UMA INTRODUÇÃO GEOMÉTRICA DA HOLONOMIA E DE FOLHEAÇÕES GERADAS POR CAMPOS VETORIAIS E SUAS RELAÇÕES LOCAIS

A GEOMETRIC INTRODUCTION TO HOLONOMY AND TO FOLIATIONS GENERATED BY VECTOR FIELDS AND LOCAL RELATIONS

UNA INTRODUCCIÓN GEOMÉTRICA A LA HOLONOMÍA Y A LAS FOLIACIONES GENERADAS POR CAMPOS VECTORIALES Y SU CONEXIÓN

Francisco Icaro Maciel Forte Chaves[1], Francisco Régis Vieira Alves[2]

[1] Universidade Estadual do Ceará (UECE), Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Quixadá, Ceará, Brasil.

[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Campus Fortaleza, Fortaleza, Ceará, Brasil.

Data de submissão: 30 jun. 2025. Data de aprovação: 28 maio 2026. Financiamento: o segundo autor foi bolsista produtividade em pesquisa CNPq, nível PQ2 (2020–2026) e nível 1C (2026–2029). Como citar: CHAVES, Francisco Icaro Maciel Forte; ALVES, Francisco Régis Vieira. Uma introdução geométrica da holonomia e de folheações geradas por campos vetoriais e suas relações locais. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 12, p. e302, 6 jul. 2026. https://doi.org/10.35819/remat2026v12id7793.

Este artigo está licenciado sob uma licença *Creative Commons Attribution 4.0 International License*.

Resumo: Neste trabalho, apresentamos os conceitos de folheação, holonomia e a relação local entre holonomia e folheações associadas a campos vetoriais singulares. Ao restringirmos nossa abordagem ao caso de folheações geradas por campos vetoriais, obtemos uma simplificação significativa na definição da aplicação de holonomia, o que contribui para uma leitura mais clara e uma compreensão mais acessível. Considerando que esses tópicos não fazem parte do currículo tradicional da graduação, adotamos uma abordagem essencialmente geométrica, apoiada no uso dos softwares livres GeoGebra e TeXmacs, com o intuito de tornar esses conceitos mais intuitivos e visualmente compreensíveis. Por fim, o presente texto busca introduzir os fundamentos da classificação local de folheações associadas a campos vetoriais e fornecer referências bibliográficas que permitam ao leitor interessado aprofundar seus estudos na área.
Palavras-chave: holonomia; folheação; campo vetorial; singularidade; classificação local.

Abstract: This paper introduces the fundamental concepts of foliations and holonomy, emphasizing the local relation between holonomy groups and analitic classification for foliations generated by singular vector fields. By restricting our analysis to foliations induced by vector fields, we substantially simplify the definitions of the holonomy map, thereby fostering a more accessible and lucid comprehension of the underlying theory. Recognizing that these subjects frequently fall outside the scope of standard undergraduate curricula, we employ a predominantly geometric methodology. This approach is augmented by the open-source platforms GeoGebra and TeXmacs, which serve to translate abstract structures into intuitive visual representations. Ultimately, this exposition aims to establish the foundational principles governing the local classification of vector-field-induced foliations, whilst offering comprehensive bibliographic directives for readers pursuing advanced studies in this domain.
Keywords: holonomy; foliation; vector field; singularity; local classification.

Resumen: En este trabajo, presentamos los conceptos de foliación, holonomía y la relación local entre la holonomía y las foliaciones asociadas a campos vectoriales singulares. Al restringir nuestro enfoque al caso de foliaciones generadas por campos vectoriales, logramos una simplificación significativa en la definición de la aplicación de holonomía, lo que contribuye a una lectura más clara y una comprensión más accesible. Dado que estos temas no forman parte del currículo habitual de los cursos de grado, adoptamos un enfoque esencialmente geométrico, apoyado en el uso de los programas de software libre GeoGebra y TeXmacs, con el objetivo de hacer estos conceptos más intuitivos y comprensibles visualmente. Finalmente, este texto busca introducir los fundamentos de la clasificación local de foliaciones asociadas a campos vectoriales y proporcionar referencias bibliográficas para los lectores interesados en profundizar en el tema.
Palabras clave: holonomía; foliación; campo vectorial; singularidad; clasificación local.

1 INTRODUÇÃO

O estudo das folheações e de seus objetos correlatos representa uma das áreas de investigação mais proeminentes na matemática atual, dedicando-se a compreender como determinados espaços podem ser decompostos em subconjuntos de dimensões menores, as chamadas folhas. Contudo, o denso rigor formal intrínseco à definição dessas estruturas muitas vezes impõe obstáculos conceituais, dissociando a intuição geométrica da necessária abstração algébrica.

Diante dessa problemática, este artigo apresenta uma proposta eminentemente introdutória, na qual se opta por evitar as definições em um primeiro momento, privilegiando a construção do conhecimento por meio de exemplos sucessivos. Esta escolha metodológica visa permitir que o leitor desenvolva uma percepção visual e intuitiva antes de se confrontar com o formalismo teórico.

Para operacionalizar essa proposta, o presente trabalho utiliza o *software* GeoGebra como metodologia de visualização geométrica. A natureza dinâmica deste *software* permite converter as equações diferenciais e os campos de direções em representações gráficas interativas, possibilitando a observação da deformação das folhas e do comportamento da holonomia em tempo real. Com o intuito de permitir que o leitor interessado replique essa metodologia, os *links* para acesso às construções serão fornecidos nas legendas das figuras. Dessa forma, busca-se preencher a lacuna entre a teoria analítica e a percepção espacial necessária para o domínio da geometria das folheações.

Uma vez estabelecida a base metodológica deste trabalho, apresentaremos brevemente a relação entre a holonomia e a equivalência de folheações. O resultado que sintetiza essa correlação para o caso regular é enunciado na Proposição 1, cuja formulação aqui apresentada foi simplificada[1].

[1] A formulação rigorosa deste resultado exige o domínio de conceitos como germes de folhas, folheações e variedades complexas. Embora a versão aqui exposta abdique do formalismo estrito, ela preserva a essência fenomenológica do objeto. Para uma análise precisa e completa, recomenda-se a consulta ao Teorema 2, capítulo IV de Camacho e Lins Neto (1985).

Proposição 1 *Sejam $\mathcal{F}_i$ folheações complexas, $\mathcal{L}_i$ folhas de $\mathcal{F}_i$ e p_i pontos de $\mathcal{L}_i$, para $i = 1, 2$. Os grupos de holonomia $H(\mathcal{L}_1, p_1)$ e $H(\mathcal{L}_2, p_2)$ são conjugados se, e somente se, existe uma aplicação bianalítica Φ, tal que $\Phi(p_1) = p_2$, que mapeia localmente folhas de $\mathcal{F}_1$ em folhas de $\mathcal{F}_2$.*

Dessa forma, torna-se evidente a relevância do estudo das holonomias, visto que a classificação analítica de folheações é equivalente à conjugação de seus respectivos grupos de holonomia.

No cenário das folheações singulares, entretanto, essa correlação apresenta uma complexidade significativamente maior. Apesar de a extensão deste resultado ainda constituir um problema em aberto, o desenvolvimento de novas técnicas tem sido constante. Destacam-se, em particular, as contribuições de Mattei e Moussu (1980) e Martinet e Ramis (1982), cujas pesquisas representam marcos fundamentais para o entendimento de folheações de dimensão complexa dois. Ambas as obras introduziram ferramentas que viabilizaram progressos em diversos domínios relacionados à holonomia e à geometria das folheações.

Alguns anos depois, Elizarov e Ilyashenko (1984) e Reis (2006) trataram sobre folheações geradas por campos vetoriais (tema a ser tratado adiante). Em especial, ambos provaram, por maneiras distintas, um resultado que conecta a holonomia à classificação de folheações analíticas complexas. Para isso, algumas exigências sobre os campos vetoriais que geram as folheações começaram a surgir, como, por exemplo, a necessidade de a singularidade ser isolada.

Mais recente, Diaw e Loray (2021) trataram não de uma única folheação, mas sim pares de folheação, introduzindo novas técnicas, posteriormente adaptadas nos estudos apresentados por Chaves (2021). Neste último, um dos avanços obtidos foi a remoção completa da necessidade da singularidade ser isolada. Entretanto, mesmo em dimensão 3, a resposta ainda não foi definitiva. Resta, portanto, a questão: sob quais condições impostas aos campos vetoriais geradores pode-se garantir a equivalência?

2 CAMPOS VETORIAIS E EDOS

Esta seção tem como objetivo formalizar a notação e os conceitos básicos sobre campos vetoriais. Além disso, são apresentados os resultados clássicos sobre equivalência de campos vetoriais com o objetivo de compreender as folheações que são geradas localmente por campos vetoriais. Para um aprofundamento destes conceitos, recomendamos Camacho e Lins Neto (1985).

Primeiramente, usamos $\mathcal{K}$ para denotar o corpo dos reais ou dos complexos, ou seja, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e assim escrevemos $\mathcal{K}^n$ para se referir ou a $\mathbb{R}^n$ ou a $\mathbb{C}^n$. Um campo vetorial é definido como uma aplicação do espaço $\mathcal{K}^n$ sobre ele mesmo, onde associamos a cada ponto no domínio um vetor na imagem. Destacamos que, apesar do domínio e da imagem serem $\mathcal{K}^n$, no domínio $\mathcal{K}^n$ denota um conjunto; já na imagem, incluímos as estruturas de espaço vetorial.

Nesse contexto, um campo vetorial $X : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$ pode ser expresso como:

$$X(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x_1(\mathbf{z}) \\ x_2(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ x_n(\mathbf{z}) \end{pmatrix} \tag{1}$$

onde cada $x_i : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}$ denota uma função, para $i = 1, \ldots, n$.

Definição 1 *Dizemos que o campo vetorial X é analítico quando as funções x_i são todas analíticas.*

Para maior precisão, seja U um conjunto aberto de $\mathcal{K}^n$ e $f : U \to \mathcal{K}$ uma função infinitamente diferenciável. A função f é dita *analítica* se, para cada ponto $x_0 \in U$, existir uma vizinhança $V_{x_0} \subset \mathcal{K}^n$ tal que f restrita em V_{x_0} pode ser escrita como a *série de potências*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Para aprofundamento nesse assunto, recomendamos Lima (1999), Ávila (2008) e Costa e Alves (2024).

Exemplo 1 *As funções reais $x \mapsto e^x$ e $x \mapsto \cos x$ são analíticas em $0 \in \mathbb{R}$. De fato, podemos escrever*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Os campos vetoriais admitem diversas interpretações; uma delas está relacionada diretamente às equações diferenciais ordinárias. Formalmente, sejam U um aberto de $\mathcal{K}^n$ e $X : U \to \mathcal{K}^n$ um campo vetorial analítico da forma (1). A *equação diferencial ordinária associada a* X, que é denotada por $\mathbf{z}' = X(\mathbf{z})$, é

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = x_1(z_1(t), \ldots, z_n(t)),$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial z_n}{\partial t} = x_n(z_1(t), \ldots, z_n(t)).$$

Dado um ponto $p \in U$, uma solução para uma a $\mathbf{z}' = X(\mathbf{z})$ é uma aplicação analítica $F_{X,p} : V \to U$, onde $V \subset \mathcal{K}$ é uma vizinhança aberta simplesmente conexa de $0 \in \mathcal{K}$, tal que, para todo $t \in V$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{X,p}(t)}{\partial t} &= X(F_{X,p}(t)), \\ F_{X,p}(0) &= p. \end{aligned} \tag{2}$$

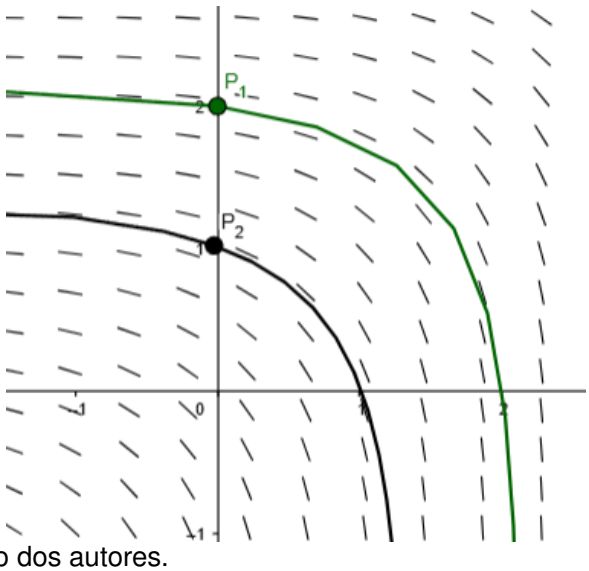
Tais soluções são denominadas *curvas integrais* de X *com valor inicial* $z(0) = p$, ou simplesmente curvas integrais de X quando o ponto base p pode ser omitido. A existência, unicidade e dependência diferencial do valor inicial de curvas integrais são temas bem explorados. Indicamos Sotomayor (2011) para um aprofundamento nesses temas.

Exemplo 2 *Seja o campo vetorial* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por*

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} e^y \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Na Figura 1, além de visualizar o campo vetorial X*, podemos ver duas curvas integrais da EDO associada ao campo* X*. A curva em verde é a curva integral com valor inicial* $p_1 = (0, 2)$*, já a curva em preto é a curva integral com valor inicial* $p_2 = (0, 1)$*.*

Figura 1 – Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, as curvas integrais têm como vetor tangente em p o vetor $X(p)$. Isto exprime a relação geométrica entre o campo vetorial e sua EDO associada.



Fonte: elaboração dos autores.

Link de acesso: `https://www.geogebra.org/calculator/yew3nmj2`.

A partir do entendimento da relação entre campos vetoriais e equações diferenciais ordiná-

rias, é relevante identificar as ferramentas matemáticas utilizadas para procurar soluções das equações do tipo (2). Nesse contexto, destacamos:

> Além disso, a maioria dos métodos de resolução de equações diferenciais consiste em encontrar uma mudança de variáveis que transformará uma dada equação em uma mais simples, para a qual as soluções são conhecidas. (Doubrov; Komrakov; Morimoto, 1999, p. 39, tradução nossa).

Definição 2 *Sejam dois campos vetoriais analíticos $X_1, X_2 : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$. Dizemos que X_1 é localmente analiticamente conjugado à X_2 em $p \in \mathcal{K}^n$ se existem abertos $V_1, V_2 \subset \mathcal{K}^n$, e uma aplicação bi-analítica (isto é, uma aplicação analítica com inversa também analítica) $\psi : V_1 \to V_2$ tal que $p \in V_1$, $\psi(p) \in V_2$, e*

$$\mathrm{d}\,\psi|_{\boldsymbol{z}} X_1(\boldsymbol{z}) = (X_2)(\psi(\boldsymbol{z})) \tag{3}$$

para todo $\boldsymbol{z} \in V_1$.

Conforme observado em Sotomayor (2011), as curvas integrais constituem elementos centrais no estudo das equações diferenciais. Portanto, é esperado que qualquer noção de equivalência preserve a estrutura dessas soluções. De fato, seja $F_{X_1,p}(t)$ uma solução da EDO associada a X_1 com o problema de valor inicial $z(0) = p$. Tomando a derivada em relação a t de $\psi(F_{X_1,p}(t))$, temos

$$(\psi(F_{X_1,p}(t))' = \mathrm{d}\,\psi|_{F_{X_1,p}}(t)\frac{\partial}{\partial_t}F_{X_1,p}(t) = \mathrm{d}\,\psi|_{F_{X_1,p}}(t)X_1(F_{X_1,p}(t))$$

$$= X_2(\psi(F_{X_1,p}(t)).$$

Então, $\psi(F_{X_1,p}(t))$ é a solução para o problema $\mathbf{z}' = X_2(\mathbf{z})$, com $z(0) = \psi(p)$.

Exemplo 3 *Os campos vetoriais $X_1, X_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dados por*

$$X_1(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y \end{pmatrix} \quad e \quad X_2(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

são localmente analiticamente conjugados em 0. De fato, a aplicação $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ y \end{pmatrix}$$

satisfaz que $\psi(0) = 0$ e a equação (3). De fato, a matriz jacobiana da derivada $\mathrm{d}\,\psi$ de ψ tem a forma

$$\mathrm{d}\,\psi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

assim,

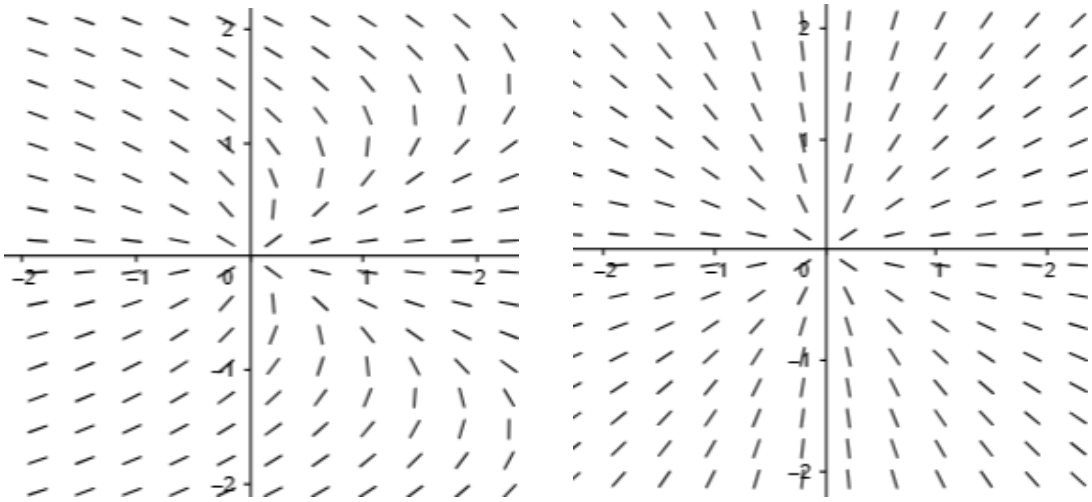
$$\mathrm{d}\,\psi|_{\boldsymbol{z}} X_1(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y^2 \\ y \end{pmatrix},$$

e

$$(X_2)(\psi(\mathbf{z})) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x-y^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y^2 \\ y \end{pmatrix}.$$

Isso comprova que a equação (3) *é satisfeita, o que demonstra que os campos X_1 e X_2 são localmente analiticamente conjugados na origem. A Figura 2 ilustra que, embora os campos apresentem comportamento semelhante na origem, diferem significativamente longe dela. Essa observação ressalta o caráter local do contexto considerado.*

Figura 2 – Os campos vetoriais X_1 e X_2 têm comportamento similar na origem, mas longe da origem, o comportamento é distinto.



(a) Imagem do campo X_1 (b) Imagem do campo X_2

Fonte: elaboração dos autores.

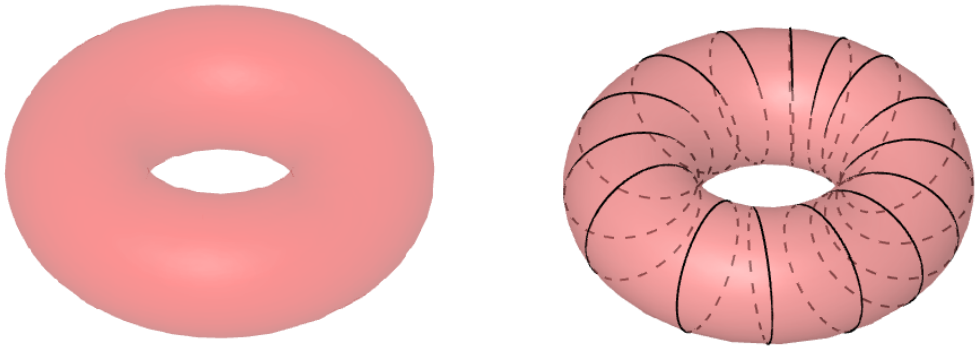
Link de acesso: `https://www.geogebra.org/calculator/yrbcsq65`.

3 FOLHEAÇÕES REGULARES E SINGULARES

Considerando o caráter introdutório deste estudo sobre o conceito de folheações, opta-se por evitar formalismos excessivos e enfatizar a intuição geométrica. Neste sentido, uma *folheação* de um conjunto $\mathcal{M}$ pode ser entendida como uma divisão de $\mathcal{M}$ em subconjuntos disjuntos chamados de *folhas*. Uma analogia ilustrativa pode ser feita com um livro, no qual cada página representa uma folha que, em conjunto, preenche o volume do livro.

Exemplo 4 *Considere o toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (veja a Figura 3(a)); chamamos de círculos meridionais os círculos que estão contidos nas interseções do toro $\mathbb{T}^2$ com os planos que contêm o eixo de rotação. A união desses círculos forma uma folheação do toro, como mostra a Figura 3(b).*

Figura 3 – O toro e a folheação meridional



(a) O toro $\mathbb{T}^2$ pode ser obtido a partir da rotação de um círculo cujo eixo de rotação é uma reta que não tem interseção com o círculo.

(b) Os círculos meridionais formam uma folheação de $\mathbb{T}^2$.

Fonte: imagens adaptadas de `https://www.geogebra.org/m/zcStVr8d`.

Exemplo 5 *Denotando por Oz o eixo z de $\mathbb{R}^3$, podemos definir uma folheação de $\mathbb{R}^3\backslash Oz$, onde as folhas são dadas pelas soluções da equação*

$$x^2 + y^2 = c, \tag{4}$$

para $c > 0$. Observe que, para cada constante c, a solução da equação 4, e, portanto, uma folha, é um cilindro de raio c centrado no eixo z. Na primeira imagem da Figura 4, podemos ver a folha gerada pela equação $x^2 + y^2 = 4$. Adicionalmente, dado um ponto $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3\backslash Oz$, temos que p está contido no conjunto solução da equação

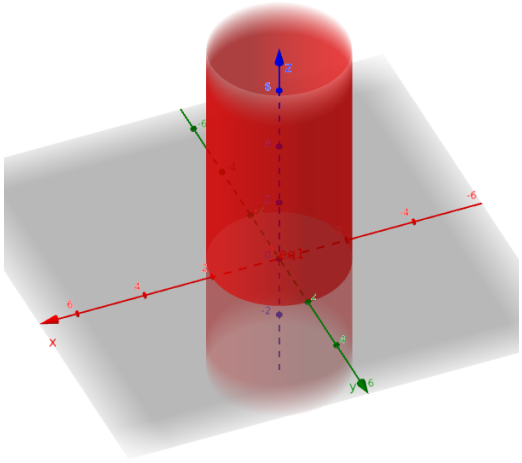
$$x^2 + y^2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Assim, conforme ilustrado na segunda imagem da Figura 4, o conjunto $\mathbb{R}^3\backslash Oz$ é uma união disjunta destes cilindros e, portanto, o conjunto solução das equações (4) é uma folheação para $\mathbb{R}^3\backslash Oz$.

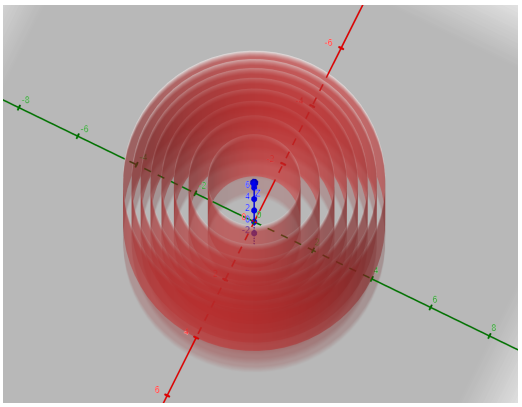
Observa-se que, para estender a folheação do Exemplo 5 para todo o $\mathbb{R}^3$ poderíamos adicionar o eixo Oz. Contudo, ao contrário das demais folhas que são cilindros, o eixo Oz tem apenas uma dimensão. Assim, quando as folhas de uma folheação têm dimensões iguais, como é o caso do Exemplo 4 onde todas as folhas eram círculos, dizemos que a folheação é *regular*, e, caso contrário, dizemos que a folheação é *singular*[2].

[2]Para uma definição precisa, recomendamos Rebelo e Reis (2011, p. 11).

Figura 4 – As folheações são uma divisão dos espaços em conjuntos que são dois a dois disjuntos.



(a) Cada folha é um cilindro vertical que envolve o eixo z. À medida que c cresce, os cilindros vão se expandindo, mas nunca se intersectam.



(b) A folheação é formada por infinitos cilindros que separam o $\mathbb{R}^3$ de maneira disjunta. Ou seja, os cilindros passam por todo o ponto do espaço de maneira única.

Fonte: elaboração dos autores.
Link de acesso: `https://www.geogebra.org/3d/a9c9jbxs`.

Além da abordagem utilizada até agora, na qual as folhas da folheação são descritas explicitamente, também é possível definir uma folheação por meio de equações diferenciais ordinárias. Como mencionado na Seção 2, para cada ponto no domínio do campo vetorial existe uma única curva integral associada. Dessa forma, se considerarmos as curvas integrais como as folhas, uma EDO naturalmente define uma folheação. Consequentemente, devido à relação entre campos vetoriais e sua EDO associada, podemos estabelecer uma folheação a partir de um campo vetorial.

Definição 3 *Dado um campo vetorial $X : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$, chamamos de folheação gerada por X a folheação denotada por $\mathcal{F}_X$ onde as folhas são curvas integrais da equação diferencial ordinária associada a X.*

Exemplo 6 *Considere o campo vetorial $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por*

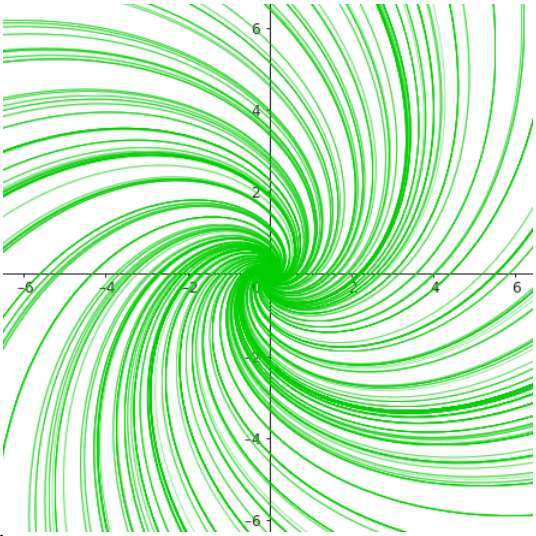
$$X(z) = \begin{pmatrix} -x - y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Por verificação direta, podemos ver que a aplicação $\varphi_{z_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi_{z_0}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}$$

é a curva integral de X com valor inicial $z_0 = (x_0, y_0)$. Dessa forma, a variação do ponto z_0 define a folheação $\mathcal{F}_X$, como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Campos vetoriais com folheações como acima são chamados de campos vetoriais com *foco estável*.



Fonte: elaboração dos autores.

Link de acesso: `https://www.geogebra.org/calculator/eqv7xn5z`.

Desde que campos vetoriais conjugados tenham suas curvas integrais preservadas, as folheações destes campos também são preservadas. Reciprocamente, qualquer definição de equivalência de folheações tem de preservar as folhas, isto é, as curvas integrais dos campos que geram a folheação. Consequentemente, folheações equivalentes definem campos vetoriais conjugados.

Definição 4 *Dizemos que duas folheações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ de um mesmo conjunto são localmente analiticamente equivalentes em p se existem vizinhanças de p, V_1 e V_2, e uma aplicação analítica $\Psi : V_1 \to V_2$, tal que $\Psi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$, e ela envia folhas de $\mathcal{F}_1|_{V_1}$ em folhas de $\mathcal{F}_2|_{V_2}$.*

Em termos intuitivos, duas folheações são consideradas equivalentes se podemos deformar uma na outra. Note que a deformação trabalhada é analítica. Isto implica que as suas estruturas diferenciais são preservadas; sendo assim, um campo de estudo da Geometria Diferencial, por exemplo. Alternativamente, é possível considerar apenas deformações contínuas. Neste caso, as estruturas diferenciais não são preservadas e as ferramentas matemáticas adequadas para tratar tais deformações são totalmente diferentes da Geometria Diferencial; nesse caso, o campo de estudo é a Topologia.

4 A APLICAÇÃO HOLONOMIA

Com o objetivo de contornar as dificuldades frequentemente associadas ao formalismo da Matemática Pura, será adotada uma abordagem baseada na intuição geométrica, evitando-se, sempre que possível, o tratamento algébrico dos conceitos. Essa abordagem permite contornar tópicos mais avançados, como o grupo fundamental. Por fim, como objetivo máximo desta seção, apresentaremos o que entendemos por grupo de Holonomia.

Antes de prosseguir com o desenvolvimento teórico, convencionamos que a partir de agora todas as folheações trabalhadas neste texto serão geradas por campos vetoriais.

Exemplo 7 *Dado o campo vetorial* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por:*

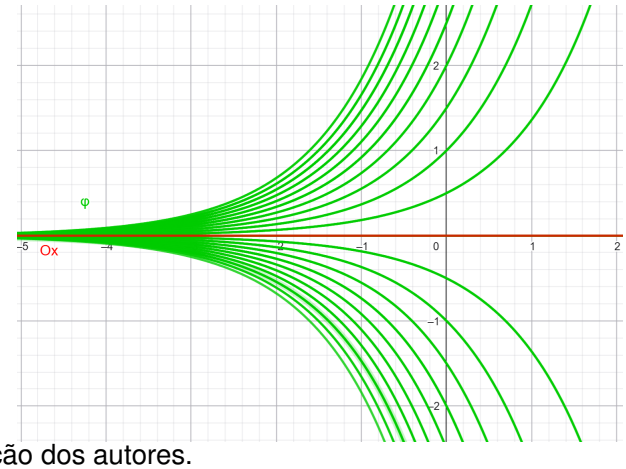
$$X(z) = \begin{pmatrix} y \\ y^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Note que fora do eixo x, esse campo possui família de curvas integrais dadas por

$$\Phi(t) = C \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}, \tag{6}$$

onde C *é uma constante real que parametriza as diferentes folhas regulares do sistema. Geometricamente, fora do eixo das abscissas, as curvas integrais assumem o formato de funções exponenciais.*

Figura 6 – Curvas integrais em verde, junto ao eixo em vermelho composto dos pontos singulares do campo.



Fonte: elaboração dos autores.
Link de acesso: `https://www.geogebra.org/calculator/qznvma3m`.

Por outro lado, os pontos singulares ocorrem onde o campo se anula, ou seja, o conjunto das singularidades de X *é a reta* $Ox = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$*. Conclui-se, portanto, que as singularidades*

não são isoladas. Além disso, apesar do eixo horizontal formar um conjunto com dimensão 1, como as curvas exponenciais, ele não é uma curva integral de X. De fato, suponha por absurdo que tal parametrização ϕ exista. Assim teríamos

$$0 = X(\phi(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t),$$

ou seja, $\phi(t)$ é uma constante e logo não pode ser uma parametrização do eixo x.

Este exemplo evidencia que as folheações dotadas de singularidades não isoladas apresentam um comportamento dinâmico substancialmente mais complexo quando comparadas àquelas com singularidades isoladas. Com efeito, a topologia do conjunto singular pode exibir uma riqueza estrutural significativamente maior do que a de um conjunto constituído exclusivamente por pontos discretos.

Uma outra propriedade das folheações geradas por campos vetorias é que suas folhas não degeneradas (isto é, folhas geradas por curvas integrais não constantes) possuem sempre dimensão 1. Deste modo, dada uma folha $\mathcal{L}$ de uma folheação de $\mathcal{K}^n$ e um ponto $p \in \mathcal{L}$, denomina-se *seção transversal* à $\mathcal{F}$ em p um subconjunto τ de dimensão $n-1$ tal que $\tau \cap \mathcal{L} = \{p\}$ e o vetor tangente à $\mathcal{L}$ em p não pertence a τ.

Exemplo 8 *Dado o campo vetorial $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por*

$$X(z) = \begin{pmatrix} x - 4y \\ 4x + y \end{pmatrix},$$

a aplicação $\varphi_{z_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi_{z_0}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} x_0 \cos 4t + y_0 \sin 4t \\ -x_0 \cos 4t + y_0 \sin 4t \end{pmatrix}$$

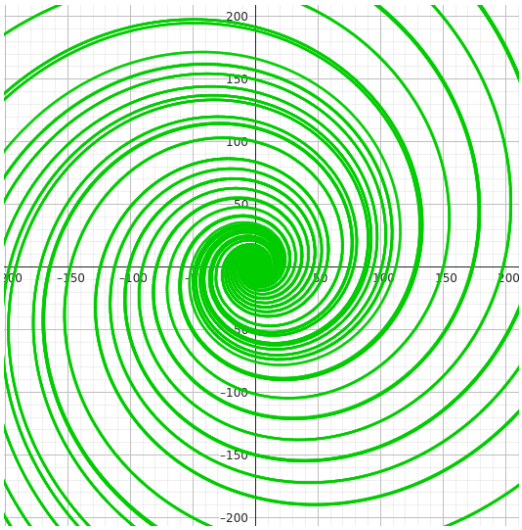
é a curva integral de X com valor inicial $z_0 = (x_0, y_0)$. Como no Exemplo 6, a folheação $\mathcal{F}_X$ é definida pelas curvas integrais correspondentes, como mostra a Figura 7.

Considere, então, a folha $\mathcal{L}$ gerada pela curva

$$\varphi_{(6,6)}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 6 \cos 4t + 6 \sin 4t \\ -6 \sin 4t + 6 \cos 4t \end{pmatrix},$$

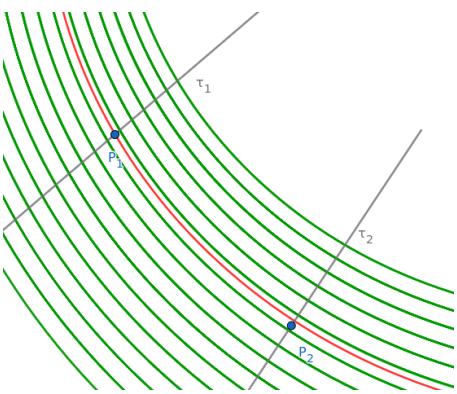
e dois pontos p_1 e p_2 sobre $\mathcal{L}$. Uma possível seção transversal à $\mathcal{L}$ consiste em um segmento de reta secante. Em particular, conforme ilustra a primeira imagem na Figura 8, nos pontos p_1 e p_2 temos as respectivas seções transversais τ_1 e τ_2.

Figura 7 – Comparando com a Figura 5, a simples diferença no incremento do ângulo de 1 para 4 produz um incremento na curvatura (o quanto as curvas se curvam) das folhas da folheação.

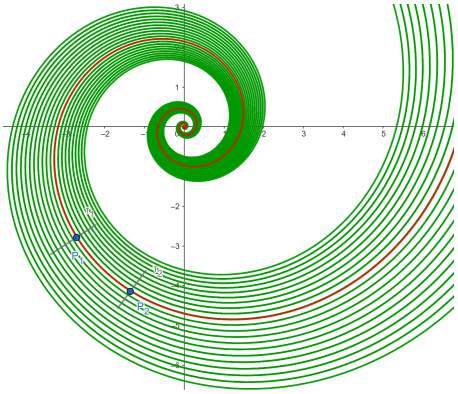


Fonte: elaboração dos autores. *Link* de acesso: `https://www.geogebra.org/graphing/j6mqdx23`.

Figura 8 – A soma das dimensões das folhas com as seções transversais é igual a dimensão do espaço.



(a) A folha em vermelho é a gerada pela curva $\varphi_{(6,6)}$. Localmente, note que, as seções transversais cortam todas as folhas próximas de p_1 ou p_2 também transversalmente.

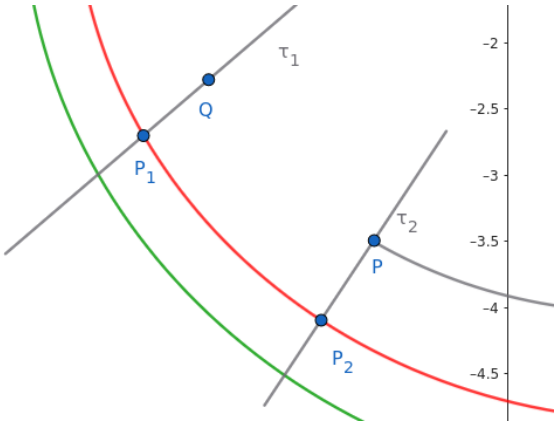


(b) Já globalmente, não é necessário que as seções transversais cortem todas as folhas da folheação.

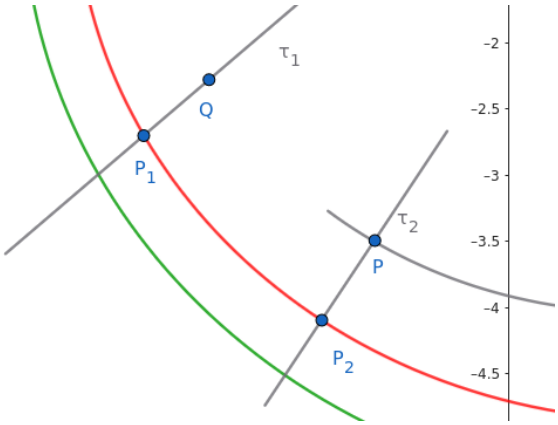
Fonte: elaboração dos autores. *Link* de acesso: `https://www.geogebra.org/geometry/sq964pds`.

Ainda sobre o Exemplo 8, comparando as imagens da Figura 8, observa-se que, sendo τ_1 e τ_2 de tamanhos adequados, todas as folhas que cortam τ_2 também cortam τ_1. Define-se, então, uma função $\Delta_{\tau_2,\tau_1} : \tau_2 \to \tau_1$ tal que, para dado um ponto $p \in \tau_2$, a imagem $\Delta_{\tau_2,\tau_1}(p)$ é o ponto em τ_1 que intersecta a folha que passa por p, como mostra a Figura 9.

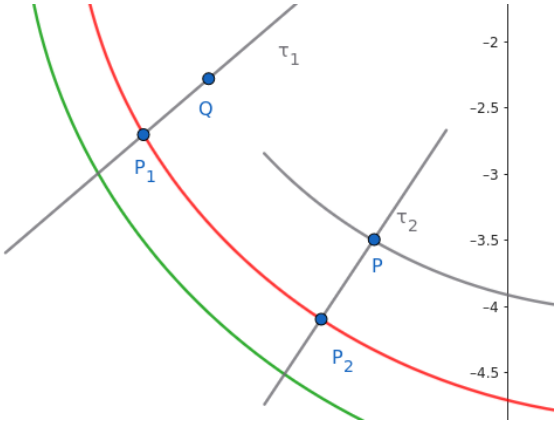
Figura 9 – Construção da aplicação Δ_{τ_2,τ_1}



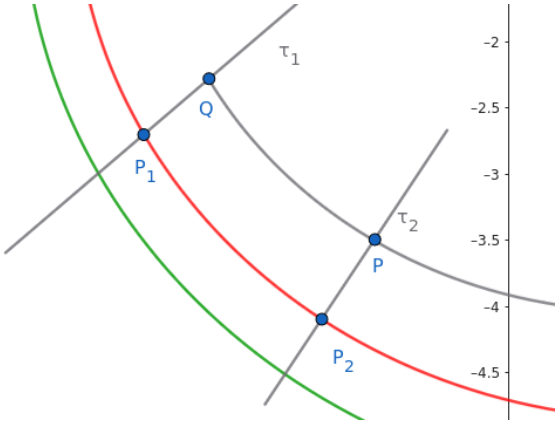
(a) A folha em cinza corta τ_2 em p. O domínio da aplicação Δ_{τ_2,τ_1} é a seção transversal τ_2



(b) Cabe destacar que existe apenas uma folha passando em p. Desta maneira, a expressão "seguir a folha" está bem definida, uma vez que a folha é unica.



(c) Após cortar a seção transversal, seguimos a folha que passa em p até que ela intersecte a outra seção transversal τ_1.



(d) Quando a interseção q da folha com a seção transversal τ_1 é determinada, definimos a imagem de p como sendo q, isto é, $\Delta_{\tau_2,\tau_1}(p) := q$.

Fonte: elaboração dos autores. *Link* de acesso: `https://www.geogebra.org/geometry/vsfewdja`.

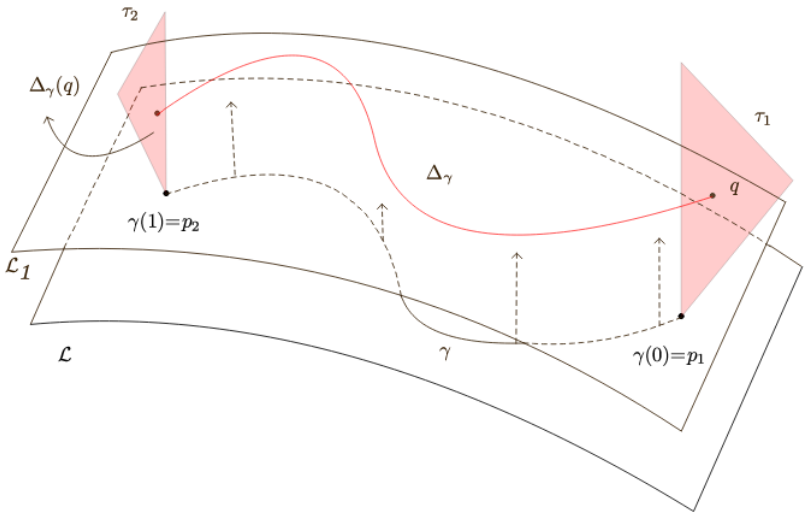
Denomina-se Δ_{τ_2,τ_1} a *aplicação correspondência* entre as seções transversais τ_2 e τ_1. Não iremos nos aprofundar no estudo das aplicações correspondência; para esse fim, indicamos Camacho e Lins Neto (1985).

No caso complexo, uma vez que as folhas não degeneradas têm dimensão 1 complexa, podemos ter curvas reais de dimensão 1 real contidas numa folha. Assim, para definir uma aplicação correspondência, requer maior rigor na formulação.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação complexa e uma folha $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}$. Dados dois pontos $p_1, p_2 \in \mathcal{L}$, e um caminho $\gamma : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{L}$ com $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$. Considere as seções transversais τ_1 em

p_1 e τ_2 em p_2. De modo intuitivo, define-se a imagem de um ponto $q \in \tau_1 \cap \mathcal{L}_1$ pela aplicação *correspondência associada à curva* γ, denotada por Δ_γ, como o ponto em $\Delta_\gamma(q) \in \tau_2 \cap \mathcal{L}_1$ que é o ponto final da curva contida na folha $\mathcal{L}_1$ que tem como projeção em $\mathcal{L}$ a curva γ, como ilustra a Figura 10.

Figura 10 – Dado um ponto q, identificamos a folha $\mathcal{L}_1$ que intersecta a seção transversal τ_0 em q.



Fonte: elaboração dos autores.

5 O GRUPO DE HOLONOMIA

Um dos resultados fundamentais da teoria das folheações é mostrar que a aplicação correspondência associada à curva γ não depende da curva γ (a nível de representante de classe do grupo fundamental). Para isso, novamente recomendamos Camacho e Lins Neto (1985). Em síntese, a construção pode ser compreendida da seguinte forma: dados dois pontos, um inicial e um final, podemos então definir uma aplicação correspondência sobre duas seções transversais de modo que, para sair de uma seção transversal para a outra sobre uma folha, não importa o caminho que se pegue, ou seja, o ponto sobre a segunda seção transversal será o mesmo.

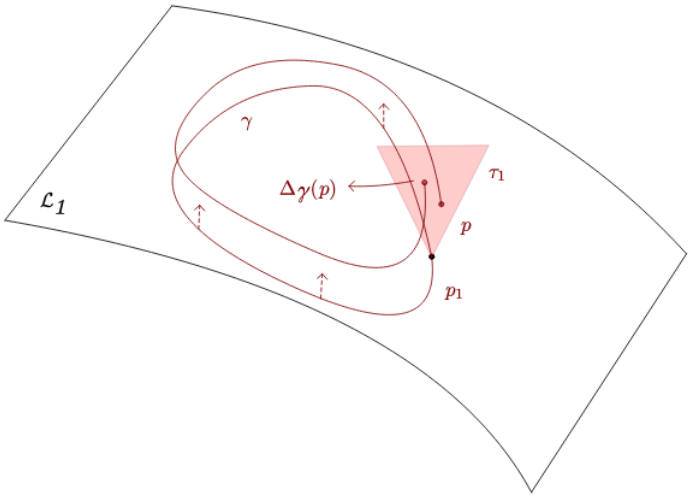
Em especial, considere curvas fechadas γ, isto é, os pontos de início e fim são iguais, $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Intuitivamente, chamamos de *grupo de holonomia de* $\mathcal{L}$ *em* p o grupo $\mathrm{Hol}(\mathcal{L}, p)$ que reúne todas as aplicações de correspondência associadas às possíveis curvas fechadas com início e fim em p contidas em $\mathcal{L}$. Além disso, também é possível mostrar que o grupo de holonomia de uma folha de uma folheação analítica não depende do ponto p. Desta forma, podemos definir o grupo de holonomia de uma folha como sendo o grupo $\mathrm{Hol}(\mathcal{L}, p)$ para um ponto qualquer $p \in \mathcal{L}$.

Para finalizar a construção necessária à Proposição 1 e suas equivalências do caso singular, é preciso definir o que é ter as holonomias conjugadas. Intuitivamente, dados dois grupos de

$\mathrm{Hol}(\mathcal{L}_1, p_1)$ e $\mathrm{Hol}(\mathcal{L}_2, p_2)$, dizer que $\mathrm{Hol}(\mathcal{L}_1, p_1)$ é conjugado a $\mathrm{Hol}(\mathcal{L}_2, p_2)$ significa que existe uma aplicação bi-analítica $\Phi : \mathcal{L}_1 \cup \tau_1 \to \mathcal{L}_2 \cup \tau_2$, onde τ_1 é uma seção transversal em p_1 e τ_2 é uma seção transversal em p_2, tal que dada uma aplicação correspondência $\Delta_{\mathcal{L}_1}$ associada a uma curva γ em $\mathrm{Hol}(\mathcal{L}_1, p_1)$, existem dois procedimentos alternativos para determinar a imagem de p de uma seção transversal τ_1 a $\mathcal{L}_1$ em p_1.

O primeiro é conforme estabelecido na definição de holonomia: seguir o caminho da folha que corta p e, então, encontrar o possivelmente novo ponto em τ_1, como mostrado na Figura 11.

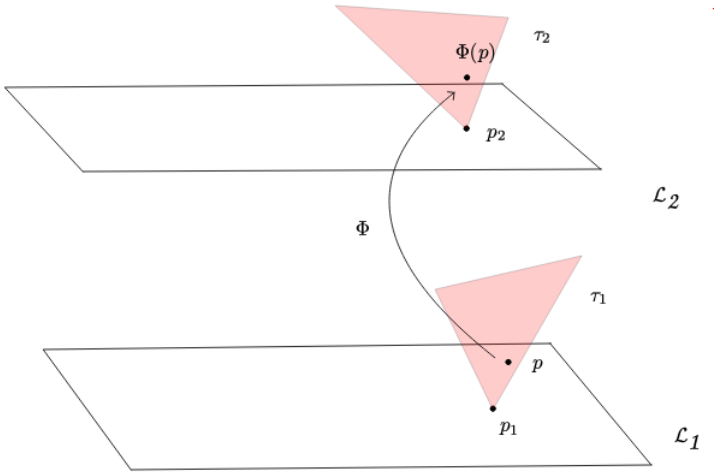
Figura 11 – Maneira via definição de aplicação correspondência



Fonte: elaboração dos autores.

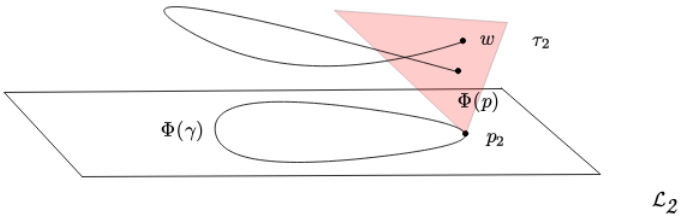
O segundo, devido à conjugação, descreve que o primeiro passo é identificar a imagem $\Phi(p)$, como mostra a Figura 12. Em seguida, achamos o ponto w que é a imagem de $\Phi(p)$ pela aplicação correspondência associada à curva $\Phi(\gamma)$ da segunda folheação (veja a Figura 13). Em seguida, aplica-se Φ^{-1} para retornar à folheação original para termos a imagem $\Phi^{-1}(w)$, que concorda exatamente com o primeiro caminho, como pode ser visto na Figura 14.

Figura 12 – A imagem do ponto $p \in \tau_1$ é o ponto $\Phi(p) \in \tau_2$.



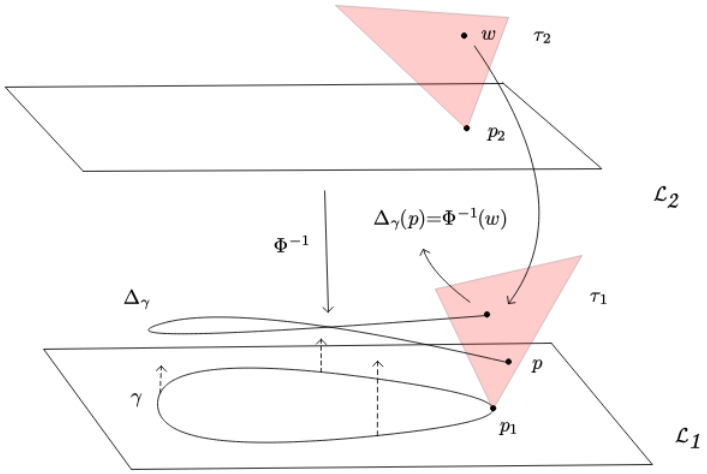
Fonte: elaboração dos autores.

Figura 13 – O ponto w é a imagem do ponto $\Phi(p)$ via a holonomia $\Delta_{\Phi(\gamma)}$.



Fonte: elaboração dos autores.

Figura 14 – A imagem inversa $\Phi^{-1}(w)$ coincide com a imagem $\Delta_\gamma(p)$ de p pela a aplicação correspondência associada à curva γ.



Fonte: elaboração dos autores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tem como objetivo incentivar estudantes em final de graduação ou no início da pós-graduação a se aprofundarem no estudo da conexão entre a classificação de folheações singulares e a holonomia. Espera-se que, ao fim da leitura, o leitor tenha desenvolvido uma compreensão geométrica e intuitiva sólida acerca das folheações, tanto regulares quanto singulares, e de seus grupos de holonomia, com especial enfoque naquelas geradas por campos vetoriais. Munido dessa base conceitual, o estudante estará mais bem preparado para avançar na literatura especializada.

Para além do rigor matemático, este artigo busca evidenciar a importância da representação visual na compreensão de objetos geométricos complexos. Pretende-se, assim, fomentar a reflexão sobre o papel das tecnologias digitais no ensino superior e na divulgação científica, destacando os benefícios de se integrar recursos computacionais à construção do raciocínio analítico.

Alinhadas a esse propósito, foram empregadas duas plataformas para a geração das imagens que ilustram este estudo: os *softwares* livres GeoGebra e TeXmacs. O GeoGebra destaca-se por sua capacidade fluida de conectar álgebra e geometria de forma dinâmica; já o TeXmacs, estruturado como um editor de LaTeX, possui um sistema integrado de desenho vetorial altamente intuitivo (cujas aplicações práticas podem ser observadas nas Figuras 12, 13 e 14). Com a demonstração metodológica desses recursos, almeja-se estimular a sua adoção por parte da comunidade acadêmica.

No que se refere à fundamentação teórica, a decisão de focar na holonomia de folheações geradas por campos vetoriais simplifica consideravelmente as definições ao dispensar formalismos técnicos, como o uso de mudanças de cartas. Essa escolha minimiza a abstração algébrica inicial em favor de uma percepção geométrica direta, o que não apenas confere originalidade à abordagem, mas torna o tema notavelmente mais acessível. Como desdobramento natural para a necessária formalização no contexto das variedades, recomenda-se a obra clássica de Camacho e Lins Neto (1985)[3], aliada à referência de Sotomayor (2011) para o trato analítico das equações diferenciais. Por fim, para o leitor motivado a explorar os limites do conhecimento e os problemas em aberto na classificação local, o estudo de Mattei e Moussu (1980) e de Martinet e Ramis (1982) constitui o passo definitivo para o amadurecimento na pesquisa em folheações singulares complexas.

[3]Vale observar que a simplificação metodológica adotada neste artigo não constitui uma crítica ao rigor de Camacho e Lins Neto (1985), cujo público-alvo já pressupõe o domínio prévio de tais estruturas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

CAMACHO, César; LINS NETO, Alcides. **Geometric theory of foliations**. Boston: Birkhäuser, 1985.

CHAVES, Francisco. Holonomy and equivalence of analytic foliations. **Journal of Dynamical and Control Systems**, Kluwer Academic Publishers, USA, v. 28, n. 4, p. 771–790, 2021. DOI: https://doi.org/10.1007/s10883-021-09549-y.

COSTA, André Luiz Araújo da; ALVES, Francisco Regis Vieira. Visualização de elementos do Teorema de Ascoli-Arzelà com ferramentas do software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 13, n. 3, p. 141–154, 2024. DOI: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p141-154.

DIAW, Adjaratou Arame; LORAY, Frank. Pairs of foliations and Mattei-Moussu's Theorem. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, v. 171, p. 103035, 2021. DOI: https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2021.103035.

DOUBROV, Boris; KOMRAKOV, Boris; MORIMOTO, Tohru. Equivalence of holonomic differential equations. **Lobachevskii Journal of Mathematics**, v. 3, p. 39–71, 1999. Disponível em: https://emis.de/ft/48778. Acesso em: 22 jun. 2026.

ELIZAROV, P. M.; ILYASHENKO, Yu. S. Remarks on the orbital analytic classification of germs of vector fields. **Mathematics of the USSR-Sbornik**, v. 49, n. 1, p. 111–124, 1984. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1984v049n01ABEH002700.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999. (Curso de análise).

MARTINET, Jean; RAMIS, Jean-Pierre. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 55, p. 63–164, 1982. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02698695.

MATTEI, J.-F.; MOUSSU, Robert. Holonomie et intégrales premières. **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**, v. 13, n. 4, p. 469–523, 1980. DOI: https://doi.org/10.24033/asens.1393.

REBELO, Julio C.; REIS, Helena. Local theory of holomorphic foliations and vector fields. **ArXiv: Dynamical Systems**, 2011. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1101.4309.

REIS, Helena. Equivalence and semi-completude of foliations. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 64, n. 8, p. 1654–1665, 2006. DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2005.07.013.

SOTOMAYOR, Jorge. **Equações diferenciais ordinárias**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

SOBRE OS AUTORES

Dr. Francisco Icaro Maciel Forte Chaves
https://orcid.org/0000-0002-6240-1999
http://lattes.cnpq.br/2871933596874646
Contato: fcoicaro.chaves@uece.br
Contribuição autoral: conceituação; escrita – primeira redação; escrita – revisão e edição; investigação; metodologia; software; visualização.

Dr. Francisco Régis Vieira Alves
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561
http://lattes.cnpq.br/3288513376230522
Contato: fregis@ifce.edu.br
Contribuição autoral: administração do projeto; análise formal; conceituação; escrita – revisão e edição; metodologia; software; supervisão; validação; visualização.

Revisor de texto: Ricardo Ítalo Maciel Forte Chaves