquanto se trata de reconstruir sobre o novo plano o que foi deslocado ou projetado a partir de precedente: por exemplo, a coordenação de duas ações não é da mesma natureza que a de suas representações conceitualizadas, o que exige uma reconstrução.” (...) “Disto resulta que, nos níveis superiores, é a reflexão que conduz cada vez mais o jogo em relação aos reflexionamentos, reduzindo-se, então, a tematizações (operações que se tornam objetos de pensamento), ao passo que, nos níveis inferiores, eram os reflexionamentos que constituíam o motor essencial. (PIAGET, 1977, p.276,277)

Portanto, é através de sucessivas operações de reflexão e reflexionamento que é possível ao sujeito avançar na direção dos patamares superiores de abstração e tomadas de consciência de maior qualidade. A reorganização e coordenação de suas ações permitem qualificar cada vez mais a sua ação na busca pela compreensão sobre o objeto, ou seja, a evolução da abstração empírica à reflexionante é um processo pelo qual o sujeito constrói, reconstrói, organiza e reorganiza os seus esquemas e estruturas de pensamento todo momento. A Figura

1 apresenta um esquema inicial sobre as características apresentadas anteriormente envolvendo a abstração.

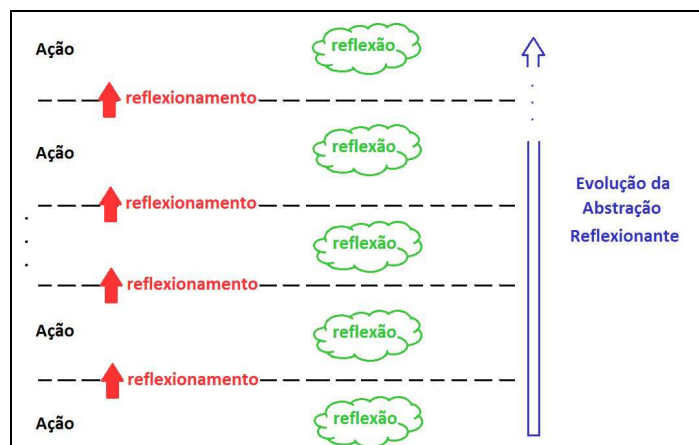


Figura 1 – Esquema sobre reflexão, reflexionamento e seus graduais avanços para a evolução da abstração. Fonte: Adaptado de Becker (2012, p.38).

4. MODELAGEM MATEMÁTICA E ENSINO DA MATEMÁTICA

Discute-se na presente seção alguns aspectos sobre Modelagem Matemática e Ensino de Matemática. Mais especificamente, quais as possíveis contribuições na incorporação dessa proposta de trabalho na qualificação da aprendizagem dos sujeitos envolvidos. Trata-se de uma aprendizagem múltipla, onde o professor e os estudantes envolvidos aprendem através do estabelecimento e manutenção de relações com os objetos de conhecimento e estudos envolvidos. Faz-se uma reflexão sobre como a Modelagem Matemática contribui na formação dos sujeitos, inseridos nos mais diversos níveis e ambientes escolares, contribuindo na elaboração e construção de conceitos matemáticos.

Inicialmente, Meyer *et al* (2011) mostram que:

A Matemática é considerada estigma, ou seja, ao mesmo tempo em que boa parte da sociedade tem medo da Matemática que nós criamos, também acontece o contrário. Da mesma maneira que ouvimos dizer que, se alguém é bom em Matemática, é bom em tudo, também existem muitas pessoas que consideram a Matemática inútil. A Matemática é verdadeira e inútil. A maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos. Na Modelagem, esse sistema tem de ser mudado. Não se deve mais assistir aos objetos matemáticos, mas manipulá-los, porque rompemos com a concepção de que o

professor ensina e passamos a acreditar na ideia de que o conhecimento não está somente nem no sujeito nem no objeto, mas na sua interação. Passamos de objetos que o professor ensina para objetos que o aluno aprende. (MEYER *et al*, 2011, p.24)

Concebe-se na citação anterior uma necessidade de compreensão sobre as relações entre objetos e sujeitos. Ao mesmo tempo em que a matemática é desenvolvida por diversos sujeitos inseridos em determinado contexto de sociedade, verifica-se certo desconhecimento sobre a importância que a ciência matemática possui para o avanço e desenvolvimento da sociedade.

A realidade e seus complexos fenômenos que nos cercam fazem com que a matemática seja uma ferramenta, ou ainda, um recurso para que seja possível aproximar-se cada vez mais dos objetos da realidade. Um dos modos de realizar essa aproximação é como encaramos uma possível representação da realidade através da Modelagem Matemática. Sobre a possibilidade de a modelagem ser uma das possíveis representações da complexa realidade, Skovsmose (2011) disserta:

A concepção de *modelagem matemática como representação* (grifo do autor) da realidade está relacionada a um dualismo, a uma perspectiva de dois-mundos. Por um lado, podemos operar com conceitos matemáticos como sendo parte do mundo das estruturas, como sugerido pelo formalismo. Por outro, podemos operar com a realidade do mundo empírico. Um modelo matemático se torna uma representação de parte dessa realidade. Decerto, tal representação não pode ser completa. Como poderíamos sonhar em fazer uma representação completa da realidade? Mas a linguagem matemática pode representar diferentes aspectos da realidade. As noções da teoria matemática selecionada podem se referir aos objetos empíricos, e as relações entre esses objetos podem ser descritos em termos de equações. (SKOVSMOSE, 2007, p.107)

Ao mesmo tempo em que avança o desenvolvimento da matemática, a Modelagem Matemática busca através do estabelecimento e manutenção de relações estabelecidas entre os sujeitos e os objetos do conhecimento empenhar-se na compreensão da realidade. A tentativa de criar relações e expressar em termos de equações os mais diversos fenômenos faz da Modelagem Matemática uma proposta investigativa, baseada principalmente a elaboração, verificação e validação de possíveis hipóteses por parte do sujeito. Skovsmose (2007) aponta que é possível com isso estabelecer a criação de dois mundos. Apontamos que esses dois mundos sejam disjuntos e complementares, constituindo através de relações entre eles um aspecto importante no processo de investigação.

Neste sentido, a Modelagem Matemática, como metodologia de trabalho propõe que através da ação e investigação de situações-problema é possível construir conhecimento matemático. Destaca-se que durante o estudo de determinado problema, é possível que os sujeitos envolvidos mobilizem diferentes esquemas e estratégias, com o objetivo de formular e investigar suas hipóteses. Trata-se, portanto, de um processo, onde de maneira progressiva são elaborados e estruturados os conceitos matemáticos envolvidos no estudo de determinada proposta. Sobre isso, Brasil (2006) expõe:

Ante uma situação-problema ligada ao “mundo real”, com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento.” (BRASIL, 2006, p.85)

Com o exposto na citação anterior, verifica-se que a Modelagem Matemática pode contribuir significativamente na investigação de problemas matemáticos. Nesse sentido, as pesquisas e ideias de Rodney Bassanezi possuem enormes contribuições para a discussão sobre a importância que a Modelagem Matemática possui no estudo da matemática. Segundo o autor:

A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. (BASSANEZI, 2002, p.38)

Ao manifestar a importância no processo de construção através de etapas durante a investigação de determinado conhecimento matemático, o autor defende que, ao mesmo tempo em que as ideias são construídas, elas também são reconstruídas em uma tentativa de melhorar a nossa compreensão sobre a realidade que nos cerca. A elaboração de um modelo matemático constitui uma etapa importante durante a investigação, pois possibilita ao sujeito envolvido desenvolva e

aja sobre diferentes representações para o fenômeno presente na realidade. Sobre esse trabalho de agir sobre a realidade, Bassanezi (2002) apresenta:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele. (BASSANEZI, 2002, p.24)

A Modelagem Matemática consiste em um gradual processo, onde o sujeito desenvolve suas estratégias e formas para analisar e investigar determinada situação-problema. Consiste em um importante método para a aprendizagem da matemática, pois envolve o desenvolvimento de um comportamento investigativo e reflexivo durante sua ação sobre o problema matemático. Ao encarar a Modelagem Matemática como uma possibilidade para desenvolver possíveis conteúdos matemáticos com os estudantes o professor possibilita que eles desenvolvam suas técnicas, elaborem hipóteses, investiguem a validade de seus argumentos e assim percebam que a matemática é uma ciência fundamentada em um processo de investigação baseado na ação do sujeito sobre os fenômenos da realidade que o cerca. Com isso, se estabelece um processo que avança na tentativa de desenvolver junto aos estudantes a validação e generalização de ideias, possibilitando a construção e manutenção dos conceitos envolvidos durante a investigação. Sobre essa construção, Bassanezi (2002) contribui:

No entanto, boa parte da gênese das ideias matemáticas é fruto de abstrações de situações empíricas, que seguem posteriormente, a busca da alternativa estética e, quanto mais as ideias são aprofundadas e/ou generalizadas, mais se afastam da situação de origem, acumulando detalhes cada vez mais complexos e menos significativos para aqueles que estão fora deste campo de estudo. Na verdade, a matemática dita pura constrói ou descobre objetos de estudos próprios, tratando-os como entes ideais, abstratos/interpretados, existentes/criados apenas na mente humana, isto é, construídos de modo conceitual. (BASSANEZI, 2002, p.172)

Portanto, a Modelagem Matemática desempenha um papel central no progresso do processo de construção de conhecimento matemático, uma vez que avalia por parte dos estudantes sua capacidade de mobilização na tentativa e busca

pela compreensão dos fenômenos que os cerca; e por parte do professor, considerado o mediador do processo, avalia a sua tentativa de mobilizar e desafiar os estudantes na criação, desenvolvimento e validação de ideias e hipóteses.

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Artigue (1996) apresenta:

A engenharia didática vista como metodologia de pesquisa de investigação, caracteriza-se antes de mais nada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p.196)

Nota-se que engenharia didática torna possível ao professor repensar a sua prática docente enquanto atua em sala de aula e também que a realidade torna-se cenário para reflexão, criação e encaminhamento de propostas inovadoras de ensino. Ao fazer uma abordagem dos conteúdos utilizando esse método de ensino, o professor pode questionar se é possível que os estudantes aprendam determinando conteúdo através de uma sequência de atividades que pode ser repensada e readequada durante a execução da proposta.

Ao propormos a abordagem de situações-problema envolvendo modelagem matemática através das Cadeias de Markov¹, a proposta de engenharia didática ocorreu através de quatro etapas ou fases: *Análise prévia* (1) – Nessa fase nos questionamos como ocorre o ensino dos conteúdos propostos e quais os efeitos que isso implica na aprendizagem dos alunos, fundamentados através de uma análise epistemológica sobre os conteúdos visados pelo ensino. O pesquisador observa também quais são as possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos perante esses conteúdos. *Concepção do experimento, análise a priori e criação das hipóteses* (2) – Criação da sequência de atividades que constituem o experimento. Construção, por parte do professor, das hipóteses que serão possivelmente validadas durante a execução das atividades. *Experimento* (3) – Consiste na execução das atividades planejadas na etapa anterior. *Análise a posteriori* (4) – Com base nas observações produzidas durante a fase da experimentação, o professor

¹ Para maiores detalhes matemáticos sobre esse assunto consulte Anton e Rorres (2012), Anton e Busby (2003), Kemeny e Snell (1976), Behrends (2000).

procura validar ou não as hipóteses inicialmente construídas e assim validar o seu experimento didático.

Na realização do estudo inicial para o projeto de doutorado foi observada uma amostra de 20 participantes, constituídos por alunos de graduação em licenciatura em matemática e professores de matemática da região de Passo Fundo (RS). A amostra foi participante de uma oficina pedagógica² intitulada “*Cadeias de Markov e GeoGebra: Modelagem Matemática e possibilidades para a construção de conceitos através do uso de objetos virtuais*” que ocorreu em um congresso na Universidade de Passo Fundo (UPF). A oficina pedagógica ocorreu em um laboratório de informática da UPF equipado com todos os equipamentos necessários para a realização da atividade.

O objeto virtual construído no *software* GeoGebra e apresentado na Figura 2 foi utilizado pelos participantes da oficina pedagógica durante a execução das atividades e permitiu que o estudo da situação-problema fosse possível de ocorrer. Através do uso do objeto virtual foi possível perceber que os sujeitos envolvidos mobilizaram diferentes estruturas cognitivas na tentativa de analisar e construir um modelo matemático procurasse explicar o fenômeno estudado.

Atualmente é possível acessar o objeto virtual “Cadeia de Markov – 2D” apresentado nesta seção através da *internet*. Ele encontra-se publicado no repositório do *GeoGebraTube*, sendo o seu acesso disponível para qualquer pessoa com acesso à internet. Quanto à postagem desse material no repositório, destaca-se que é possível manipular e utilizar o objeto virtual sem fazer o *download* do arquivo para o computador de acesso. Com isso, é possível que demais professores, estudantes e interessados no objeto virtual possam acessá-lo de qualquer lugar que tenha acesso a internet. A Figura 2 ilustra o objeto virtual, juntamente com o *link* do endereço de acesso.

Nota-se que o conjunto de atividades iniciais constituiu uma fonte inicial para a compreensão de como é possível através de uma situação-problema construir um cenário que possibilitasse a elaboração e construção de conceitos matemáticos. O uso da tecnologia possibilitou que através do exercício sucessivo da abstração fosse possível aprender matemática, uma vez que as atividades exigiam do sujeito a constante ação sobre o objeto em estudo.

² Atividades disponíveis em: https://dl.dropboxusercontent.com/u/60260993/atividades_markov_2D.pdf

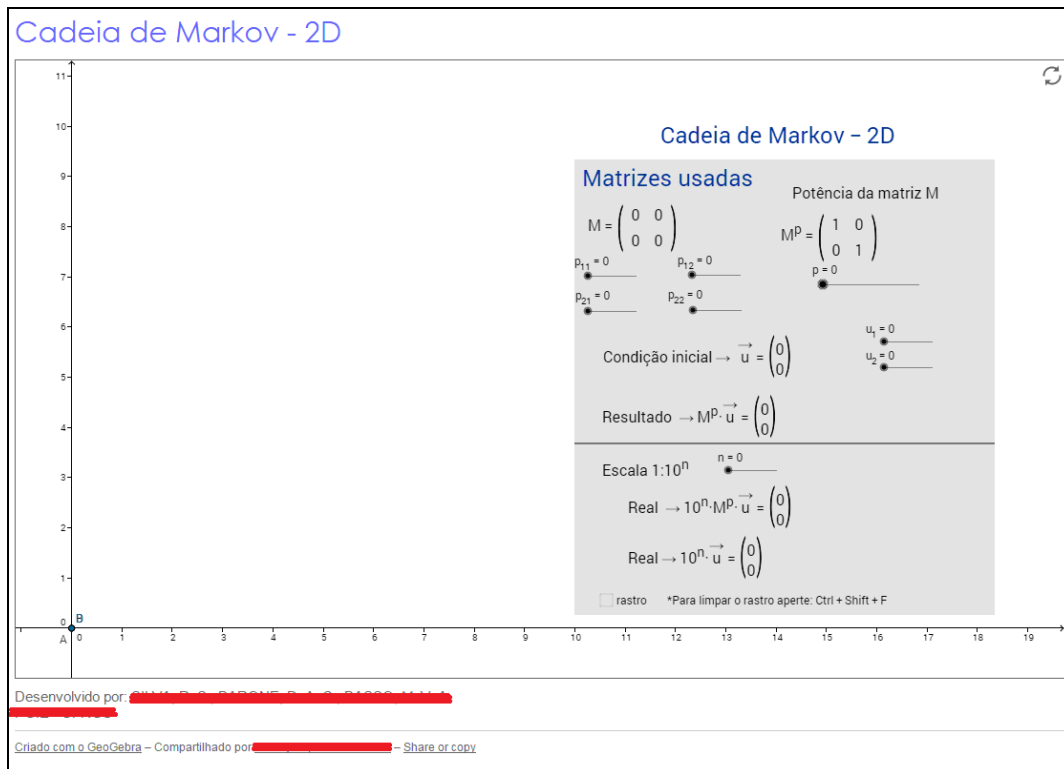


Figura 2 – Interface do objeto virtual construído no GeoGebra. Disponível em: <https://tube.geogebra.org/material/show/id/860625>

6. RESULTADOS DO EXPERIMENTO

A produção dos sujeitos ao longo da oficina pedagógica nos conduz para uma reflexão sobre a construção dos conceitos matemáticos abordados durante a sequência de atividades. O uso do objeto virtual proposto proporcionou aos sujeitos a elaboração de hipóteses sobre o problema matemático estudado. As atividades procuravam desafiar os sujeitos para o desenvolvimento de estratégias, com o objetivo de criar um possível modelo matemático que tornasse possível compreender a situação apresentada.

Nos questionamentos iniciais do experimento buscou-se verificar se os sujeitos eram capazes de através de uma leitura inicial sobre a situação-problema apresentada extrair e citar informações matemáticas que pudessem ser percebidas no enunciado da questão. Notou-se que os sujeitos citaram diversos e diferentes assuntos matemáticos, entre eles: porcentagem, taxas, regra de três, probabilidade, sistemas lineares, estatística e função exponencial. Trata-se de uma manifestação

das abstrações pseudo-empírica, onde os sujeitos extraíram informações do objeto como também as informações colocadas por eles no objeto. As estruturas de pensamento já presentes nos sujeitos mobilizaram diferentes esquemas, que por sua vez agiram na direção na expressão dos resultados.

Ao longo da realização das atividades verificou-se que gradualmente os sujeitos envolvidos na proposta desenvolveram o pensamento matemático na direção da construção dos conceitos necessários para a compreensão da situação-problema. Notou-se também uma evolução progressiva nos aspectos cognitivos envolvendo atividades na direção do êxito ou sucesso na realização das mesmas. Logo, a proposta procurou desafiar o sujeito no desenvolvimento de formas de pensamento capazes de construir um possível modelo matemático.

Notou-se que a construção de um possível modelo matemático ocorreu, mas não de forma satisfatória para todos os participantes das atividades. Esse fato nos leva a concluir que, ao partir de uma manipulação de dados e informações empíricas, alguns estudantes, apesar de estar no ensino superior não conseguiram por meio do exercício gradual da abstração reflexionante compreender a situação na sua totalidade. Ou seja, não conseguiram expressar matematicamente uma relação genérica capaz de explicar o fenômeno observado e idealizado através das variáveis consideradas.

Neste caso, notou-se que alguns participantes das atividades possuíam a qualidade operatória predominantemente no nível empírico, não conseguindo através de possíveis relações, ou ainda, das coordenações de suas próprias ações e formas de pensamento, atribuir características reflexivas capazes de permitir a construção de um modelo matemático que possivelmente explicaria a situação-problema.

Alguns apontamentos decorrentes da realização do experimento podem ser considerados:

- 1) Os envolvidos não “pensavam” matematicamente de maneiras/modos idênticos;
- 2) A construção do modelo matemático perpassou por sucessivos e graduais micro-avanços na direção do conhecimento envolvendo o objeto de estudo;
- 3) O uso da tecnologia contribui no desenvolvimento dos sujeitos durante as atividades, pois permitiu que eles, em sua maioria, se concentrassem

exclusivamente na investigação e deduções envolvendo a situação-problema;

- 4) A passagem pelos níveis iniciais elementares da abstração foi necessária.
- 5) Percebeu-se que a elaboração de um possível modelo matemático foi resultado da evolução do exercício da abstração, conseqüência das abstrações refletidas. O sujeito que conseguiu expressar o modelo matemático na sua totalidade, mesmo que essa totalidade não representasse a realidade em sua integridade, foi capaz de compreender que o seu modelo construído se aplicava para todos os casos inicialmente investigados empiricamente.

Portanto, este primeiro experimento analisou a produção sob o aspecto da elaboração e construção do conhecimento pelos sujeitos, buscando refletir sobre a possível manifestação da abstração reflexionante durante o processo. Verificou-se que a construção do conhecimento matemático proposto na discussão das atividades realizadas com o experimento foi influenciada diretamente por: ações do sujeito sobre o objeto virtual utilizado e também pela ação derivada das coordenações de ações do sujeito sobre o objeto, constituindo-se um processo de construção/reconstrução de ideias, criação/validação de hipóteses e manutenção de um processo argumentativo capaz de produzir e expressar possíveis explicações sobre os fatos observados.

Durante a realização da proposta percebeu-se o exercício da reflexão e reflexionamento por parte de alguns participantes, conforme destacado por Piaget (1977), uma vez que o desempenho desses sujeitos gradualmente evoluiu durante a oficina pedagógica. Ao mobilizar diferentes estruturas cognitivas, notou-se que ao enfrentar uma situação-problema imposta houve a necessidade de efetuar o melhoramento do exercício de abstração, uma vez que com essa mobilização tornava possível avançar na compreensão do fenômeno investigado.

Ao mesmo tempo em que o exercício da abstração ocorria foi possível perceber que a Modelagem Matemática de uma situação-problema envolvendo Cadeias de Markov tornava os sujeitos críticos e posicionados em relação ao fenômeno estudado. Conforme apresentado anteriormente, “a modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.” (BASSANEZI, 2002, p.24).

E finalmente, pode-se perceber que o uso do objeto virtual contribuiu para que os sujeitos, em sua maioria, conseguissem elaborar um modelo matemático que procurasse explicar a situação estudada. Isso não ocorreu de forma automática, e sim na medida em que os sujeitos foram explorando e conhecendo mais o objeto em estudo. Destaca-se que a alteração de parâmetros no objeto virtual e a manipulação dos demais recursos disponíveis possibilitaram a construção de hipóteses matemáticas; com sua imediata validação ou refutação. Como o objeto virtual possibilitava ao sujeito manipular dinamicamente os parâmetros na tela do computador, estimulou-se assim a reformulação das hipóteses caso fosse necessário. A efetiva ação do sujeito sobre o objeto em estudo contribuiu significativamente para a construção de um modelo matemático, resultado do melhoramento no exercício da abstração ao longo da oficina.

7. CONCLUSÕES PARCIAIS

Como resultado da aplicação do experimento didático, conclusões sobre a investigação de situações-problema envolvendo Modelagem Matemática com Cadeias de Markov aliada com o uso da tecnologia informática são possíveis de inferir. Referente ao uso da Modelagem Matemática na exploração de problemas, o experimento mostrou que ao diferenciar a complexa realidade durante a construção de um possível modelo matemático, há produção de conhecimento por parte do sujeito envolvido. Essa construção consiste em um processo contínuo e gradual, visando por parte do sujeito a máxima compreensão dos fenômenos da realidade que o cerca.

Quanto ao uso dos recursos tecnológicos utilizados durante o experimento foi possível verificar o potencial desenvolvimento das mais variadas formas de pensamento, possibilitando ao sujeito elaborar conjecturas e hipóteses através da sua ação sobre o objeto do conhecimento. Portanto, através da exploração do objeto virtual, o sujeito pôde visualizar, validar ou refutar de modo dinâmico as hipóteses previamente construídas.

E, por fim, quanto aos aspectos cognitivos, acreditamos que o uso do recurso tecnológico durante a proposta potencializou a criação e manutenção de uma possível nova forma de pensamento no sujeito: o pensamento *hipotético-contínuo*.

Ou seja, verificou-se a existência de relações intrínsecas entre a *continuidade* no processo de abstração, manifestada através das modificações das ações e do próprio sujeito, com o processo de aperfeiçoamento e construção de *hipóteses*. As modificações na tela do computador através da mudança dos parâmetros, por exemplo, possibilitam que ocorresse uma reorganização por parte do sujeito, provinda da reflexão ocorrida em um patamar cognitivo superior, fazendo com que houvesse o estabelecimento de novas abstrações que agem na direção da formação de novas hipóteses, as quais avançam de modo dinâmico e iterativo, promovendo a reorganização ou reestruturação das estruturas no sujeito. Quanto à pesquisa de doutorado, cujo presente texto é um recorte de uma de suas etapas, está na fase de elaboração do texto final da tese.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, P. B. *Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o GeoGebra*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUCSP. São Paulo, 2010. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12289 Acesso em 10/09/2014.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. *Didáctica das Matemáticas* (Dir, Jean Brun). Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996.
- BECKER, F. *Epistemologia do Professor de Matemática*. Petrópolis-RJ: Vozes, 2012.
- ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com aplicações*. 10^o ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- ANTON, H.; BUSBY, R. C. *Contemporary Algebra*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2003.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BEHREND, E. *Introduction to Markov Chains: with special emphasis on rapid mixing*. Berlin: Vieweg, 2000.
- BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria da Educação Média e Tecnológica (Semtec). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília, 2006. Disponível:

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em 20/04/2014.

FERREIRA, R. D. *Contribuições do Geogebra para o Estudo de Funções Afim e Quadrática em um Curso de Licenciatura em Matemática*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUCSP. São Paulo, 2013. Disponível em:

http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=16257 Acesso em 10/09/2014.

KEMENY, J. G.; SNELL, J. L. *Finite Markov Chains*. New York: Springer, 1976.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PEDROSO, L. W. *Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software Geogebra*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, 2012. Disponível em:

<http://hdl.handle.net/10183/49284> Acesso em 10/09/2014.

PIAGET, J. *Abstração reflexionante; relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. 1977. Tradução de Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

SILVA, M. J. *Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações de 1º Grau com Duas Variáveis Usando o Software Geogebra*.

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/101414> Acesso em 10/09/2014.

SKOVSMOSE, O. *Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade*. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

VAZ, D. A. F. *Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando: Articulado Investigação Matemática com o Geogebra*. Goiânia: Educativa. v.15. n.1. p.39-51. Jan./jun, 2012, Disponível em:

<http://seer.pucgoias.edu.br/index.php/educativa/article/view/2491/1549> Acesso em 10/09/2014.