

ESTIMATIVA NUMÉRICA DA CURVA DE RETENÇÃO EM MEIOS NÃO SATURADOS NA EQUAÇÃO DE RICHARDS COM ALGORITMOS GENÉTICOS

NUMERICAL ESTIMATION OF THE RETENTION CURVE IN UNSATURATED MEDIA IN THE RICHARDS EQUATION USING GENETIC ALGORITHMS

ESTIMACIÓN NUMÉRICA DE LA CURVA DE RETENCIÓN EN MEDIOS NO SATURADOS EN LA ECUACIÓN DE RICHARDS MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS

Danilo Vasconceilos dos Santos^[1], Wilian Jeronimo dos Santos^[1], Renan de Souza Teixeira^[1], Rosane Ferreira de Oliveira^[1],

[1] Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil.

Data de submissão: 16 dez. 2025. **Data de aprovação:** 11 fev. 2026. **Financiamento:** O primeiro autor recebeu bolsa de mestrado da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. **Como citar:** SANTOS, Danilo Vasconceilos dos; SANTOS, Wilian Jeronimo dos; TEIXEIRA, Renan de Souza; OLIVEIRA, Rosane Ferreira de. Estimativa numérica da curva de retenção em meios não saturados na equação de Richards com Algoritmos Genéticos. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 12, p. e301, 16 mar. 2026. <https://doi.org/10.35819/remat2026v12id8000>.



Este artigo está licenciado sob uma licença *Creative Commons Attribution 4.0 International License*.

Resumo: Este trabalho propõe uma metodologia de análise inversa para a estimativa de parâmetros físico-hídricos do solo, fundamentada no acoplamento entre um Algoritmo Genético e o Método das Diferenças Finitas para a solução da equação de Richards. A equação de Richards modela o fluxo da água em meios porosos não saturados, sendo no presente trabalho discretizada pelo Método das Diferenças Finitas com um esquema implícito (Picard), assegurando, assim, estabilidade e consistência na presença de fortes não linearidades. O problema inverso é formulado como um problema de otimização, no qual os parâmetros hidráulicos são ajustados de modo a maximizar o coeficiente de determinação entre os perfis de umidade simulados e observados. Simulações numéricas foram realizadas para um problema de infiltração vertical unidimensional em uma coluna de solo de 40 cm de profundidade, utilizando o modelo de Haverkamp para descrever as relações constitutivas do solo. O Algoritmo Genético é configurado com uma população fixa, operadores de seleção por torneio, cruzamento aritmético, mutação e elitismo. Diferentes cenários são investigados, considerando a identificação simultânea de quatro e cinco parâmetros. Os resultados indicam convergência eficiente do processo inverso, com coeficientes de determinação superiores a $R^2 > 0,98$ na maioria dos testes, evidenciando a robustez do acoplamento proposto.

Palavras-chave: equação de Richards; algoritmos genéticos; método das diferenças finitas; parâmetros hídricos; análise inversa.

Abstract: This work proposes an inverse analysis methodology for estimating soil physical-hydraulic parameters, based on the coupling between a Genetic Algorithm and the Finite Difference Method for solving the Richards equation. The Richards equation models water flow in unsaturated porous media, being in this work discretized by the Finite Difference Method with an implicit scheme (Picard), thus ensuring stability and consistency in the presence of strong nonlinearities. The inverse problem is formulated as an optimization problem, in which hydraulic parameters are adjusted to maximize the coefficient of determination between simulated and observed moisture profiles. Numerical simulations were performed for a one-dimensional vertical infiltration problem in a 40 cm deep soil column, using the Haverkamp model to describe the soil constitutive relations. The Genetic Algorithm is configured with a fixed population, tournament selection operators, arithmetic crossover, mutation and elitism. Different scenarios are investigated, considering the simultaneous identification of four and five parameters. Results indicate efficient convergence of the inverse process, with determination coefficients greater than $R^2 > 0.98$ in most tests, demonstrating the robustness of the proposed coupling.

Keywords: Richards equation; genetic algorithms; finite difference method; hydraulic parameters; inverse analysis.

Resumen: Este trabajo propone una metodología de análisis inverso para la estimación de parámetros físico-hídricos del suelo, fundamentada en el acoplamiento entre un Algoritmo Genético y el Método de las Diferencias Finitas para la solución de la ecuación de Richards. La ecuación de Richards modela el flujo del agua en medios porosos no saturados, siendo en el presente trabajo discretizada por el Método de las Diferencias Finitas con un esquema implícito (Picard), asegurando así estabilidad y consistencia en presencia de fuertes no linealidades. El problema inverso es formulado como un problema de optimización, en el cual los parámetros hidráulicos son ajustados de modo a maximizar el coeficiente de determinación entre los perfiles de humedad simulados

y observados. Simulaciones numéricas fueron realizadas para un problema de infiltración vertical unidimensional en una columna de suelo de 40 cm de profundidad, utilizando el modelo de Haverkamp para describir las relaciones constitutivas del suelo. El Algoritmo Genético es configurado con una población fija, operadores de selección por torneo, cruzamiento aritmético, mutación y elitismo. Diferentes escenarios son investigados, considerando la identificación simultánea de cuatro y cinco parámetros. Los resultados indican convergencia eficiente del proceso inverso, con coeficientes de determinación superiores a $R^2 > 0,98$ en la mayoría de las pruebas, evidenciando la robustez del acoplamiento propuesto.

Palabras clave: ecuación de Richards; algoritmos genéticos; método de las diferencias finitas; parámetros hídricos; análisis inverso.

1 INTRODUÇÃO

O solo desempenha funções essenciais nos ecossistemas terrestres, atuando como meio de suporte vegetal, reservatório de água e nutrientes, além de substrato para infraestruturas. A compreensão de suas propriedades físicas e hídricas é fundamental para garantir seu uso sustentável e preservar suas funções ecossistêmicas (Hillel, 1980; Jury; Horton, 2004). A dinâmica da água no solo apresenta relevância em múltiplos contextos. Na agricultura brasileira, a produção de grãos cresceu 510% entre 1975 e 2019, alcançando 232,6 milhões de toneladas (Embrapa, 2020), impulsionada pela adoção de tecnologias avançadas e aprimoramentos na gestão hídrica. Parâmetros como capacidade de campo e ponto de murcha permanente, derivados da curva de retenção de água, permitem determinar o momento e a quantidade de irrigação necessárias para as culturas (Van Genuchten, 1980; Klar, 1988). Na engenharia geotécnica, a compreensão do comportamento hídrico do solo é vital para a prevenção de deslizamentos, especialmente em regiões serranas brasileiras, como Rio de Janeiro e Petrópolis, onde a infiltração durante chuvas intensas aumenta a pressão nos poros, reduzindo a resistência ao cisalhamento e desencadeando rupturas.

A equação de Richards (Libardi, 2005) descreve matematicamente o movimento da água em solos não saturados, sendo resolvida numericamente por métodos como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos (Celia; Bouloutas; Zarba, 1990; Caviedes-Voullième; García-Navarro; Murillo, 2013; Queiróz, 2017; Souza, 2020; Reis Moura; Souza Teixeira; Santos, 2022). Tradicionalmente, os parâmetros físico-hídricos do solo presentes na equação de Richards são obtidos por meio de ensaios laboratoriais, como a chamada “panela de Richards” (Libardi, 2005), procedimento que pode demandar de um a três meses para sua completa execução. Essas limitações motivam o desenvolvimento de abordagens alternativas baseadas em análise inversa, nas quais os parâmetros hidráulicos são estimados a partir de dados dinâmicos de umidade do solo, sem a necessidade de ensaios laboratoriais específicos para a curva de retenção e a condutividade hidráulica.

Neste trabalho, que tem origem em estudos da dissertação de mestrado do primeiro autor, propõe-se uma metodologia de análise inversa que acopla algoritmos genéticos e o método das diferenças finitas para a estimativa de parâmetros físico-hídricos do solo. Ressalta-se que os dados utilizados são sintéticos, com o objetivo de avaliar a eficiência e a robustez do método proposto. No entanto, a abordagem é geral e pode ser aplicada a diferentes tipos de dados experimentais, incluindo medições diretas de umidade do solo obtidas por técnicas *in situ*, como a reflectometria no domínio do tempo (RDT), entre outras. A principal vantagem da metodologia apresentada reside na possibilidade de utilizar séries temporais de umidade do solo, obtidas em diferentes profundidades e em tempo quase real, reduzindo significativamente o tempo necessário para a caracterização hidráulica do solo e ampliando o potencial de aplicação da análise inversa em estudos de monitoramento e modelagem em meios não saturados. A utilização de algoritmos genéticos oferece robustez na busca de soluções em espaços de alta dimensionalidade (Holland, 1975; Goldberg, 1989; Michalewicz, 2013).

A pesquisa visa contribuir para o aprimoramento das técnicas de modelagem hídrica do solo, oferecendo estratégias mais eficientes para otimização dos recursos hídricos na agricultura e desenvolvimento de sistemas de monitoramento

e alerta precoce de deslizamentos em áreas de risco.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O fluxo de água em meios porosos não saturados é governado pela equação de Richards (Richards, 1931). Uma dedução rigorosa desta equação a partir da lei de Darcy-Buckingham e do princípio de conservação de massa pode ser encontrada em Libardi (2005), Queiróz (2017) e Souza (2020). A equação de Richards pode ser expressa em três formas principais. A forma mista, expressa em termos do conteúdo volumétrico de água θ e do potencial matricial ψ_m , é dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi_m) \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial z} + 1 \right) \right], \quad (1)$$

em que $K(\psi_m)$ é a condutividade hidráulica insaturada e z é a coordenada vertical (positiva para baixo).

A forma baseada no potencial matricial utiliza a capacidade específica $C(\psi_m) = \partial \theta / \partial \psi_m$:

$$C(\psi_m) \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi_m) \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial z} + 1 \right) \right]. \quad (2)$$

A forma baseada em umidade utiliza a difusividade hidráulica $D(\theta) = K(\theta) \partial \psi_m / \partial \theta$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}. \quad (3)$$

A equação de Richards apresenta não linearidade intrínseca devido à dependência da condutividade hidráulica em relação ao conteúdo de água, impossibilitando a obtenção de soluções analíticas para casos práticos, tornando indispensável o emprego de métodos numéricos. No presente trabalho, as simulações numéricas são realizadas utilizando o método das diferenças finitas com esquema implícito e iterações de Picard (Celia; Bouloutas; Zarba, 1990), avaliando a forma ψ_m (equação (2)). Esta formulação é amplamente empregada em códigos computacionais como HYDRUS (Šimůnek *et al.*, 2013) e SWAP (Kroes *et al.*, 2017), justamente pelo equilíbrio entre precisão e estabilidade numérica.

2.1 MODELOS DE CURVAS DE RETENÇÃO E CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA

Para resolver numericamente a equação de Richards, é necessário especificar as relações funcionais entre o conteúdo de água, o potencial matricial e a condutividade hidráulica. Diversos modelos empíricos foram desenvolvidos para descrever estas relações, sendo os mais utilizados os modelos de Brooks e Corey (Brooks; Corey, 1964), Haverkamp (Haverkamp *et al.*, 1977) e van Genuchten (Van Genuchten, 1980).

2.1.1 MODELO DE BROOKS E COREY (1964)

Brooks e Corey (1964) propuseram um dos primeiros modelos para descrever a curva de retenção de água no solo, baseado no conceito de saturação efetiva S_e , definida como:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \quad (4)$$

onde θ é o conteúdo volumétrico de água, θ_r é a umidade residual e θ_s é a umidade de saturação.

O modelo de curva de retenção é expresso por

$$S_e = \begin{cases} \left(\frac{\psi_m}{\psi_b}\right)^{-\lambda}, & \text{se } \psi_m > \psi_b \\ 1, & \text{se } \psi_m \leq \psi_b \end{cases}, \quad (5)$$

onde ψ_b é a pressão de entrada de ar (ou potencial de borbulhamento) e λ é o índice de distribuição dos tamanhos de poros.

A condutividade hidráulica relativa fica sendo dada pela seguinte equação:

$$K(\psi_m) = K_s \left(\frac{\psi_m}{\psi_b}\right)^{-(2+2,5\lambda)}, \quad (6)$$

ou, em termos da saturação efetiva:

$$K(\theta) = K_s S_e^{2\lambda+2,5}, \quad (7)$$

onde K_s é a condutividade hidráulica saturada.

2.1.2 MODELO DE HAVERKAMP (1977)

O modelo apresentado, inicialmente, em Haverkamp *et al.* (1977), propõe uma transição mais suave entre os estados de umidade, caracterizado por parâmetros de ajuste que influenciam diretamente a resposta do solo ao potencial matricial. A curva de retenção é expressa por:

$$\theta(\psi_m) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |\psi_m|^\beta} + \theta_r, \quad (8)$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são parâmetros empíricos de ajuste.

A condutividade hidráulica segue a forma:

$$K(\psi_m) = \frac{K_s A}{A + |\psi_m|^\gamma}, \quad (9)$$

onde A e γ são parâmetros determinados empiricamente, proporcionando uma descrição consistente dos dados experimentais.

2.1.3 MODELO DE VAN GENUCHTEN (1980)

O modelo proposto em van Genuchten (1980) é reconhecido por sua versatilidade e ampla aplicabilidade, oferecendo uma transição não linear que abrange desde a saturação plena até condições de umidade residual. A função de retenção é definida por:

$$\theta(\psi_m) = \begin{cases} (\theta_s - \theta_r) [1 + (\alpha|\psi_m|)^n]^{-m} + \theta_r, & \text{se } \psi_m \leq 0 \\ \theta_s, & \text{se } \psi_m > 0 \end{cases}, \quad (10)$$

de modo que $\alpha > 0$ (relacionado ao inverso da pressão de entrada de ar), $n > 1$ (relacionado à distribuição dos tamanhos de poros) e m são parâmetros empíricos. Comumente, utiliza-se a restrição $m = 1 - \frac{1}{n}$ para simplificar o modelo.

A saturação efetiva é expressa por:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = [1 + (\alpha|\psi_m|)^n]^{-m}. \quad (11)$$

A condutividade hidráulica relativa é dada por:

$$K(\theta) = K_s S_e^{1/2} \left[1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right)^m \right]^2. \quad (12)$$

2.2 MÉTODO IMPLÍCITO COM ITERAÇÕES DE PICARD

O método implícito surge como uma alternativa robusta ao esquema explícito para resolver a equação de Richards, especialmente quando se necessita de maiores passos de tempo ou quando se lida com solos altamente não lineares. Diferentemente do método explícito, em que a solução no tempo t^{j+1} é calculada explicitamente a partir dos valores em t^j , o método implícito avalia os termos não lineares no tempo futuro, requerendo a solução de um sistema de equações a cada passo temporal. A formulação implícita da equação de Richards na forma mista é dada por:

$$\frac{\theta^{j+1} - \theta^j}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi_m^{j+1}) \left(\frac{\partial \psi_m^{j+1}}{\partial z} + 1 \right) \right], \quad (13)$$

sendo que o sobrescrito j denota o nível temporal atual e $j + 1$ o nível temporal futuro.

A principal dificuldade na implementação do método implícito reside na não linearidade dos termos $K(\psi_m^{j+1})$ e $\theta(\psi_m^{j+1})$. Para contornar este obstáculo, emprega-se o método iterativo de Picard, que lineariza a equação através de iterações sucessivas em cada passo de tempo. O processo iterativo inicia-se, para cada novo passo temporal t^{j+1} , com uma estimativa inicial para o potencial matricial dada por:

$$\psi_m^{j+1,0} = \psi_m^j, \quad (14)$$

em que o segundo índice superior denota o número da iteração de Picard.

A chave do método de Picard está na linearização do termo $\theta^{j+1,m+1}$ através de uma expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem:

$$\theta^{j+1,m+1} = \theta^{j+1,m} + C^{j+1,m}(\psi_m^{j+1,m+1} - \psi_m^{j+1,m}) + O(\delta^2), \quad (15)$$

em que $C(\psi_m) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi_m}$ é a capacidade específica do solo. Substituindo esta expansão na equação discretizada, obtém-se um sistema linear para as correções $\delta \psi_m^m = \psi_m^{j+1,m+1} - \psi_m^{j+1,m}$:

$$\frac{C^{j+1,m}}{\Delta t} \delta \psi_m^m - \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{j+1,m} \frac{\partial \delta \psi_m^m}{\partial z} \right] = R^{j+1,m}, \quad (16)$$

em que $R^{j+1,m}$ representa o resíduo da equação na iteração m (Queiróz, 2017).

2.2.1 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL E SISTEMA TRIDIAGONAL

A discretização espacial utiliza diferenças finitas centradas, considerando pontos intermediários para o cálculo dos fluxos. Para um ponto genérico z_i da malha, a derivada espacial do fluxo é aproximada por:

$$\left. \frac{\partial q}{\partial z} \right|_i \approx \frac{q_{i+1/2} - q_{i-1/2}}{\Delta z}, \quad (17)$$

com os fluxos nos pontos intermediários dados por:

$$q_{i+1/2} = K_{i+1/2}^{j+1,m} \left(\frac{\psi_{m,i+1}^{j+1,m+1} - \psi_{m,i}^{j+1,m+1}}{\Delta z} + 1 \right), \quad (18)$$

$$q_{i-1/2} = K_{i-1/2}^{j+1,m} \left(\frac{\psi_{m,i}^{j+1,m+1} - \psi_{m,i-1}^{j+1,m+1}}{\Delta z} + 1 \right). \quad (19)$$

As condutividades hidráulicas nos pontos intermediários são calculadas pela média aritmética:

$$K_{i+1/2}^{j+1,m} = \frac{K(\psi_{m,i}^{j+1,m}) + K(\psi_{m,i+1}^{j+1,m})}{2}, \quad (20)$$

$$K_{i-1/2}^{j+1,m} = \frac{K(\psi_{m,i-1}^{j+1,m}) + K(\psi_{m,i}^{j+1,m})}{2}. \quad (21)$$

A aplicação consistente do método de Picard resulta em um sistema tridiagonal para as correções $\delta\psi_{m,i}^m$:

$$p_i \delta\psi_{m,i-1}^m + q_i \delta\psi_{m,i}^m + r_i \delta\psi_{m,i+1}^m = R_i^{j+1,m}, \quad (22)$$

sendo que os coeficientes são definidos como:

$$p_i = -\frac{K_{i-1/2}^{j+1,m}}{\Delta z^2}, \quad (23)$$

$$q_i = \frac{C_i^{j+1,m}}{\Delta t} + \frac{K_{i-1/2}^{j+1,m} + K_{i+1/2}^{j+1,m}}{\Delta z^2}, \quad (24)$$

$$r_i = -\frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}}{\Delta z^2}, \quad (25)$$

e o termo fonte é calculado por:

$$R_i^{j+1,m} = \frac{\theta_i^j - \theta_i^{j+1,m}}{\Delta t} + \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m} - K_{i-1/2}^{j+1,m}}{\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \left[K_{i+1/2}^{j+1,m} (\psi_{m,i+1}^{j+1,m} - \psi_{m,i}^{j+1,m}) - K_{i-1/2}^{j+1,m} (\psi_{m,i}^{j+1,m} - \psi_{m,i-1}^{j+1,m}) \right]. \quad (26)$$

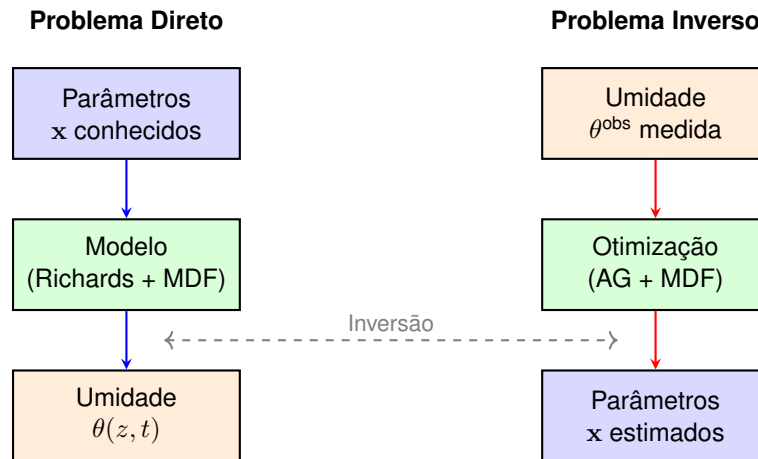
3 ANÁLISE INVERSA

O problema direto consiste em resolver a equação de Richards com parâmetros físico-hídricos conhecidos, como por exemplo θ_r , θ_s e K_s , para obter a evolução espaço-temporal da umidade $\theta(z, t)$. Dado um domínio $\Omega = [0, L]$, condições inicial $\theta(z, 0) = \theta_0(z)$ e de contorno apropriadas, a solução numérica pelo método das diferenças finitas fornece o campo de umidade em instantes discretos.

O problema inverso inverte esta lógica: dados observacionais de umidade $\theta^{\text{obs}}(z_i, t_j)$ são utilizados para estimar os

parâmetros desconhecidos que melhor reproduzem as medições. Formalmente, busca-se $x \in \mathbb{R}^p$ (vetor de parâmetros) que minimize o desvio entre previsões do modelo direto e observações experimentais. A Figura 1 ilustra esta relação dual.

Figura 1 – Relação entre problemas direto e inverso: no problema direto, parâmetros conhecidos geram previsões de umidade; no problema inverso, medições de umidade são usadas para estimar parâmetros via otimização.



Fonte: Autores (2025).

A reflectometria no domínio do tempo (RDT) é uma das técnicas que podem ser utilizadas para a obtenção de dados de umidade volumétrica do solo, baseando-se na propagação de pulsos eletromagnéticos e na relação entre a constante dielétrica do meio e o teor de água. Por permitir leituras instantâneas e o monitoramento contínuo ao longo do tempo e em diferentes profundidades, a RDT constitui um exemplo de fonte de dados potencialmente adequada para aplicações em análise inversa.

Ressalta-se, entretanto, que a metodologia de análise inversa proposta neste trabalho é independente da técnica específica de aquisição dos dados de umidade. Uma das principais vantagens dessa abordagem é a possibilidade de contornar a necessidade dos ensaios laboratoriais clássicos de caracterização da curva de retenção de água e da condutividade hidráulica, substituindo-os pela utilização de dados dinâmicos de umidade, obtidos ao longo do tempo e do perfil do solo. No presente estudo, os dados utilizados são sintéticos, tendo sido gerados a partir da solução do problema direto, com o objetivo de avaliar, de forma controlada, o desempenho do algoritmo genético na estimativa dos parâmetros físico-hídricos.

O problema inverso associado à estimativa de parâmetros hidráulicos a partir de dados de umidade é, em geral, não único, podendo existir diferentes conjuntos de parâmetros que produzem valores similares da função objetivo. Essa característica está relacionada à presença de correlações entre parâmetros e à limitada sensibilidade de determinadas variáveis de estado aos parâmetros estimados, configurando uma situação análoga a uma frente de soluções equivalentes no espaço de busca. No presente estudo, a utilização de dados sintéticos e a comparação direta com os parâmetros verdadeiros permitiram avaliar a capacidade do algoritmo genético em identificar soluções fisicamente consistentes, ainda que não necessariamente únicas. Estratégias adicionais, como a incorporação de múltiplos critérios, regularização ou informações a priori, podem ser empregadas em aplicações futuras para mitigar os efeitos da não unicidade. Essas considerações reforçam o caráter exploratório e metodológico do presente estudo, bem como a adequação do algoritmo genético como ferramenta para a análise inversa de problemas associados à equação de

Richards.

3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Considerando L observações de umidade $\{\theta_i^{\text{obs}}\}_{i=1}^L$ obtidas em diferentes posições e tempos, a função objetivo clássica para estimação de parâmetros é a soma dos quadrados dos resíduos:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L (\theta_i^{\text{est}}(\mathbf{x}) - \theta_i^{\text{obs}})^2, \quad (27)$$

em que \mathbf{x} representa o vetor que armazena as denominadas variáveis de projeto do problema de otimização, no caso, os parâmetros que caracterizam os diferentes modelos de curva de retenção da água no solo, enquanto $\theta_i^{\text{est}}(\mathbf{x})$ é a umidade estimada pelo método das diferenças finitas para cada solução candidata de parâmetros ótimos. O problema de minimização pode ser transformado em um problema de maximização utilizando o coeficiente de determinação R^2 :

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} R^2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^L (\theta_i^{\text{est}}(\mathbf{x}) - \theta_i^{\text{obs}})^2}{\sum_{i=1}^L (\theta_i^{\text{obs}} - \bar{\theta}^{\text{obs}})^2}, \quad (28)$$

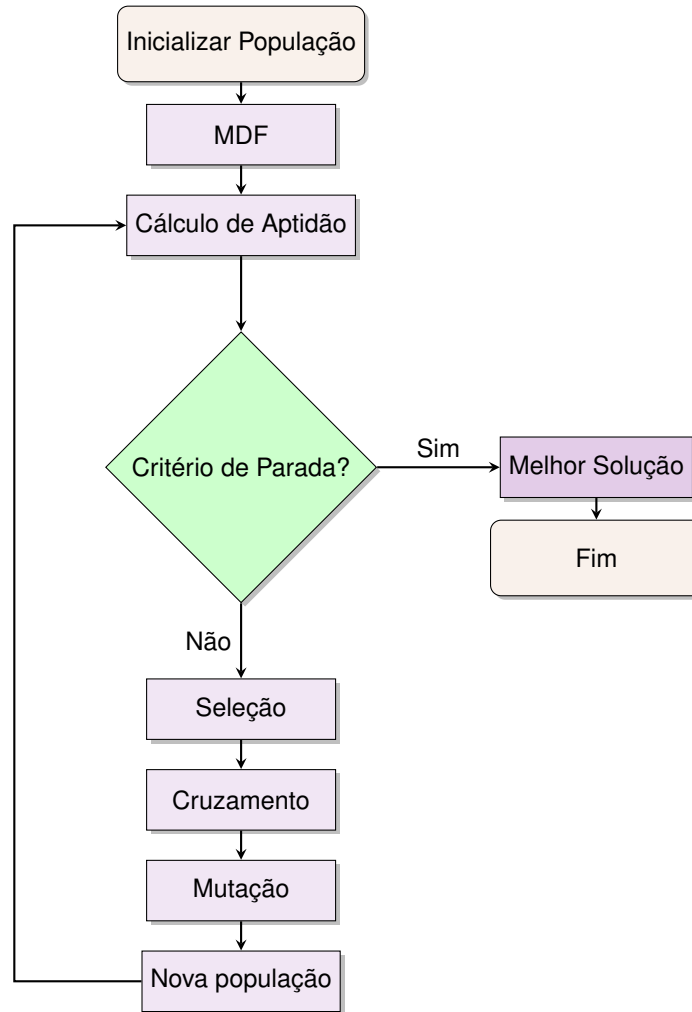
em que $\bar{\theta}^{\text{obs}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \theta_i^{\text{obs}}$ é a média das observações. O coeficiente R^2 varia entre 0 e 1, com valores próximos a 1, indicando melhor ajuste entre dados estimados e observados.

O domínio de busca \mathcal{D} é definido pelos intervalos fisicamente admissíveis para cada parâmetro, estabelecidos com base nas propriedades naturais dos solos. A cada iteração do algoritmo de otimização, o problema direto é resolvido para calcular $\theta_i^{\text{est}}(\mathbf{x})$.

3.2 ALGORITMO GENÉTICO

Algoritmos genéticos (AGs) são meta-heurísticas inspiradas em evolução natural que exploram o espaço de busca globalmente a partir de operadores de seleção, cruzamento e mutação (Goldberg, 1989; Michalewicz, 2013). Para o problema inverso, envolvendo a equação de Richards, o AG opera iterativamente com os passos apresentados na Figura 2, os quais serão discutidos detalhadamente nas próximas seções.

Figura 2 – Fluxograma do Algoritmo Genético



Fonte: Santos *et al.* (2025, p. 5).

3.2.1 INICIALIZAÇÃO DA POPULAÇÃO

A população inicial é formada por um conjunto de indivíduos, tal que cada indivíduo representa uma possível solução do problema. Cada indivíduo é um vetor contendo os parâmetros do modelo hidráulico escolhido, por exemplo,

$$\mathbf{x}^{(i)} = [\theta_r, \theta_s, K_s, \dots]. \quad (29)$$

Cada parâmetro é sorteado aleatoriamente dentro de seu intervalo físico permitido $\theta_r \in [a_1, b_1]$, $\theta_s \in [a_2, b_2]$, $K_s \in [a_3, b_3]$. Cada vetor de parâmetro é então utilizado no modelo hidráulico para calcular valores estimados, que serão comparados com os dados experimentais.

3.2.2 CÁLCULO DE APTIDÃO (FITNESS)

Cada indivíduo é avaliado por uma função objetivo. Neste trabalho, utiliza-se o coeficiente de determinação (28). Quanto mais próximo de 1 for o valor de R^2 , melhor é a aptidão do indivíduo, indicando a qualidade em que o conjunto de parâmetros $(\theta_r, \theta_s, K_s, \dots)$ representa os dados experimentais.

3.2.3 SELEÇÃO POR TORNEIO

O processo de seleção escolhe quais indivíduos irão gerar descendentes. Inicialmente, sorteiam-se 3 indivíduos aleatoriamente da população, e o indivíduo, com maior aptidão (R^2 mais próximo de 1), é selecionado como primeiro campeão. Em seguida, repete-se o sorteio de mais 3 indivíduos (podendo incluir o vencedor anterior), e o vencedor deste segundo torneio é selecionado como segundo campeão. Esses dois campeões serão cruzados para gerar um novo indivíduo.

3.2.4 CRUZAMENTO

Os dois parentes selecionados geram um descendente a partir da média aritmética de seus parâmetros:

$$\mathbf{x}^{filho} = \frac{\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2}{2}. \quad (30)$$

Ou seja, cada parâmetro do filho é a média dos parâmetros correspondentes dos pais:

$$\theta_r^{filho} = \frac{\theta_r^1 + \theta_r^2}{2}. \quad (31)$$

O mesmo vale para os demais parâmetros do modelo adotado.

3.2.5 MUTAÇÃO

Como o algoritmo genético trabalha com codificação real, a mutação consiste em adicionar uma pequena variação nos valores dos parâmetros. Para cada parâmetro do indivíduo, há uma probabilidade de ocorrer mutação:

$$p^{mutado} = p^{original} + \delta, \quad (32)$$

em que δ é uma perturbação aleatória pequena.

Exemplo numérico: Antes: $\theta_s = 0.450$; após mutação: $\theta_s = 0.453$ (variação de 0.003).

3.2.6 ELITISMO

O elitismo preserva os melhores indivíduos da geração atual, garantindo que eles passem intactos para a próxima geração. Isso evita que boas soluções sejam perdidas após o uso dos operadores genéticos, cruzamento e mutação.

4 RESULTADOS

Para validar a metodologia proposta, foram realizadas simulações numéricas considerando um problema de infiltração vertical unidimensional em uma coluna de solo com 40 cm de profundidade, conforme apresentado em Celia, Bouloutas e Zarba (1990). O modelo de Haverkamp foi utilizado para descrever as curvas de retenção e de condutividade hidráulica, com os seguintes parâmetros: $\theta_r = 0,075$, $\theta_s = 0,287$, $K_s = 0,00944$ cm/s, $\alpha_h = 1611000,0$,

$\beta_h = 3,96$, $A_h = 1175000,0$, $\gamma_h = 4,74$. As condições de contorno impostas foram $\psi_m(t, 0) = -20,7$ cm ($\theta = 0,26756$) no topo da coluna e $\psi_m(t, 40) = -61,5$ cm ($\theta = 0,09985$) na base. A condição inicial adotada foi $\psi_m(0, z) = -61,5$ cm ($\theta = 0,09985$) para todo o domínio.

Ressalta-se que os dados de umidade utilizados na etapa de análise inversa foram gerados sinteticamente a partir da solução do problema direto, considerando o conjunto de parâmetros hidráulicos previamente definidos, os quais caracterizam um solo equivalente do ponto de vista hidráulico. As condições iniciais e de contorno impostas configuram uma situação de infiltração vertical em um solo inicialmente mais seco, representativa de processos típicos de molhamento, como eventos de irrigação ou recarga hídrica.

A extração de dados de umidade em múltiplas profundidades ao longo do perfil simula uma disposição realista de sensores em uma coluna de solo. Por se tratarem de dados sintéticos, não há influência de ruídos instrumentais nem necessidade de calibração de sensores, permitindo avaliar o desempenho da metodologia de análise inversa em um ambiente controlado e fisicamente consistente.

4.1 SIMULAÇÃO COM ESQUEMA IMPLÍCITO

Para a obtenção da solução numérica da equação de Richards, empregou-se o método das diferenças finitas com um esquema temporal implícito, utilizando o processo iterativo de Picard. A malha espacial foi definida com incremento $\Delta z = 1,0$ cm, totalizando 41 nós ao longo da coluna de solo, enquanto o passo temporal adotado foi de $\Delta t = 5,0$ s. As simulações foram conduzidas para três diferentes intervalos de tempo: $T = 180$ s, $T = 360$ s e $T = 720$ s.

Conforme ilustrado na Figura 3, observa-se o comportamento característico da infiltração de água no solo, com uma frente de umidade bem definida que progride em profundidade ao longo do tempo. A evolução temporal da infiltração pode ser observada nas diferentes curvas: aos 180 s (curva tracejada em vermelho), a frente de umedecimento penetra até aproximadamente 15 cm; aos 360 s (curva tracejada em amarelo), alcança cerca de 18 cm; e aos 720 s (curva com marcadores circulares em azul), atinge aproximadamente 22 cm de profundidade. Essa desaceleração progressiva do avanço é esperada e está em conformidade com a física do processo de infiltração. Vale destacar que tal dinâmica é fortemente influenciada pelo tipo de solo. Em solos arenosos, por exemplo, a alta condutividade hidráulica resulta em uma frente mais nítida e em um avanço mais rápido. Por outro lado, em solos argilosos, a frente tende a ser mais difusa e a infiltração ocorre de forma mais lenta, conforme exemplificado por Hillel (1980, p. 20).

4.2 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA NUMÉRICA

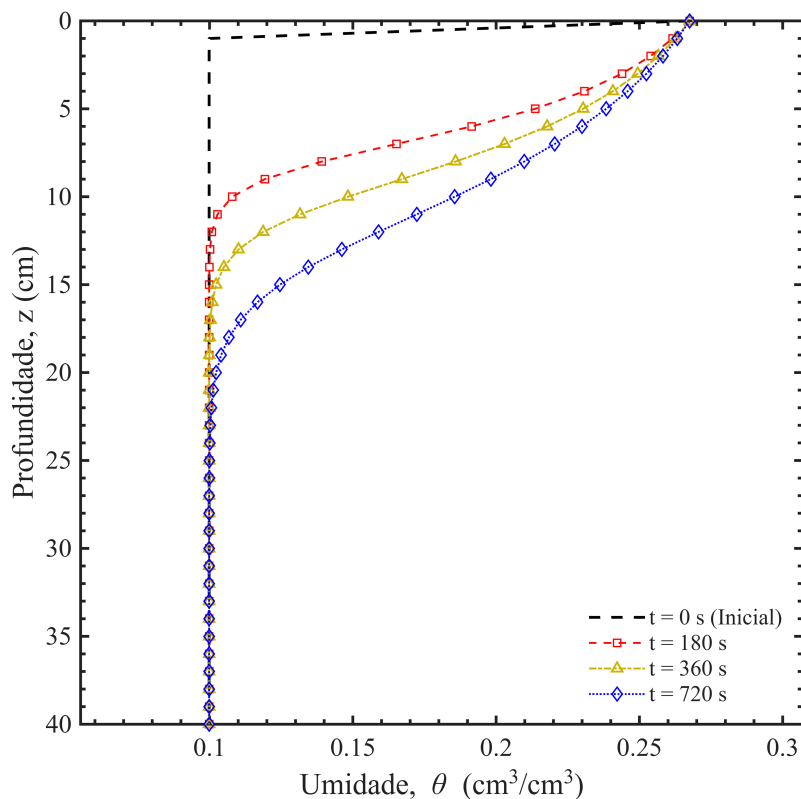
Para verificar se o método numérico está funcionando corretamente, é necessário realizar uma análise de convergência (Roache, 1998). Essa análise consiste em refinar progressivamente o passo de tempo (Δt) e observar como o erro da solução numérica diminui (Ferziger; Perić; Street, 2002). Neste estudo, manteve-se fixa a discretização espacial ($\Delta z = 1,0$ cm) e foram testados quatro passos de tempo diferentes: 1,0 s, 0,2 s, 0,04 s e 0,008 s.

Para quantificar o erro entre soluções consecutivas, utilizou-se a norma L_2 , uma métrica amplamente empregada em análises numéricas (Burden; Faires, 2010, p. 439):

$$\|e\|_{L_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\theta_i^{n+1} - \theta_i^n)^2}{\sum_{i=1}^n (\theta_i^{n+1})^2}}, \quad (33)$$

em que θ_i^{n+1} representa a solução obtida com o passo de tempo mais refinado e θ_i^n a solução com o passo de tempo anterior.

Figura 3 – Simulação numérica com o esquema implícito



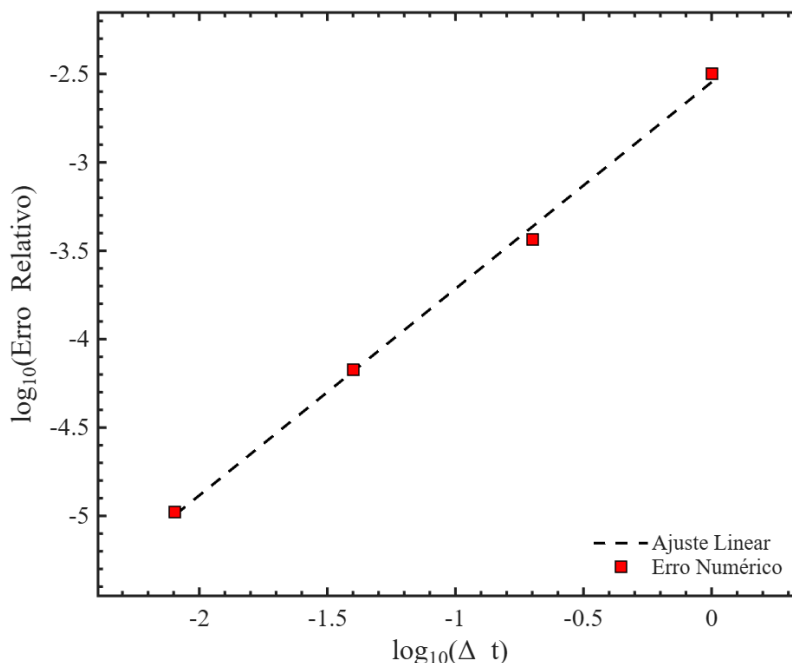
Fonte: Autores (2025).

A Figura 4 apresenta os resultados em escala logarítmica, um tipo de gráfico que facilita a identificação da taxa de convergência do método (Oberkampf; Roy, 2010). Quando os pontos formam uma linha reta nessa escala, a inclinação dessa reta indica a ordem de precisão do método numérico. No presente caso, a equação da reta ajustada aos dados foi $y = 1,1690x - 2,5461$, com um coeficiente de determinação $R^2 = 0,9975$.

A inclinação de aproximadamente 1,17 é particularmente importante, pois ela confirma que o método possui convergência de primeira ordem, ou seja, $O(\Delta t)$ (Hairer; Wanner, 1996; Butcher, 2016). Em termos práticos, isso significa que, ao reduzir o passo de tempo pela metade, o erro também é reduzido aproximadamente pela metade. Esse comportamento é exatamente o esperado para o esquema de Euler implícito, validando a implementação computacional realizada.

Além disso, o valor de $R^2 = 0,9975$ (muito próximo de 1) indica que os dados experimentais seguem com alta fidelidade o comportamento teórico previsto (Roy, 2005; Celik *et al.*, 2008). Isso demonstra que o solver numérico desenvolvido é estável, consistente e apresenta o desempenho esperado quando submetido ao refinamento da malha temporal.

Figura 4 – Convergência do método implícito



Fonte: Autores (2025).

4.3 ACOPLAMENTO DO AG AO MDF

A análise inversa foi conduzida utilizando o algoritmo genético acoplado ao método das diferenças finitas implícito. O algoritmo foi implementado com população de 30 indivíduos, 50 gerações, taxa de cruzamento (p_c) entre 60% e 80%, e taxa de mutação (p_m) entre 20% e 40%.

O algoritmo genético foi configurado inicialmente para estimar quatro parâmetros do modelo de Haverkamp (θ_r , θ_s , K_s e β_h), mantendo os demais (α_h , A_h e γ_h) fixos em seus valores verdadeiros. Os domínios de busca estabelecidos foram: $\theta_r \in [0, 0001; 0, 1]$, $\theta_s \in [0, 2; 0, 5]$, $K_s \in [0, 0001; 0, 1]$ cm/s e $\beta_h \in [1, 0; 5, 0]$.

Os dados observados foram gerados sinteticamente pela solução do problema direto com parâmetros verdadeiros conhecidos. Extraíram-se valores de umidade em oito profundidades ($z = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$ e 40 cm) no instante $t = 720$ s, simulando uma configuração realista com sensores de umidade instalados ao longo do perfil do solo.

O primeiro teste do algoritmo genético focou na estimação de quatro parâmetros do modelo de Haverkamp (θ_r , θ_s , K_s e β_h), mantendo fixos os demais (α_h , A_h e γ_h) em seus valores verdadeiros. Os resultados quantitativos são apresentados na Tabela 1, enquanto a representação gráfica do perfil de umidade pode ser observada na Figura 5.

Nesta primeira simulação, o algoritmo genético acoplado ao método das diferenças finitas implícito obteve um desempenho adequado na estimativa dos parâmetros hidráulicos do solo, com o coeficiente de determinação $R^2 = 0,996528$, refletindo uma concordância razoável entre os perfis de umidade observados e simulados, embora inferior ao esperado em cenários ideais. Os erros absolutos variam entre os parâmetros, com θ_r em 0,0078 sugerindo uma superestimação moderada do conteúdo residual, possivelmente ligada à menor influência desse parâmetro no estágio inicial da infiltração onde os dados foram capturados, enquanto θ_s com 0,0216 indica desvio maior no conteúdo saturado, central para o avanço da frente de umedecimento e potencialmente afetado por interações não lineares no

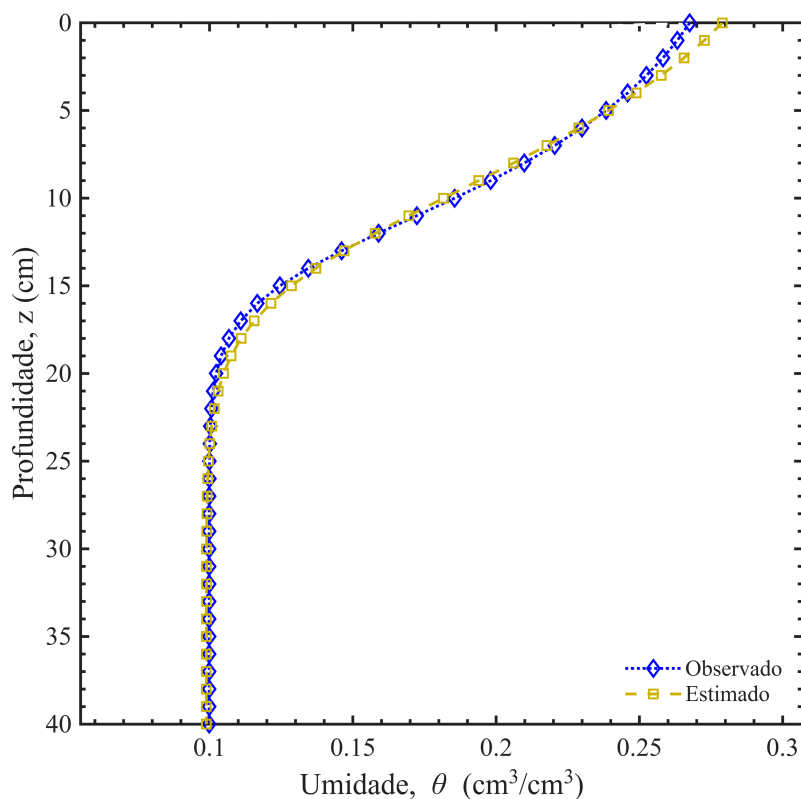
Tabela 1 – Comparação entre parâmetros verdadeiros e estimados pelo algoritmo genético

Parâmetro	Valor Observado	Valor Estimado	Erro Absoluto
θ_r	0,0750	0,0828	0,0078
θ_s	0,2870	0,3086	0,0216
K_s	0,0094	0,0108	0,0014
β_h	3,9600	4,0926	0,1326

Coefficiente de determinação: $R^2 = 0,996528$

Fonte: Autores (2025).

Figura 5 – Simulação do perfil de umidade com 4 parâmetros estimados



Fonte: Autores (2025).

modelo; já K_s com 0,0014 aponta para superestimação da condutividade saturada, relacionada à dependência com β_h e à limitação dos dados a um único instante, e β_h com 0,1326 demonstra o maior erro absoluto, essencial para a forma da curva de retenção, o que pode comprometer a precisão em simulações de longo prazo.

Do ponto de vista qualitativo, a Figura 5 demonstra que o algoritmo foi capaz de capturar a estrutura geral do perfil de infiltração, sem desvios sistemáticos aparentes entre os valores estimados e observados. O ajuste mantém-se consistente tanto nas camadas superficiais, dominadas pela proximidade com a condição de contorno superior, quanto em profundidades intermediárias, onde a propagação da frente de molhamento é governada pela interação entre os

parâmetros estimados. A ausência de distorções significativas ou padrões de erro ao longo do perfil sugere que, mesmo com os erros individuais nos parâmetros reportados, suas combinações resultam em previsões fisicamente coerentes do processo de redistribuição de água no solo. Este resultado inicial valida a aplicabilidade da metodologia para cenários com espaço paramétrico reduzido, estabelecendo uma base sólida para a expansão gradual rumo à estimação simultânea de um número maior de parâmetros.

O segundo teste visou estimar cinco parâmetros do modelo de Haverkamp (θ_r , θ_s , K_s , β_h e α_h), mantendo os demais (A_h e γ_h) fixos em seus valores verdadeiros. Os domínios de busca foram mantidos para os quatro parâmetros iniciais: $\theta_r \in [0, 0001; 0, 1]$, $\theta_s \in [0, 2; 0, 5]$, $K_s \in [0, 0001; 0, 1]$ cm/s e $\beta_h \in [1, 0; 5, 0]$, com a adição de $\alpha_h \in [1, 0; 10, 0]$. As demais configurações do algoritmo genético foram mantidas idênticas ao teste anterior, preservando o tamanho da população, as taxas de cruzamento e mutação, e o número de gerações. A Tabela 2 apresenta a comparação entre os valores verdadeiros e os estimados a partir da metodologia proposta, enquanto a Figura 6 apresenta o perfil de umidade utilizando os parâmetros estimados e os dados observados.

Tabela 2 – Comparação entre parâmetros verdadeiros e estimados pelo algoritmo genético, com erro absoluto.

Parâmetro	Valor Observado	Valor Estimado	Erro Absoluto
θ_r	0,0750	0,0851	0,0101
θ_s	0,2870	0,3084	0,0214
K_s	0,0094	0,0115	0,0020
β_h	3,9600	4,1712	0,2191
α_h	1611000	1913700	302710
Coefficiente de determinação: $R^2 = 0,995499$			

Fonte: Autores (2025).

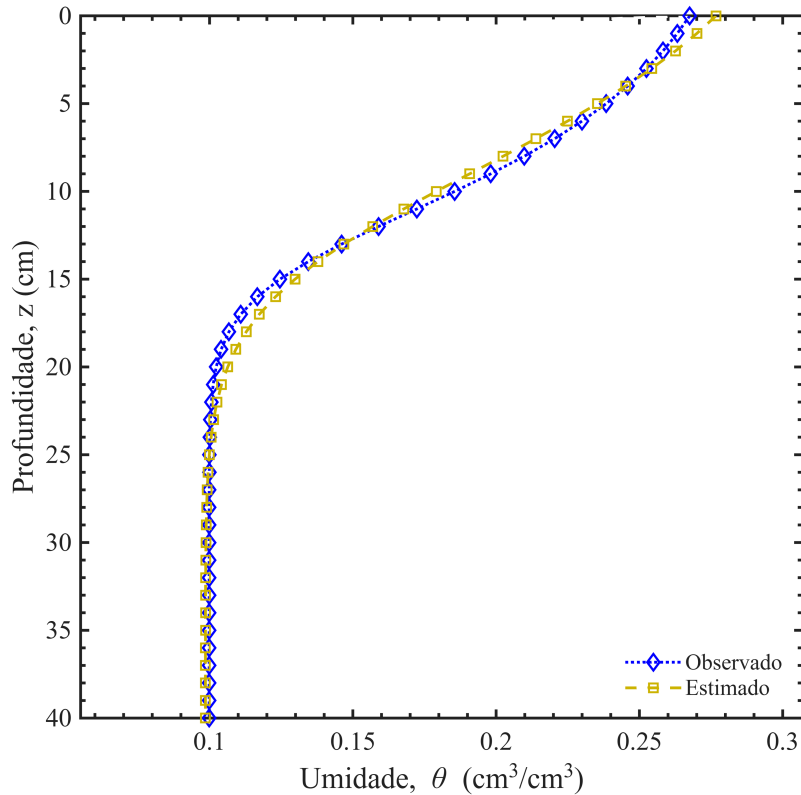
A estimação de cinco parâmetros, incluindo agora α_h , ampliou a complexidade do problema devido à magnitude elevada deste parâmetro (da ordem de 10^6) e sua forte influência sobre a pressão capilar no solo. A expansão do espaço de busca naturalmente elevou a complexidade, e os resultados mostram um aumento moderado nos erros em comparação com o cenário de quatro parâmetros.

Nota-se uma superestimação consistente em todos os parâmetros, especialmente em α_h , cujo erro absoluto é grande em magnitude, mas que, em termos relativos, pode não impactar drasticamente a forma da curva de umidade. O coeficiente de determinação permaneceu alto ($R^2 = 0,995499$), indicando que o modelo ainda se ajusta bem aos dados observados, embora um pouco menos preciso que no teste com quatro parâmetros.

A Figura 6, assim como a Figura 5, confirma visualmente essa aderência adequada entre os perfis observados (curva pontilhada azul) e estimado (curva trecejada em laranja), com ambas as curvas praticamente sobrepostas ao longo de toda a profundidade do solo. A concordância é notável principalmente na zona de transição da frente de umedecimento, entre 15 e 25 cm de profundidade, onde o gradiente de umidade é mais acentuado e a sensibilidade aos parâmetros hidráulicos é maior.

Apesar dos erros absolutos identificados na Tabela 2, o perfil simulado captura satisfatoriamente tanto a região próxima à superfície, onde a umidade se aproxima da saturação, quanto as camadas mais profundas, onde o conteúdo de água diminui gradualmente. Essa representação gráfica evidencia que, mesmo com a inclusão de α_h e o consequente aumento da complexidade do problema inverso, o algoritmo genético foi capaz de produzir um conjunto de parâmetros que reproduz adequadamente o comportamento físico da infiltração de água no solo no instante analisado.

Figura 6 – Simulação do perfil de umidade com 5 parâmetros estimados



Fonte: Autores (2025).

Isso mostra que a inclusão de mais parâmetros, sem ampliar a variedade de dados ou os instantes de medição, pode levar a compensações entre eles, pois o algoritmo ajusta um conjunto para reproduzir o perfil observado. A estimativa de α_h , em particular, fica mais sensível devido à sua escala e à influência conjunta com β_h e K_s .

Importante salientar que o presente estudo tem caráter metodológico e visou explorar um cenário sintético representativo, sendo a investigação sistemática da sensibilidade do método a diferentes tipos de solo, resoluções espaciais e temporais um desdobramento natural da abordagem proposta.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi desenvolvida e avaliada uma metodologia de análise inversa baseada no acoplamento entre algoritmos genéticos e a equação de Richards, resolvida numericamente por meio do método das diferenças finitas com esquema implícito e iterações de Picard. A abordagem foi avaliada a partir de dados sintéticos de umidade do solo, com o objetivo de investigar a eficiência, a estabilidade numérica e a robustez do método na estimativa de parâmetros físico-hídricos essenciais à simulação do fluxo de água em meios não saturados.

Os resultados obtidos demonstram que a metodologia proposta é numericamente estável, computacionalmente viável e capaz de estimar, com elevada precisão, os parâmetros do modelo de Haverkamp, apresentando coeficientes de determinação próximos da unidade, mesmo em cenários com maior número de parâmetros e na presença de ruído nos

dados. Observou-se, entretanto, que alguns parâmetros apresentam menor identificabilidade, especialmente quando fortemente correlacionados ou pouco sensíveis aos perfis de umidade considerados, característica inerente a problemas inversos mal-condicionados. Esses aspectos ressaltam a importância da análise de sensibilidade e da escolha criteriosa de dados observacionais, tanto no espaço quanto no tempo.

A principal contribuição da metodologia apresentada reside na redução substancial do tempo necessário para a caracterização hidráulica do solo, tradicionalmente realizada por ensaios laboratoriais demorados, como aqueles empregados na obtenção direta das curvas de retenção e condutividade hidráulica. Embora o presente estudo tenha sido conduzido com dados sintéticos, a abordagem é geral e pode ser aplicada a diferentes fontes de dados experimentais, incluindo medições *in situ* de umidade do solo. Nesses casos, ressalta-se que a adequada calibração dos sensores e a consideração das características específicas do solo são fundamentais para a correta interpretação dos parâmetros estimados.

Dessa forma, os resultados apresentados não apenas evidenciam a eficiência do algoritmo genético na resolução de problemas inversos associados à equação de Richards, como também reforçam o potencial da análise inversa como uma ferramenta robusta e flexível para a estimativa de parâmetros físico-hídricos do solo em diferentes contextos de modelagem e monitoramento ambiental.

REFERÊNCIAS

BROOKS, R.; COREY, Arthur T. **Hydraulic Properties of Porous Media**. Fort Collins, Colorado: Colorado State University, 1964.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Numerical Analysis**. 9. ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2010.

BUTCHER, John C. **Numerical Methods for Ordinary Differential Equations**. 3. ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2016.

CAVIEDES-VOULLIÈME, Daniel; GARCÍA-NAVARRO, Pilar; MURILLO, Javier. Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation. **Journal of Hydrology**, v. 480, p. 69–84, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.12.008>.

CELIA, Michael A.; BOULOUTAS, Efthimios T.; ZARBA, Rebecca L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. **Water Resources Research**, v. 26, n. 7, p. 1483–1496, 1990. DOI: <https://doi.org/10.1029/WR026i007p01483>.

CELIK, Ismail B.; GHIA, Urmila; ROACHE, Patrick J.; FREITAS, Christopher J.; COLEMAN, Hugh; RAAD, Peter E. Procedure for Estimation and Reporting of Uncertainty Due to Discretization in CFD Applications. **Journal of Fluids Engineering**, v. 130, n. 7, p. 078001, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2960953>.

EMBRAPA. **VII Plano Diretor da Embrapa 2020-2030**. Brasília, DF, 29 out. 2020. Disponível em: <https://www.infoteca.cnptia.embrapa.br/infoteca/bitstream/doc/1126091/1/VII-PDE-2020.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2025.

FERZIGER, Joel H.; PERIĆ, Milovan; STREET, Robert L. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2002.

GOLDBERG, David E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. Boston, MA: Addison Wesley, 1989.

HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard. **Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems**. 2. ed. Berlin: Springer, 1996.

HAVERKAMP, R.; VAUCLIN, M.; TOUMA, J.; WIERENGA, P. J.; VACHAUD, G. A Comparison of Numerical Simulation Models for One-Dimensional Infiltration. **Soil Science Society of America Journal**, v. 41, n. 2, p. 285–294, 1977. DOI: <https://doi.org/10.2136/sssaj1977.03615995004100020024x>.

HILLEL, Daniel. **Applications of Soil Physics**. New York: Academic Press, 1980.

HOLLAND, John Henry. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1975.

JURY, William A.; HORTON, Robert. **Soil Physics**. 6. ed. Hoboken, NJ: John Wiley e Sons, 2004.

KLAR, A. E. **A água no sistema solo-planta-atmosfera**. [S. l.]: Nobel, 1988. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=6EtQygAACAAJ>. Acesso em: 27 nov. 2025.

KROES, J. G.; VAN DAM, J. C.; BARTHOLOMEUS, R. P.; GROENENDIJK, P.; HEINEN, M.; HENDRIKS, R. F. A.; MULDER, H. M.; SUPIT, I.; VAN WALSUM, P. E. V. **SWAP Version 4: theory description and user manual**. Wageningen: Wageningen Environmental Research, 2017.

LIBARDI, Paulo Leonel. **Dinâmica da Água no Solo**. 1. ed. São Paulo, SP: Edusp, 2005.

MICHALEWICZ, Zbigniew. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. 3. ed. Berlin, Germany: Springer, 2013.

OBERKAMPF, William L.; ROY, Christopher J. **Verification and Validation in Scientific Computing**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.

QUEIRÓZ, Bruno Freitas de. **Estudo de soluções numéricas da equação de Richards através do método de elementos finitos e diferenças finitas para simulação de fluxo unidimensional em solo não-saturado**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 24 ago. 2017. Disponível em: <http://rima.ufrj.br/jspui/handle/20.500.14407/14320>. Acesso em: 8 jan. 2026.

REIS MOURA, Mario Jorge dos; SOUZA TEIXEIRA, Renan de; SANTOS, Wilian Jeronimo dos. Avaliação de métodos iterativos aplicados à equação de Richards com diferentes níveis de saturação. **Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza**, v. 6, n. 1, p. 1–8, 2022.

RICHARDS, L. A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. **Physics**, v. 1, p. 318–333, 1931. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1745010>.

ROACHE, Patrick J. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**. Albuquerque, NM: Hermosa Publishers, 1998.

ROY, Christopher J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. **Journal of Computational Physics**, v. 205, n. 1, p. 131–156, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.10.036>.

SANTOS, Danilo Vasconceilos dos; SOUZA TEIXEIRA, Renan de; OLIVEIRA, Rosane Ferreira de; SANTOS, Wiliam Jeronimo dos. Uma aplicação de algoritmos genéticos e do método das diferenças finitas na identificação de parâmetros hídricos do solo. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2025, Alegre, ES. **Anais [...]**. Alegre: UFES, 2025. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/ermac2025/1125683-UMA-APLICACAO-DE-ALGORITMOS-GENETICOS-E-DO-METODO-DAS-DIFERENCAS-FINITAS-NA-IDENTIFICACAO-DE-PARAMETROS-HIDRICOS>. Acesso em: 4 fev. 2026.

ŠIMŮNEK, J.; ŠEJNA, M.; SAITO, H.; SAKAI, M.; VAN GENUCHTEN, M. Th. **The HYDRUS-1D software package for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media**. Riverside, California: University of California, 2013.

SOUZA, Isabela de Aquino. **Estudos de soluções numéricas para a equação de Richards através do método de volumes finitos para simulação de fluxo unidimensional**: um estudo de campo. 2020. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 30 jun. 2020. Disponível em: <http://rima.ufrrj.br/jspui/handle/20.500.14407/14348>. Acesso em: 22 dez. 2025.

VAN GENUCHTEN, M. Th. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. **Soil Science Society of America Journal**, v. 44, n. 5, p. 892–898, 1980. DOI: <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>.

SOBRE OS AUTORES

Esp. Danilo Vasconceilos dos Santos



<https://orcid.org/0009-0003-5068-9950>



<http://lattes.cnpq.br/8735113486789477>

Contato: Vasconceilos@ufrrj.br

Contribuição autoral: administração do projeto; análise formal; conceituação; curadoria de dados; escrita – primeira redação; escrita – revisão e edição; investigação.

Dr. Wilian Jeronimo dos Santos



<https://orcid.org/0000-0001-5602-646X>



<http://lattes.cnpq.br/5298677032432741>

Contato: wilianj@ufrrj.br

Contribuição autoral: administração do projeto; análise formal; conceituação; curadoria de dados; escrita – revisão e edição; investigação; metodologia; validação; visualização.

Dr. Renan de Souza Teixeira



<https://orcid.org/0000-0003-1700-6874>



<http://lattes.cnpq.br/3136664285679846>

Contato: rsteixeira@ufrrj.br

Contribuição autoral: análise formal; escrita – revisão e edição; visualização.

Dra. Rosane Ferreira de Oliveira



<https://orcid.org/0000-0003-0495-7339>



<http://lattes.cnpq.br/1677695285426749>

Contato: rosaneol@uol.com.br

Contribuição autoral: análise formal; escrita – revisão e edição; visualização.

Revisor de texto: Francisco Gomes Martins