

# COMPARAÇÕES DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS DA EQUAÇÃO DAS ÁGUAS SUBTERRÂNEAS EM AQUÍFEROS POROSOS CONFINADOS

## COMPARISONS OF NUMERICAL SOLUTIONS OF THE GROUNDWATER EQUATION IN CONFINED POROUS AQUIFERS

## COMPARACIÓN DE SOLUCIONES NUMÉRICAS DE LA ECUACIÓN DE AGUAS SUBTERRÂNEAS EN ACUÍFEROS POROSOS CONFINADOS

Bryan Aoliabe Siqueira<sup>[1]</sup>, Wilian Jeronimo dos Santos<sup>[1]</sup>, Cleison dos Santos Ramthun<sup>[2]</sup>, Renan de Souza Teixeira<sup>[1]</sup>

[1] Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, RJ, Brasil.

[2] Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Blumenau, SC, Brasil.

**Data de submissão:** 10 jun. 2025. **Data de aprovação:** 22 ago. 2025. **Financiamento:** Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). **Como citar:** SIQUEIRA, Bryan Aoliabe; SANTOS, Wilian Jeronimo dos; RAMTHUN, Cleison dos Santos; TEIXEIRA, Renan de Souza. Comparações das soluções numéricas da equação das águas subterrâneas em aquíferos porosos confinados. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 11, p. e310, 12 dez. 2025. <https://doi.org/10.35819/remat2025v11id7769>.



Este artigo está licenciado sob uma licença *Creative Commons Attribution 4.0 International License*.

**Resumo:** Com o objetivo de investigar soluções numéricas para o fluxo de água em aquíferos confinados, este trabalho compara o desempenho do Método das Diferenças Finitas (MDF) e do Método das Soluções Fundamentais (MSF). A equação diferencial parcial utilizada modela o fluxo de água subterrâneo com extração ou recarga de água via poço, combinando a conservação de massa com a Lei de Darcy. O objetivo principal consiste em realizar simulações e comparações numéricas utilizando os dois métodos numéricos citados, sendo ambos aplicados à equação bidimensional em regime estacionário. Uma diferença fundamental entre os métodos é que o MDF exige a construção de uma malha interconectada de pontos (ou nós), nos quais são calculados os valores aproximados da função solução. Por outro lado, o MSF não requer a construção de malha, estimando a solução em nós distribuídos livremente no domínio, com base na solução fundamental e nas condições de contorno do problema. Contudo, para fins de comparação direta entre os métodos, os pontos do MSF foram escolhidos de modo a coincidir com os nós do MDF, assegurando a equivalência espacial entre as soluções numéricas obtidas. Dessa forma, busca-se evidenciar as potencialidades e limitações de cada abordagem. Ambos os métodos foram submetidos a comparações entre si e com soluções analíticas, sempre que disponíveis, apresentando resultados satisfatórios nas aplicações propostas. A análise revelou que cada método apresenta vantagens e desvantagens específicas, sendo a escolha dependente das características particulares do problema analisado.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; fluxo de água subterrâneo; aquíferos confinados; Método das Diferenças Finitas; Método das Soluções Fundamentais.

**Abstract:** With the aim of investigating numerical solutions for groundwater flow in confined aquifers, this study compares the performance of the Finite Difference Method (FDM) and the Method of Fundamental Solutions (MFS). The governing partial differential equation models subsurface flow involving water extraction or recharge through a well, combining mass conservation with Darcy's Law. The main objective

is to perform simulations and numerical comparisons using the two aforementioned numerical methods. Both approaches are applied to a two-dimensional steady-state formulation. A key difference between the methods lies in their spatial discretization: FDM requires the construction of an interconnected mesh of points (or nodes), where approximate values of the solution function are computed. In contrast, MFS does not require mesh generation; instead, it estimates the solution at freely distributed nodes in the domain, based on the fundamental solution and the problem's boundary conditions. However, for the purpose of direct comparison between the methods, the MFS nodes were selected to coincide with those used in the FDM, ensuring spatial equivalence between the numerical solutions. This strategy aims to highlight the strengths and limitations of each approach. Both methods were compared with each other and with analytical solutions, whenever available, yielding satisfactory results for the proposed applications. The analysis showed that each method has specific advantages and disadvantages, and that the choice depends on the particular characteristics of the problem under consideration.

**Keywords:** Mathematical Modeling; groundwater flow; confined aquifers; Finite Difference Method; Method of Fundamental Solutions.

**Resumen:** Con el objetivo de investigar soluciones numéricas para el flujo de agua en acuíferos confinados, este estudio compara el desempeño del Método de Diferencias Finitas (MDF) y del Método de Soluciones Fundamentales (MSF). La ecuación diferencial parcial considerada modela el flujo subterráneo de agua con extracción o recarga mediante un pozo, combinando la conservación de la masa con la Ley de Darcy. El objetivo principal consiste en realizar simulaciones y comparaciones numéricas utilizando los dos métodos mencionados. Ambos enfoques se aplican a la ecuación bidimensional en régimen estacionario. Una diferencia fundamental entre los métodos radica en la discretización espacial: el MDF requiere la construcción de una malla interconectada de puntos (o nodos), en los cuales se calculan valores aproximados de la función solución. Por otro lado, el MSF no requiere la generación de malla; en cambio, estima la solución en nodos distribuidos libremente en el dominio, basándose en la solución fundamental y en las condiciones de contorno del problema. No obstante, para permitir una comparación directa entre los métodos, los nodos del MSF fueron elegidos de manera que coincidieran con los del MDF, asegurando así la equivalencia espacial entre las soluciones numéricas obtenidas. Esta estrategia busca evidenciar las potencialidades y limitaciones de cada enfoque. Ambos métodos fueron comparados entre sí y con soluciones analíticas, cuando estuvieron disponibles, mostrando resultados satisfactorios en las aplicaciones propuestas. El análisis reveló que cada método presenta ventajas y desventajas específicas, y que la elección depende de las características particulares del problema analizado.

**Palabras clave:** Modelado Matemático; flujo de agua subterránea; acuíferos confinados; Método de Diferencias Finitas; Método de Soluciones Fundamentales.

## 1 INTRODUÇÃO

A escassez crescente de água superficial em várias regiões do planeta, aliada ao aumento da demanda por água potável, tem impulsionado a pesquisa em torno de fontes alternativas como os aquíferos subterrâneos. Reservatórios naturais armazenam água em meios porosos, desempenhando um papel fundamental na manutenção de ecossistemas, no abastecimento urbano e industrial, na irrigação agrícola e na preservação ambiental. Em contextos de crise hídrica, os aquíferos se configuram como alternativa viável e estratégica para garantir a segurança hídrica da população (Feitosa *et al.*, 2008; Wendland, 2012).

Dentre os diversos tipos de aquíferos, os confinados porosos se destacam por apresentarem boas condições de armazenamento e qualidade da água, além de estarem naturalmente

protegidos contra contaminantes superficiais. A gestão eficiente desses sistemas requer o entendimento preciso do comportamento do fluxo subterrâneo, especialmente em cenários que envolvem a extração ou a recarga de água por meio de poços. Nesse sentido, a formulação matemática do escoamento em meios porosos, baseada na equação da conservação de massa associada à Lei de Darcy, tem sido amplamente utilizada como modelo de referência.

A complexidade dos problemas reais dificulta a obtenção de soluções analíticas. Diante desse cenário, a aplicação de métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais parciais torna-se uma ferramenta indispensável em simulações de problemas reais.

Entre as técnicas disponíveis, destaca-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), uma abordagem clássica que depende da discretização do domínio por meio de uma malha regular e da substituição das derivadas por aproximações baseadas em séries de Taylor. Mais recentemente, o Método das Soluções Fundamentais (MSF) tem sido explorado como uma alternativa inovadora, especialmente por sua característica de ser um método sem malha, no qual a solução é estimada em nós livremente distribuídos, utilizando-se a solução fundamental da equação governante em conjunto com as condições de contorno. No contexto da modelagem de aquíferos, o uso do MSF ainda é relativamente recente e menos difundido quando comparado ao MDF.

O presente trabalho corresponde a um excerto da dissertação de mestrado (Siqueira, 2023), e tem como objetivo principal comparar numericamente o desempenho do MDF e do MSF na simulação do fluxo de águas subterrâneas em aquíferos porosos confinados, em regime estacionário e em duas dimensões. A partir da implementação computacional dos métodos, são analisadas suas potencialidades, limitações, estabilidade e acurácia frente a soluções analíticas conhecidas, quando disponíveis. Busca-se, com isso, contribuir para a compreensão do comportamento de cada abordagem e fornecer subsídios para a escolha do método mais adequado conforme as características específicas do problema em estudo.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 AVANÇOS RECENTES E DESAFIOS NA MODELAGEM NUMÉRICA DE AQUÍFEROS

Nas últimas décadas, a modelagem de aquíferos porosos confinados tem passado por avanços significativos, especialmente no desenvolvimento de métodos que ampliam a precisão e a flexibilidade computacional. O MDF, por exemplo, permanece amplamente utilizado por sua robustez e implementação direta em malhas estruturadas (Wendland, 2012). No entanto, a demanda por simulações em domínios extensos, complexos e com geometrias irregulares tem impulsionado o uso de métodos sem malha, como o MSF. Trabalhos recentes demonstram a viabilidade do MSF em problemas hidrogeológicos, destacando sua capacidade de lidar com diferentes condições de contorno e fontes pontuais (Das; Eldho, 2022; Wang; Zheng, 2015). Apesar de suas vantagens, o MSF é um método que gera matrizes mal condicionadas, princi-

palmente em decorrência da proximidade entre os pontos-fonte e da escolha inadequada do raio da fronteira fictícia. Para contornar tais situações, diversas técnicas têm sido empregadas, entre elas: regularização de Tikhonov, pseudo-inversa e pré-condicionadores (Askour *et al.*, 2018; Cheng; Hong, 2020), que contribuem para a estabilização numérica e a melhoria da acurácia. Estudos aplicados a problemas inversos e de condução de calor com fontes pontuais reforçam a aplicabilidade do MSF em cenários de difícil discretização e com sensibilidade elevada a perturbações (Santos; Santiago; Telles, 2014; Basílio, 2019). Tais avanços mostram que o MSF é uma ferramenta promissora, cuja adoção na modelagem de aquíferos é pertinente.

O estudo do fluxo subterrâneo em aquíferos porosos confinados pode ser formulado matematicamente a partir da combinação entre a equação da conservação de massa e a Lei de Darcy (Todd, 1989). Estas equações descrevem, respectivamente, o princípio da conservação de massa de um fluido em um meio poroso e a relação entre a vazão específica e o gradiente hidráulico em escoamentos subterrâneos.

## 2.2 LEI DE DARCY

A Lei de Darcy é expressa da seguinte forma:

$$\vec{V} = -K\nabla h, \quad (1)$$

onde:

- $\vec{V}$  é o vetor da vazão específica ou velocidade aparente  $[m/s]$ ;
- $K$  é a condutividade hidráulica do meio  $[m/s]$ ;
- $\nabla h$  é o gradiente hidráulico (adimensional).

A carga hidráulica  $h$  é composta por dois termos: o potencial gravitacional e o potencial de pressão. Assim, é definida como:

$$h = z + \frac{p}{\gamma}, \quad (2)$$

em que:

- $z$  representa a cota de elevação  $[m]$ ;
- $p$  é a pressão no ponto  $[N/m^2]$ ;
- $\gamma$  é o peso específico do fluido  $[N/m^3]$ .

## 2.3 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A equação da continuidade reflete a conservação de massa no meio poroso, assumindo que a água não é criada nem destruída, apenas transportada e armazenada (Simões; Schulz; Porto, 2017; Libardi, 2018)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho K \nabla h) - \dot{g} = 0, \quad (3)$$

onde:

- $\rho$  é a massa específica da água [ $kg/m^3$ ];
- $\phi$  é a porosidade (adimensional);
- $h$  é a carga hidráulica [ $m$ ];
- $\dot{g}$  é o termo fonte (positivo para recarga e negativo para extração) [ $kg/s \cdot m^3$ ].

Assumindo densidade constante e meio isotrópico e homogêneo, a equação (3) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - K \nabla^2 h - \frac{\dot{g}}{\rho} = 0. \quad (4)$$

## 2.4 EQUAÇÃO PARA AQUÍFEROS CONFINADOS

Para o caso de aquíferos confinados e bidimensionais, em regime permanente (i.e., sem variação no tempo), desconsidera-se o termo temporal. Obtém-se, como resultado, a equação de Poisson (Simões; Schulz; Porto, 2017, p. 168):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}, \quad (5)$$

em que  $h(x, y)$  representa a carga hidráulica distribuída espacialmente, sujeita às condições de contorno do tipo Dirichlet. Essa escolha reflete uma situação física comum em aquíferos confinados, onde os níveis piezométricos são conhecidos em poços de monitoramento ou em limites naturais como rios e lagos. Tal condição permite simular, por exemplo, um aquífero limitado por fronteiras com níveis d'água controlados.

A equação (5), será o ponto de partida para a aplicação dos métodos numéricos abordados neste trabalho.

## 3 METODOLOGIA NUMÉRICA

A equação de Poisson bidimensional, equação (5), é resolvida numericamente por meio de dois métodos distintos: o Método das Diferenças Finitas (MDF) e a combinação entre o Mé-

todo das Soluções Fundamentais (MSF) e o Método das Soluções Particulares (MSP). A seguir, apresentam-se os fundamentos teóricos e a lógica de implementação de cada abordagem.

### 3.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O MDF (Cuminato; Meneguette Junior, 2013; Cunha, 2000) é um método clássico baseado na discretização do domínio físico com uma malha regular de pontos. As derivadas parciais são aproximadas por expressões de diferenças finitas, obtidas a partir do desenvolvimento de Taylor. Para a equação de Poisson bidimensional:

$$\nabla^2 h(x, y) = f(x, y),$$

a aproximação central de segunda ordem em uma malha regular com espaçamento uniforme  $\Delta x = \Delta y = k$  resulta em:

$$\frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 4h_{i,j}}{k^2} = f_{i,j}. \quad (6)$$

Reorganizando os termos da equação (6), obtém-se um sistema linear de equações do tipo:

$$A\vec{h} = \vec{f},$$

em que:

- $A$  é uma matriz esparsa de coeficientes, com estrutura do tipo pentadiagonal;
- $\vec{h}$  é o vetor incógnita com os valores da função solução nos nós da malha;
- $\vec{f}$  é o vetor com os valores do termo fonte.

As condições de contorno do tipo Dirichlet são aplicadas diretamente na matriz e no vetor de termos independentes. O sistema linear obtido com o MDF foi resolvido utilizando a operação de barra invertida ( $A \setminus b$ ), ferramenta otimizada que seleciona automaticamente o método mais adequado conforme a estrutura da matriz, no MATLAB<sup>1</sup>. Essa escolha se justifica pelo fato de que o objetivo deste estudo é comparar os métodos propostos, e não avaliar solucionadores iterativos.

### 3.2 MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS COM SOLUÇÃO PARTICULAR

Para resolver equações do tipo de Poisson, equação (5), com termo fonte não nulo:

$$\nabla^2 h(x, y) = f(x, y), \quad (7)$$

---

<sup>1</sup><https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.

utiliza-se a estratégia de decompor a solução total como:

$$h(x, y) = u(x, y) + u_p(x, y), \quad (8)$$

em que:

- $u(x, y)$  é a solução do problema de valor de contorno associado, obtida neste trabalho pelo Método das Soluções Fundamentais (MSF) (Kupradze; Aleksidze, 1964; Mathon; Johnston, 1977; Rodrigues Neto, 2020);
- $u_p(x, y)$  é uma solução particular da equação  $\nabla^2 u_p = f(x, y)$ , obtida com o Método das Soluções Particulares (MSP) (Golberg, 1995; Santos; Santiago; Telles, 2014).

Essa abordagem permite resolver problemas não homogêneos mantendo as principais vantagens do MSF: malha livre, formulação por contorno, flexibilidade geométrica e ausência de integração numérica.

### 3.2.1 PARTE HOMOGÊNEA – MSF

A parte homogênea  $u(x, y)$  é representada como uma combinação linear da solução fundamental, neste caso associada ao operador Laplaciano:

$$u(x, y) \approx \sum_{k=1}^N \alpha_k \Phi(\|(x, y) - (x_k, y_k)\|), \quad (9)$$

onde:

- $\alpha_k$  são os coeficientes da combinação linear, determinados pela imposição das condições de contorno do problema homogêneo associado, no caso de potencial prescrito;
- $(x_k, y_k)$  são os centros-fonte, localizados fora do domínio físico  $\Omega$  (na chamada fronteira fictícia);
- $\Phi(\|(x, y) - (x_k, y_k)\|)$  é a solução fundamental da equação de Laplace em duas dimensões, dada por:

$$\Phi(\|(x, y) - (x_k, y_k)\|) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\|(x, y) - (x_k, y_k)\|).$$

Essa solução fundamental satisfaz:

$$\nabla^2 \Phi(r) = \delta(\vec{r}),$$

com  $\delta$  sendo a “função” delta de Dirac, que, embora não seja uma função no sentido clássico, é uma distribuição que assume valor nulo em todos os pontos do domínio, exceto

quando o ponto campo coincide com o ponto fonte. Essa característica justifica seu uso como base para representar soluções da equação homogênea, permitindo que se construa a solução geral por superposição (Santos, 2015).

As condições de contorno são impostas nos pontos da fronteira física  $\partial\Omega$ , com correção feita a partir da contribuição de  $u_p(x, y)$  (vide seção 3.2.2).

### 3.2.2 PARTE PARTICULAR – MSP

Para obter uma solução particular  $u_p(x, y)$  tal que  $\nabla^2 u_p = f(x, y)$ , emprega-se uma função construída analiticamente ou por interpolação suave que represente o termo fonte  $f(x, y)$ . Essa função não precisa satisfazer as condições de contorno, pois será usada apenas para compensar a não homogeneidade da equação (Santos, 2015).

Nos experimentos deste artigo, o termo fonte foi considerado pontual, assumindo comportamento semelhante ao da “função” delta de Dirac, isto é,  $f(x, y) = Q\delta(x - \xi)$ , onde  $\xi$  representa a localização da fonte. Nesse caso, a solução particular associada é dada por:

$$u_p(x, y) = -\frac{Q}{2\pi\rho K} \ln(r(\xi, x)), \quad (10)$$

em que  $r(\xi, x)$  representa a distância entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $x$ ,  $Q$  é a intensidade da fonte,  $\rho$  é a densidade do meio e  $K$  a condutividade hidráulica.

Para contornar a singularidade no ponto exato da fonte, foi adotado um pequeno deslocamento de  $\frac{k}{5}$ , sendo  $k$  o passo da malha utilizado no MDF. Essa estratégia, proposta pelos próprios autores, visa garantir estabilidade numérica e evitar problemas computacionais decorrentes da indeterminação no logaritmo.

A condição de contorno para a parte homogênea  $u(x, y)$  torna-se então:

$$u(x, y) = h_{\text{contorno}}(x, y) - u_p(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega.$$

### 3.2.3 INTEGRAÇÃO DOS MÉTODOS – MSF + MSP

A abordagem combinada permite escrever a solução total como:

$$h(x, y) = u_h(x, y) + u_p(x, y), \quad (11)$$

em que  $u_h$  é a solução do problema homogêneo ajustado, resolvida com o MSF. Para isso, as funções fundamentais são colocadas em pontos distribuídos ao redor do domínio (fronteira fictícia), e as condições de contorno modificadas são aplicadas conforme a equação (11).

O sistema linear obtido com o MSF foi resolvido utilizando diferentes abordagens numéricas, também implementadas no MATLAB. Inicialmente, foi utilizada a operação de barra invertida ( $A \setminus b$ ),

que aciona automaticamente uma rotina interna de solução de sistemas no MATLAB, escolhendo o método mais adequado com base nas propriedades da matriz  $A$ , como triangularidade, esparsidade ou condição numérica. Além disso, foram aplicadas explicitamente a pseudo-inversa ( $\text{pinv}(A)$ ) e a regularização de Tikhonov. Os efeitos de cada técnica sobre a estabilidade e precisão da solução foram analisados nos experimentos numéricos, considerando-se também a possibilidade de coincidência entre o método interno acionado pelo MATLAB e os outros métodos utilizados.

### 3.2.4 REGULARIZAÇÃO

Um dos principais desafios na aplicação do Método das Soluções Fundamentais (MSF) está associado ao mal-condicionamento do sistema linear gerado, especialmente em configurações com muitos pontos fonte ou com fontes muito próximas entre si, o que torna a solução do problema sensível a perturbações nos dados.

Para mitigar esse efeito e estabilizar o sistema, foram adotadas duas estratégias de regularização amplamente utilizadas na literatura:

- **Regularização de Tikhonov:** consiste em adicionar um termo penalizador à matriz normal do sistema, resultando na seguinte solução:

$$\vec{\alpha} = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T \vec{b},$$

onde  $\lambda > 0$  é o parâmetro de regularização e  $I$  é a matriz identidade. Neste trabalho, utilizou-se o valor  $\lambda = 10^{-10}$ , conforme sugerido na literatura especializada (Basílio, 2019). Esse valor mostrou-se adequado para manter a solução estável, especialmente em casos em que os sistemas de equações lineares apresentam matrizes de coeficientes altamente mal condicionadas (Golub; Hansen; O'Leary, 1999).

- **Pseudo-inversa:** também foi utilizada a pseudo-inversa de Penrose como alternativa à inversão direta (Leon, 2019). Nesse caso, a solução do sistema é obtida garantindo a solução de menor norma entre todas aquelas que minimizam o resíduo quadrático. Ou seja, a pseudo-inversa permite resolver o sistema sob o critério de mínimos quadrados, mesmo quando a matriz  $A$  não é invertível ou apresenta posto deficiente:

$$\vec{\alpha} = A^\dagger \vec{b},$$

em que  $A^\dagger$  denota a pseudo-inversa de  $A$ . Neste trabalho, esta abordagem mostrou-se especialmente eficaz em casos nos quais a matriz dos coeficientes é mal-condicionada ou perde posto devido à escolha de parâmetros como o raio da fronteira fictícia ou o número de fontes.

## 4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS

Aborda-se, a seguir, os principais experimentos realizados para avaliar o desempenho dos métodos numéricos estudados: o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método das Soluções Fundamentais (MSF). Foram considerados três problemas distintos de fluxo em aquíferos porosos confinados, com ênfase na acurácia, estabilidade, custo computacional e resposta dos métodos frente à regularização.

### 4.1 DESCRIÇÃO DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Esta seção apresenta a formulação dos problemas simulados, incluindo as geometrias adotadas, a distribuição dos pontos no contorno e no interior do domínio, bem como a disposição das fontes virtuais no caso no MSF.

As simulações foram realizadas em um laptop com sistema operacional Windows 11 (64 bits), processador Intel Core i5-1135G7 de 11<sup>a</sup> geração, memória RAM de 8 GB e unidade SSD de 256 GB.

Para cada matriz gerada, foi calculado o número de condicionamento induzido pela norma-2. Além disso, sempre que possível, a solução numérica foi comparada com a solução analítica, por meio das normas 2 e  $\infty$ , visando quantificar os erros envolvidos. Na ausência de solução analítica, a comparação entre os métodos das soluções fundamentais (MSF) e das diferenças finitas (MDF) foi realizada com base nos valores máximos da diferença absoluta entre as soluções obtidas. Para garantir consistência na avaliação, no caso do MSF foram escolhidos os mesmos pontos da malha do MDF, assegurando que as diferenças calculadas correspondam às mesmas localizações no domínio físico. Essa análise busca evidenciar o quão próximas estão as respostas numéricas fornecidas por cada método.

No MDF, os sistemas lineares foram resolvidos com o operador de barra invertida ( $\backslash$ ), enquanto no MSF empregaram-se, além desse, a pseudoinversa (`pinv`) e a regularização de Tikhonov. Para o cálculo dos raios, adotou-se como referência o centróide do domínio em cada simulação.

### 4.2 PROBLEMA 1 – VALIDAÇÃO COM SOLUÇÃO ANALÍTICA

#### PROBLEMA 1

Considere o problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (12)$$

definido no domínio  $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0,5, 0 < y < 0,5\}$ , sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} h(0, y) &= 0, & h(x, 0) &= 0, \\ h(x, 0,5) &= 200x, & h(0,5, y) &= 200y. \end{aligned}$$

A solução analítica deste problema é dada por  $h(x, y) = 400xy$ , conforme descrito em Burden, Faires e Burden (2017).

Na simulação utilizando o MDF (Santana, 1998), foi adotado um incremento uniforme de 0,1 em ambas as direções de discretização. Cabe destacar que, neste exemplo, o erro de truncamento associado ao MDF é nulo a cada passo de malha. Isso ocorre porque todas as derivadas de ordem maior ou igual a dois da solução analítica são nulas. Dessa forma, a solução numérica obtida via MDF coincide com a solução analítica, desconsiderando-se os erros de arredondamento computacional, o que justifica a utilização do incremento utilizado.

Para a aplicação do Método das Soluções Fundamentais (MSF), foram utilizados 20 pontos sobre o contorno e a fronteira fictícia, além de 16 pontos distribuídos no interior do domínio.

Este problema foi proposto com o objetivo de validar os códigos implementados e analisar o comportamento dos métodos numéricos aplicados. Por esse motivo, adotaram-se valores de  $r$  relativamente grandes em relação ao domínio, com o intuito de amplificar os efeitos da distância fonte-campo e permitir uma análise mais clara do comportamento do MSF. A Tabela 1 apresenta os valores dos números de condicionamento das matrizes geradas, bem como os erros associados às soluções obtidas pelos métodos das diferenças finitas (MDF) e das soluções fundamentais (MSF), para o Problema 1.

Observa-se que o MDF apresenta erros baixos, como esperado, dada a coincidência com a solução analítica nesse caso. Já o MSF apresenta erros pequenos, o que reforça a validade do método para problemas com solução conhecida. O número de condicionamento da matriz do MSF foi maior, se comparado ao MDF.

Tabela 1 – Erros e número de condicionamento para diferentes configurações dos métodos MDF e MSF no Problema 1

<b>Critério</b>	<b>MDF (<math>k = 0,1</math>)</b>	<b>MSF (<math>r = 1,5</math>)</b>	<b>MSF (<math>r = 2</math>)</b>	<b>MSF (<math>r = 5</math>)</b>
Norma- $L_2$	$1,59 \times 10^{-14}$	$2,51 \times 10^{-6}$	$5,08 \times 10^{-6}$	$1,80 \times 10^{-4}$
Norma- $L_\infty$	$7,11 \times 10^{-15}$	$1,13 \times 10^{-6}$	$2,34 \times 10^{-6}$	$8,14 \times 10^{-5}$
Nº de Condicionamento	$9,47 \times 10^0$	$1,45 \times 10^{17}$	$4,89 \times 10^{18}$	$2,37 \times 10^{17}$

Fonte: Elaborado pelos autores com base nos resultados computacionais obtidos em Siqueira (2023).

Observa-se que  $r = 2$  resultou em menores erros em comparação com os outros raios utilizados, o que indica a existência de um intervalo ideal para o parâmetro  $r$ , no qual há um

melhor equilíbrio entre a estabilidade numérica e a precisão da aproximação. Esse fenômeno já foi relatado na literatura como uma característica do MSF, assim como, há estudos destacando que não há um resultado geral de convergência estabelecido para o método (Cheng; Hong, 2020). Embora o número de condicionamento tenha sido maior para  $r = 2$ , os erros foram menores, indicando que a forma utilizada para resolução do sistema linear, aliado à regularização adotada, foi eficaz para contornar os efeitos da má condição. Assim, mesmo em sistemas mal-condicionados, é possível obter soluções numéricas precisas quando se utilizam técnicas numéricas adequadas.

#### 4.3 PROBLEMA 2 – FONTE PONTUAL NO CENTRO DO DOMÍNIO

Neste problema, considera-se a equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}, \quad (13)$$

definida no domínio  $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0,6, 0 < y < 0,6\}$ , com condições de contorno dadas por:

$$h(0, y) = 0, \quad h(x, 0) = 0, \quad h(x, 0,6) = 200x, \quad h(0,6, y) = 200y.$$

O termo fonte  $\dot{g}$  é representado por uma função concentrada no centro do domínio, com os parâmetros físicos  $Q = 0,06755$  e  $K = 10^{-3}$ .

Para o Método das Diferenças Finitas (MDF), utilizou-se passo fixo  $k = 0,025$  nos dois eixos. Já para o Método das Soluções Fundamentais (MSF), foram utilizados 96 pontos sobre o contorno, 529 pontos internos no domínio e 625 pontos para construção da solução particular. Dois cenários foram simulados:

- No primeiro, o número de fontes virtuais (fronteira fictícia) foi igual ao número de pontos no contorno;
- No segundo, o número de fontes virtuais foi reduzido para metade dos pontos no contorno.

Em ambos os casos, variou-se a fronteira fictícia (raio  $r$ ) com o objetivo de investigar a sensibilidade do método.

As Tabelas 2 e 3, bem como as Tabelas 4 e 5, apresentam comparações detalhadas entre o MDF e o MSF aplicados ao Problema 2, sob diferentes configurações de raio da fronteira fictícia. As métricas analisadas são:

- **Valor Máximo:** maior diferença (em módulo) entre os resultados do MSF e os obtidos com MDF, considerando inversão direta (barra invertida), pseudo-inversa ( $p_{inv}$ ) e regularização de Tikhonov.

- **Somatório das Diferenças:** soma de todas as diferenças (em módulo) entre os valores das soluções calculadas com MSF e MDF, indicando o distanciamento acumulado das soluções.
- **Número de Condicionamento:** indica o grau de má-condição do sistema linear gerado no MSF. Foi obtido com o comando `cond` no software MATLAB, aplicando a norma 2.
- **Valor Máx. (pinv) e Tikhonov:** valores máximos do distanciamento das soluções, quando comparados com o MDF, obtidos quando se utilizou a pseudo-inversa e a regularização de Tikhonov para resolver o sistema do MSF, respectivamente.
- **Somatório das Diferenças (pinv e Tikhonov):** soma dos erros absolutos com essas duas técnicas alternativas de resolução.
- **Rank da Matriz do MSF:** posto numérico da matriz dos coeficientes do sistema gerado pelo MSF, obtido por meio do comando `rank`, sendo sensível à variação do raio.

As tabelas abaixo mostram os resultados e ilustram a sensibilidade do MSF à escolha do raio da fronteira fictícia, bem como à técnica empregada na resolução do sistema linear. O MDF, por sua vez, apresentou estabilidade e baixo erro em todos os testes.

Tabela 2 – Comparação entre MDF e MSF para o Problema 2 – Cenário 1 (1ª parte)

Raio MSF	Valor Máx.	Soma Dif.	Condicionamento	Valor Máx. (pinv)	Valor Máx. (Tikh)
0,5	0,4883	11,3093	$3,62 \times 10^{10}$	0,4883	0,4883
1,5	0,4883	11,3085	$1,83 \times 10^{18}$	0,4871	0,4860
3	0,4904	11,4976	$1,43 \times 10^{18}$	0,4928	0,4533
4	0,4884	11,4924	$5,66 \times 10^{18}$	0,4875	0,6228

Fonte: Elaborado pelos autores com base nas simulações numéricas obtidas em Siqueira (2023).

Tabela 3 – Comparação entre MDF e MSF para o Problema 2 – Cenário 1 (2ª parte)

Raio MSF	Soma Dif. (pinv)	Soma Dif. (Tikh)	Rank da Matriz
0,5	11,3093	11,3092	96
1,5	11,7102	14,1132	41
3	11,0113	26,7411	27
4	11,4218	117,0598	23

Fonte: Elaborado pelos autores com base nas simulações numéricas obtidas em Siqueira (2023).

Tabela 4 – Comparação entre MDF e MSF para o Problema 2 – Cenário 2 (1ª parte)

Raio MSF	Valor Máx.	Soma Dif.	Condicionamento	Valor Máx. (pinv)	Rank da Matriz
0,5	0,4883	11,3093	$2,21 \times 10^5$	0,4883	48
1,5	0,4883	11,3093	$1,39 \times 10^{16}$	0,4871	39
3	0,4883	11,3029	$1,44 \times 10^{17}$	0,4858	27
4	0,4883	11,2631	$1,85 \times 10^{17}$	0,4872	23

Fonte: Elaborado pelos autores com base nas simulações numéricas obtidas em Siqueira (2023).

Tabela 5 – Comparação entre MDF e MSF para o Problema 2 – Cenário 2 (2ª parte)

Raio MSF	Soma Dif. (pinv)
0,5	11,3093
1,5	11,5726
3	11,9743
4	11,4962

Fonte: Elaborado pelos autores com base nas simulações numéricas obtidas em Siqueira (2023).

#### 4.4 PROBLEMA 3 – DOMÍNIO AMPLO COM FONTE PONTUAL

Neste experimento, foi considerada a equação de Poisson bidimensional:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}, \quad (14)$$

definida no domínio quadrado  $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 100, 0 < y < 100\}$ , com condições de contorno homogêneas do tipo Dirichlet:

$$h(0, y) = h(x, 0) = h(x, 100) = h(100, y) = 100.$$

A função fonte  $\dot{g}$  foi modelada como uma distribuição pontual concentrada no centro do domínio. Utilizaram-se os parâmetros físicos  $Q = 0,03155$  e  $K = 10^{-3}$ . A solução particular  $u_p(x, y)$  foi utilizada para tratar a não-homogeneidade, e a singularidade no ponto central foi contornada por um deslocamento de  $\frac{k}{5}$  do centro da fonte, sendo  $k = 3,125$  o passo adotado no MDF.

Para o Método das Diferenças Finitas (MDF), utilizou-se uma malha regular com espaçamento fixo e o número de condicionamento da matriz associada ao sistema foi de 414,3451.

No caso do Método das Soluções Fundamentais (MSF), adotou-se:

- 128 pontos no contorno;
- 961 pontos internos no domínio.

Foram simulados dois cenários distintos:

1. A fronteira fictícia contendo o mesmo número de pontos do contorno;
2. A fronteira fictícia com metade da quantidade de pontos do contorno.

Para ambos os cenários, variou-se o valor do raio da fronteira fictícia. A seguir, apresentam-se os resultados para o primeiro cenário. As tabelas foram divididas em duas partes para melhor visualização.

### Cenário 1 – fronteira fictícia com mesmo número de pontos do contorno

Tabela 6 – Resultados numéricos para o Problema 3 – Cenário 1 (1ª parte)

<b>Raio MSF</b>	<b>Valor Máx.</b>	<b>Soma Dif.</b>	<b>Condicionamento</b>	<b>Valor Máx. (pinv)</b>	<b>Valor Máx. (Tikh)</b>
71	0,2297	5,7516	$4,84 \times 10^{10}$	0,2297	0,2297
75	0,2296	5,7694	$1,04 \times 10^{12}$	0,2296	0,2296
90	0,2296	5,7695	$8,34 \times 10^{16}$	0,2341	0,2296
100	0,2296	5,7695	$9,38 \times 10^{18}$	0,2268	0,2296
155	0,2296	5,7695	$4,22 \times 10^{18}$	0,2291	0,2296

Fonte: Elaborado pelos autores com base nas simulações numéricas obtidas em Siqueira (2023).

Tabela 7 – Resultados numéricos para o Problema 3 – Cenário 1 (2ª parte)

<b>Raio MSF</b>	<b>Soma Dif. (pinv)</b>	<b>Soma Dif. (Tikh)</b>	<b>Rank da Matriz</b>
71	5,7496	5,7516	128
75	5,7759	5,7694	128
90	7,2304	5,7691	112
100	7,6734	5,7663	95
155	6,0561	5,7428	53

Fonte: Elaborado pelos autores com base nas simulações numéricas obtidas em Siqueira (2023).

## Cenário 2 – fronteira fictícia com metade do número de pontos do contorno

Tabela 8 – Resultados numéricos para o Problema 3 – Cenário 2

Raio MSF	Valor Máx.	Soma Dif.	Condicionamento	Valor Máx. (pinv)	Rank da Matriz
71	0,2296	6,0024	$1,19 \times 10^6$	0,2296	64
75	0,2296	5,7691	$4,09 \times 10^6$	0,2296	64
90	0,2296	5,7695	$3,73 \times 10^8$	0,2296	64
100	0,2296	5,7695	$7,10 \times 10^9$	0,2296	64
155	0,2296	5,7695	$5,91 \times 10^{15}$	0,2348	53

Fonte: Elaborado pelos autores com base nas simulações numéricas obtidas em Siqueira (2023).

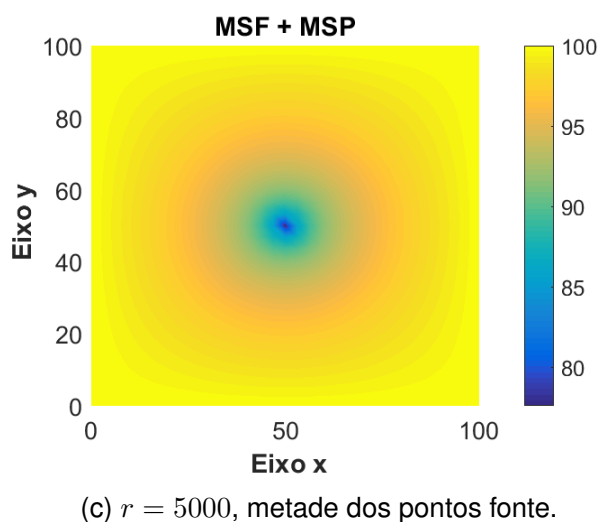
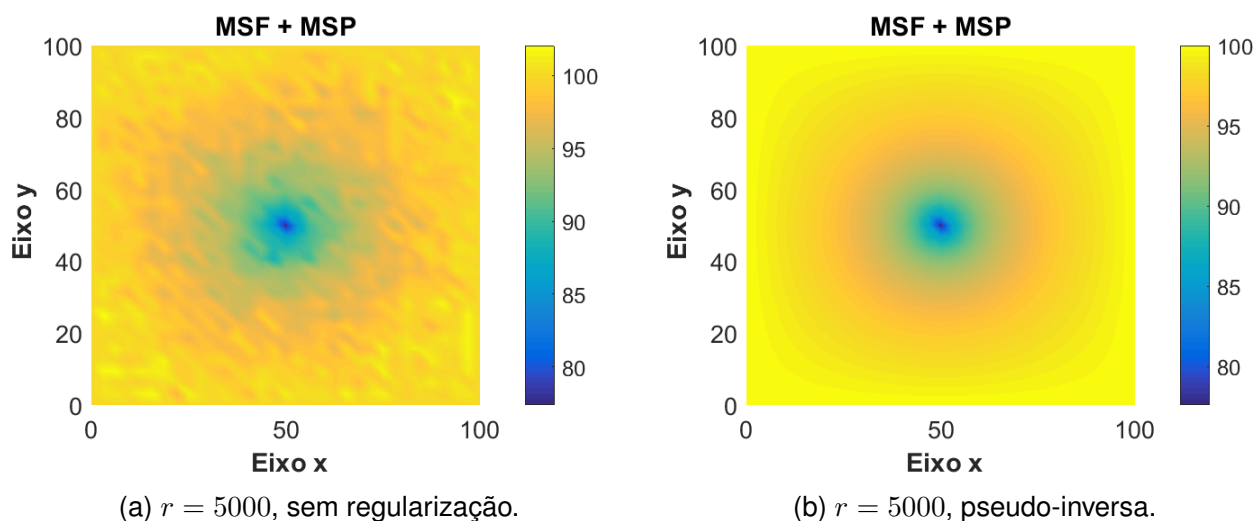
A fim de ilustrar visualmente os efeitos da regularização na estabilidade e na acurácia das soluções numéricas obtidas via MSF, apresenta-se a Figura 1. Essa figura evidencia as simulações obtidas para o raio  $r = 5000$  da fronteira fictícia, cuja matriz associada ao sistema teve posto numérico igual a 13 e número de condicionamento igual a  $2,9276 \times 10^{17}$ . A escolha desse valor de raio se deve ao fato de que, nesse caso, os efeitos da má-condição do sistema aparecem de forma mais acentuada, tornando mais visível a contribuição das técnicas de regularização. Em configurações com raios menores, embora a regularização também seja efetiva, as diferenças não se manifestam tão claramente nas figuras.

A comparação evidencia que, embora o MSF seja capaz de fornecer boas aproximações para raios moderados, a ausência de regularização em configurações com raios elevados pode gerar resultados instáveis, com erros elevados e distorções visuais na solução. Por outro lado, o uso de técnicas como pseudo-inversa e regularização de Tikhonov contribui significativamente para suavizar os efeitos da má-condição do sistema e recuperar a qualidade da solução.

Essa abordagem visual reforça a importância das técnicas de estabilização no MSF, especialmente quando se trabalha com fontes pontuais em domínios amplos e parâmetros que agravam o condicionamento da matriz.

Embora as imagens apresentadas na Figura 1 considerem apenas a inversão direta e a pseudo-inversa, testes adicionais com a regularização de Tikhonov também foram realizados para o caso  $r = 5000$ . Os resultados foram visualmente semelhantes aqueles obtidos com pseudo-inversa, demonstrando suavização das instabilidades e aproximação consistente em relação à solução de referência. Por esse motivo, as imagens correspondentes foram omitidas.

Figura 1 – Soluções numéricas obtidas com o MSF para raio  $r = 5000$ , variando a técnica de resolução. Observa-se instabilidade na solução sem regularização, suavização ao aplicar pseudo-inversa, e melhora significativa ao reduzir o número de fontes na fronteira fictícia.



Fonte: Imagens obtidas das simulações realizadas em Siqueira (2023).

## CONCLUSÃO

A formulação matemática adotada neste artigo está diretamente associada ao comportamento físico do fluxo de água em aquíferos porosos confinados. A variável  $h(x, y)$ , denominada carga hidráulica, representa a energia total do fluido em cada ponto do domínio, podendo ser interpretada como a altura até a qual a água subiria em um poço perfurado naquele local. Essa grandeza está relacionada à quantidade de água armazenada e disponível e à forma como ela se movimenta dentro do meio poroso. As regiões com maior carga hidráulica tendem a transferir água para regiões com menor valor, obedecendo ao gradiente hidráulico, conforme a Lei de Darcy. Além disso, os termos fonte inseridos na equação representam fisicamente processos

de recarga ou extração de água, influenciando diretamente a distribuição da carga hidráulica no domínio. Desse modo, os resultados numéricos obtidos não apenas validam os métodos computacionais utilizados, mas também permitem interpretar fenômenos relevantes relacionados à disponibilidade e ao deslocamento da água subterrânea em situações reais.

Foi realizada uma análise comparativa entre dois métodos numéricos para a resolução da equação das águas subterrâneas em aquíferos porosos confinados: o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método das Soluções Fundamentais (MSF). A abordagem contemplou tanto equações homogêneas quanto não homogêneas, com foco especial em fontes pontuais distribuídas no domínio.

O MDF demonstrou-se um método estável, eficiente e de fácil implementação, especialmente em domínios regulares. Sua estrutura matricial bem condicionada resultou em erros mínimos em todos os experimentos realizados, servindo como base de comparação para os demais métodos.

O MSF, quando avaliado individualmente ou aplicado em conjunto com o MSP, apresentou desempenho satisfatório tanto em problemas com equações diferenciais parciais homogêneas quanto não homogêneas, ou seja, com ou sem termo fonte. Essa versatilidade reforça o potencial do método para lidar com diferentes tipos de modelagem, mesmo considerando a complexidade adicional introduzida pela presença do termo fonte. Uma das principais vantagens do MSF, é sua eficiência em domínios extensos, como os comumente encontrados na modelagem de aquíferos. Por não depender de malhas, o MSF facilita a simulação em grandes áreas e permite maior flexibilidade na distribuição dos nós. Essa característica o torna particularmente atrativo para aplicações em larga escala. A análise revelou, no entanto, sensibilidade significativa à escolha do raio da fronteira fictícia e ao número de pontos utilizados nessa região. A má-condição das matrizes geradas foi observada em diversos cenários, especialmente para raios grandes, com queda acentuada do posto da matriz.

A aplicação de técnicas de regularização, como a pseudo-inversa e a regularização de Tikhonov, contribuiu para suavizar essas instabilidades, sendo essencial em casos com alto número de condicionamento. Em particular, observou-se que a pseudo-inversa forneceu aproximações mais próximas da referência do MDF em situações críticas, enquanto o uso de Tikhonov apresentou limitações conforme o aumento do raio.

Nos três problemas propostos, diferentes cenários foram explorados. No primeiro, com solução analítica conhecida, confirmou-se a precisão do MDF e o bom desempenho do MSF em configurações adequadas. No segundo e terceiro problemas, verificou-se que a redução do número de fontes na fronteira fictícia pode contribuir para a estabilização do método, sem prejuízo à precisão. Adicionalmente, observou-se que, para domínios maiores, o MSF manteve boa eficiência computacional, mesmo com aumento de complexidade.

Como perspectiva para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação dos métodos analisados em domínios curvos e tridimensionais, inclusão da variação temporal, a utilização de condições de

Neumann, bem como a análise da influência de diferentes estratégias de regularização no comportamento final das soluções. Além disso, propõe-se investigar a sensibilidade dos parâmetros envolvidos, como o raio da fronteira fictícia, o número de pontos virtuais e a localização da fonte. Tais direções podem ampliar a aplicabilidade do MSF em contextos reais, consolidando-o como uma ferramenta promissora na modelagem de aquíferos e problemas associados.

## REFERÊNCIAS

ASKOUR, Omar; TRI, Abdeljalil; BRAIKAT, Bouazza; ZAHROUNI, Hamid; POTIER-FERRY, Michel. Method of fundamental solutions and high order algorithm to solve nonlinear elastic problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 89, p. 25–35, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.01.007>.

BASÍLIO, Adam. **Resolução da Equação de Laplace aplicada a Problemas Diretos e Inversos de Transferência de Calor por Condução**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/34313>. Acesso em: 5 dez. 2023.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, Douglas J.; BURDEN, Annette M. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

CHENG, Alexander H. D.; HONG, Yongxing. An overview of the method of fundamental solutions: Solvability, uniqueness, convergence, and stability. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 120, p. 118–152, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.08.013>.

CUMINATO, José Alberto; MENEGUETTE JUNIOR, Messias. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Coleção Matemática Aplicada. ISBN 978-85-8337-005-5.

CUNHA, Maria Cristina de Castro. **Métodos Numéricos**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000. ISBN 978-85-268-0384-4.

DAS, Sanjukta; ELDHO, T. I. A meshless weak strong form method for the groundwater flow simulation in an unconfined aquifer. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 137, p. 147–159, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.02.001>.

FEITOSA, Fernando A. C.; MANOEL FILHO, João; FEITOSA, Edilton Carneiro; DEMÉTRIO, José Geilson A. (ed.). **Hidrogeologia: conceitos e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro, RJ: CPRM: LABHID, 2008. ISBN 978-85-7499-061-3.

GOLBERG, Michael A. The method of fundamental solutions for Poisson's equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 16, n. 3, p. 205–213, 1995. DOI:[https://doi.org/10.1016/0955-7997\(95\)00062-3](https://doi.org/10.1016/0955-7997(95)00062-3).

GOLUB, Gene H.; HANSEN, Per Christian; O'LEARY, Dianne P. Tikhonov Regularization and Total Least Squares. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 21, n. 1, p. 185–194, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0895479897326432>.

KUPRADZE, V. D.; ALEKSIDZE, M. A. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, v. 4, n. 4, p. 82–126, 1964. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90006-0). ISSN 0041-5553.

LEON, Steven J. **Álgebra Linear com Aplicações**. 9. ed. [S. l.]: LTC, 2019. ISBN 9788521635352.

LIBARDI, Paulo Leonel. **Dinâmica da Água no Solo**. São Paulo, SP: Editora da Universidade de São Paulo, 2018. ISBN 9788531417054.

MATHON, Rudolf; JOHNSTON, R. L. The Approximate Solution of Elliptic Boundary-Value Problems by Fundamental Solutions. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 14, n. 4, p. 638–650, 1977. DOI: <https://doi.org/10.1137/0714043>.

RODRIGUES NETO, Guilherme Costa. **Método livre de malha usando solução fundamental aplicado na simulação do fluxo de água subterrâneo**. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/50150>. Acesso em: 5 dez. 2023.

SANTANA, Alessandro Alves. **Programas em MATLAB para Implementação de Exemplos em Discretização de Equações Diferenciais Parciais**. 1998. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade de São Paulo, São Carlos, ago. 1998. DOI: <https://doi.org/10.11606/D.55.2018.tde-13032018-090544>.

SANTOS, W. J.; SANTIAGO, J. A. F.; TELLES, J. C. F. Optimal positioning of anodes and virtual sources in the design of cathodic protection systems using the method of fundamental solutions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 46, p. 67–74, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.05.009>. ISSN 0955-7997.

SANTOS, Wilian Jeronimo dos. **Análise de Sistemas Otimizados de Proteção Catódica Usando Métodos Numéricos Dependentes da Função de Green**. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, abr. 2015. Disponível em: <http://www.coc.ufrj.br/pt/teses-de-doutorado/390-2015/4638-wilian-jeronimo-dos-santos>. Acesso em: 5 dez. 2023.

SIMÕES, André Luiz Andrade; SCHULZ, Harry Edmar; PORTO, Rodrigo de Melo. **Métodos Computacionais em Hidráulica**. Salvador, BA: EDUFBA, 2017. ISBN 978-85-232-1602-3.

SIQUEIRA, Bryan Aoliabe. **Uma comparação entre o método das diferenças finitas e o método das soluções fundamentais para simulações numéricas em aquíferos com extração de água através de um poço**. 2023. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, dez. 2023. Disponível em: <https://rima.ufrrj.br/jspui/handle/20.500.14407/18268>. Acesso em: 5 dez. 2023.


TODD, David K. **Hidrologia de Águas Subterrâneas**. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1989. Tradução de Araken Silveira e Evelyn Bloem Souto Silveira.


WANG, Fuzhang; ZHENG, K. H. The method of fundamental solutions for steady-state groundwater flow problems. **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, v. 39, p. 1–7, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1080/02533839.2015.1082936>.

WENDLAND, Edson. **Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas**. São Carlos, SP: SBMAC, 2012. v. 3. Notas em Matemática Aplicada. Disponível em: [https://www.sbmac.org.br/wp-content/uploads/2022/08/livro\\_03.pdf](https://www.sbmac.org.br/wp-content/uploads/2022/08/livro_03.pdf). Acesso em: 5 dez. 2023.

## **SOBRE OS AUTORES**

Me. Bryan Aoliabe Siqueira


 <https://orcid.org/0009-0008-6993-457X>


 <http://lattes.cnpq.br/5993689322736864>

**Contato:** bryansiqueira.mtm@gmail.com

**Contribuição autoral:** administração do projeto; análise formal; conceituação; curadoria de dados; escrita – primeira redação; investigação; metodologia; obtenção de financiamento; software; validação.

Dr. Wilian Jeronimo dos Santos


 <https://orcid.org/0000-0001-5602-646X>


 <http://lattes.cnpq.br/5298677032432741>

**Contato:** wilianj@gmail.com

**Contribuição autoral:** administração do projeto; análise formal; escrita – revisão e edição; investigação; supervisão.

Me. Cleison dos Santos Ramthun


 <https://orcid.org/0009-0007-3880-3991>


 <http://lattes.cnpq.br/2222545508712238>

**Contato:** cl.sr@hotmail.com

**Contribuição autoral:** análise formal; escrita – revisão e edição; validação.

Dr. Renan de Souza Teixeira

 <https://orcid.org/0000-0003-1700-6874>

 <http://lattes.cnpq.br/3136664285679846>

**Contato:** renanpcivil@yahoo.com.br

**Contribuição autoral:** análise formal; escrita – revisão e edição.

Revisora de texto: Andreza Antunes