

UMA NOVA ABORDAGEM ACERCA DOS NÚMEROS 2-QUASEMONODÍGITOS

A NEW APPROACH TO 2-QUASIREPDIGTS NUMBERS

UN NUEVO ENFOQUE SOBRE LOS NÚMEROS 2-CASIMONODÍGITOS

Eudes Antonio da Costa^[1], Douglas Catulio dos Santos^[2], Fernando Soares de Carvalho^[1]

[1] Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, TO, Brasil.

[2] Secretaria de Educação do Estado da Bahia (SEC), Barreiras, BA, Brasil.

Data de submissão: 29 abr. 2025. **Data de aprovação:** 8 out. 2025. **Financiamento:** Os autores declaram não haver financiamento. **Como citar:** COSTA, Eudes Antonio da; SANTOS, Douglas Catulio dos; CARVALHO, Fernando Soares de. Uma nova abordagem acerca dos números 2-quasemonodígitos. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 11, p. e309, 12 dez. 2025. <https://doi.org/10.35819/remat2025v11id7709>.



Este artigo está licenciado sob uma licença *Creative Commons Attribution 4.0 International License*.

Resumo: Nestas notas, exploramos algumas propriedades dos números 2-quasemonodígitos, os quais são denotados por $2 - QM(k, a, b)$. Investigamos critérios de divisibilidade, primalidade e quadrados perfeitos, analisando subclasses específicas de 2-quasemonodígitos. Além disso, apresentamos fórmulas fechadas para determinar esses números e suas somas parciais geradoras. As demonstrações empregam ferramentas e propriedades elementares, fundamentadas principalmente em conceitos de divisibilidade e congruência.

Palavras-chave: divisibilidade; números primos; quadrados perfeitos; somas parciais.

Abstract: In these notes, we explore various properties of 2-quasimonodigit numbers, which are denoted by $2 - QM(k, a, b)$. We investigate criteria for divisibility, primality, and perfect squares, analyzing specific subclasses of 2-quasimonodigits. Furthermore, we present closed formulas to determine these numbers and their generating partial sums. The demonstrations employ elementary tools and properties, relying primarily on concepts of divisibility and congruence.

Keywords: divisibility; prime numbers; perfect squares; partial sums.

Resumen: En estas notas, exploramos diversas propiedades de los números 2-casimonodígitos, los cuales denotamos por $2 - QM(k, a, b)$. Investigamos criterios de divisibilidad, primalidad y cuadrados perfectos, analizando subclases específicas de 2-casimonodígitos. Además, presentamos fórmulas cerradas para determinar estos números y sus sumas parciales generadoras. Las demostraciones emplean herramientas y propiedades elementales, basándose principalmente en conceptos de divisibilidad y congruencia.

Palabras clave: divisibilidad; números primos; cuadrados perfectos; sumas parciales.

1 INTRODUÇÃO

Conforme Beiler (1964), um número *monodígito* (um dígito apenas) é um número natural não nulo formado pela repetição do mesmo dígito (algarismo) em um sistema numérico posicional, isto é, em uma base $b > 1$ fixada. Aqui utilizaremos a convencional base decimal ($b = 10$). São

exemplos de números *monodígitos*: 2, 33, 111, 4444, 5555555 e 999999. Ainda, seguindo Beiler (1964), o termo *repunidade* (repetição da unidade) é utilizado quando o algarismo repetido for 1, ou seja, a unidade. Várias propriedades relacionadas a números monodígitos ou repunidades podem ser consultadas em Beiler (1964), Yates (1992), Zeitz (1999), Andreescu e Gelca (2008), Costa e Santos (2022) e Gupta (2025). As *repunidades* e os *monodígitos* são números da forma:

- *repunidades*

$$R_k = \underbrace{11\dots11}_k = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^k - 1}{9}, \quad (1)$$

- *monodígitos*

$$A_{(k)} = \underbrace{aa\dots a}_k = a \cdot R_k, \quad \text{com } a \in D^*, \quad (2)$$

em que $k \geq 1$ é um número inteiro, $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $D^* = D - \{0\}$.

Para quaisquer $a, b \in D^*$ distintos, tem-se que um *quasemonodígito* é um número natural não nulo, formado apenas pelos algarismos a e b e que contenha $k \geq 2$ dígitos. E mais, o dígito a deve aparecer $k - 1$ vezes e o dígito b apareça apenas uma vez. No caso em que o algarismo a for 1 (unidade), seguindo Williams (1978), diremos que *quasemonodígito* é uma *quaserrepunidade*. Alguns *quasemonodígitos*, são números da forma:

$$a) QM_1 = \underbrace{aa\dots a}_k b, \quad b) QM_2 = b \underbrace{aa\dots a}_k, \quad c) QM_3 = \underbrace{a\dots a}_k b \underbrace{a\dots a}_k, \quad \text{com } a \in D^* \text{ e } b \in D, \quad (3)$$

em que $k \geq 1$ é um número inteiro.

Em Williams (1978) são apresentadas algumas propriedades de números quaserrepunidades e uma lista de primos nesta classe; enquanto em Carvalho e Costa (2022b) apresenta-se uma lista de primos e propriedades relativas a critérios de divisibilidade e quadrados perfeitos nas três subclasses de *quasemonodígitos* dados na Equação (3).

Segundo Carvalho e Costa (2022a) dizemos que um número natural não nulo formado por $k \geq 3$ dígitos (algarismo), no qual o dígito b apareça exatamente duas vezes e o dígito a apareça exatamente $k - 2$ vezes é um *2-quasemonodígito*, com $a \in D^*$, $b \in D$ e $a \neq b$. Por exemplo, 121, 2332, 44777, 51551555, 888822, 99955999 e 161111116 são exemplos de *2-quasemonodígito*.

Denotaremos o números 2-quasemonodígitos por $2 - QM(k, a, b)$. Em particular, vamos considerar três subconjuntos de números *2-quasemonodígitos*, denotados por:

• 2-quasemonodígitos

$$a) \quad 2 - QM_1(k, a, b) = b \underbrace{aa \dots aa}_k b, \quad (4)$$

$$b) \quad 2 - QM_2(k, a, b) = \underbrace{aa \dots aa}_k bb, \quad (5)$$

$$c) \quad 2 - QM_3(k, a, b) = bb \underbrace{aa \dots aa}_k, \quad \text{com } a, b \in D. \quad (6)$$

Neste trabalho, apresentamos, discutimos e analisamos resultados referentes a esta subclasse de números inteiros, os números 2-quasemonodígitos, em especial os resultados discutidos nas seções posteriores referem-se as subclasses definidas pelas Equações (4), (5) e (6). Na Seção 2, derivamos uma expressão geral para cada uma das subclasses citadas acima. Em seguida, na Seção 3, examinamos as condições sob as quais os números 2-quasemonodígitos não são primos e, com o auxílio de métodos computacionais, apresentamos uma listagem de primos nas três subclasses anteriormente categorizadas. Na Seção 4, concentramos nossos esforços nos números 2-quasemonodígitos quadrados perfeitos e demonstramos que não existem quadrados perfeitos nas três subclasses analisadas. Na Seção 5, apresentamos resultados sobre somas parciais de termos da sequência 2-quasemonodígitos. Nas considerações finais, destacamos e declaramos alguns trabalhos futuros sobre este tópico.

O estudo de classes de números que apresentam padrões regulares constitui uma etapa fundamental para a compreensão de propriedades estruturais mais amplas em matemática, e nos remete aos primórdios da comunidade Pitagórica, e nosso envolvimento com a determinação da primalidade desses números é motivado pela leitura de Ribenboim (2001). Estivemos motivados em identificar e analisar tais padrões, o que nos permitiu formular conjecturas e desenvolver métodos de generalização.

2 EXPRESSÃO GERAL E PRELIMINARES

Nesta seção, estabelecemos as fórmulas de Binet associadas as subclasses dos números 2-quasemonodígitos definidas nas equações anteriores, a depender exclusivamente dos valores a, b e k , sem a necessidade de relacionar com o número monodígito associado.

Primeiro observamos que os números 2-quasemonodígitos do tipo $2 - QM_1(k, a, b)$, $2 - QM_2(k, a, b)$ ou $2 - QM_3(k, a, b)$ podem ser escritos na forma a seguir:

Proposição 2.1. Para $a, b \in D$ e $k \geq 1$ inteiro, temos:

$$(a) \quad 2 - QM_1(k, a, b) = b(10^{k+1} + 1) + 10aR_k,$$

$$(b) \quad 2 - QM_2(k, a, b) = aR_k 10^2 + bR_2,$$

$$(c) \quad 2 - QM_3(k, a, b) = bR_2 10^k + aR_k,$$

sendo R_k a repunidade de k algarismos dada pela Equação (1).

Demonstração.

(a) A demonstração pode ser consultada em Carvalho e Costa (2022a, p. 196).

(b) Basta notar que,

$$\begin{aligned} 2 - QM_2(k, a, b) &= \underbrace{aa \dots aa}_{k \text{ vezes}} bb \\ &= a \cdot 10^{k+1} + a \cdot 10^k + \dots + 10^2 a + 10b + b \\ &= 10^2 a (10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) + b(10 + 1) \\ &= 10^2 a R_k + 11b \end{aligned}$$

em que usamos a Equação (1), e obtemos o resultado esperado.

De igual modo, obtemos o resultado do item (c). □

Combinando a Proposição 2.1 com a Equação (1), obtemos que:

Proposição 2.2. Para $a, b \in D$ e $k \geq 1$ inteiro, temos:

$$(a) \quad 2 - QM_1(k, a, b) = \frac{10^{k+1}(a+9b) - (10a+9b)}{9},$$

$$(b) \quad 2 - QM_2(k, a, b) = \frac{10^{k+2}a - (100a - 99b)}{9},$$

$$(c) \quad 2 - QM_3(k, a, b) = \frac{10^k(a+99b) - a}{9}.$$

Na Proposição 2.1, ou na Proposição 2.2, quando tomamos $a = 1$ obtemos os números *2-quasemonodígitos*, ou simplesmente *2-quase- R_k* , os quais denotamos por $2 - QR_1(k, b)$, $2 - QR_2(k, b)$ e $2 - QR_3(k, b)$. Assim, podemos escrevê-los na seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2 - QR_1(k, b) &= b(10^{k+1} + 1) + 10R_k \\ 2 - QR_2(k, b) &= 10^2 R_k + bR_2 \\ 2 - QR_3(k, b) &= 10^k b R_2 + R_k. \end{aligned} \tag{7}$$

O resultado a seguir é uma consequência da Proposição 2.2 e da Equação (7).

Corolário 2.3. Seja $b \in D$ e $k \geq 1$, então:

$$(a) \quad 2 - QR_1(k, b) = \frac{10^{k+1}(1+9b) - (10+9b)}{9}, \text{ com } b \neq 0,$$

$$(b) \quad 2 - QR_2(k, b) = \frac{10^{k+2} - (100 - 99b)}{9},$$

$$(c) \quad 2 - QR_3(k, b) = \frac{10^k(1+99b) - 1}{9}.$$

3 NÚMEROS 2-QUASEMONODÍGITOS PRIMOS

Nesta seção, estudamos a relação de primalidade dos números 2-quasemonodígitos, devido à dificuldade de determinação da primalidade de um número inteiro, tendo em vista a não existência de um algoritmo eficiente para a realização de tal tarefa, posteriormente, procuraremos eliminar os possíveis números primos do tipo 2-quasemonodígitos. Assim, apresentamos as Tabelas 1, 2 e 3 que exibem alguns números 2-quasemonodígitos.

Nos resultados adiante, procuraremos eliminar os possíveis números primos na classe dos 2-quasemonodígitos.

Proposição 3.1. *Para todos $a, b \in D$ e $k \geq 1$, temos que $2 - QM_1(k, a, b)$ não é primo se $b \in \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$.*

A demonstração pode ser consultada em Carvalho e Costa (2022a, p. 197).

Apresentamos a seguir um resultado similar.

Proposição 3.2. *Para todos $a, b \in D$ e $k \geq 1$, temos que $2 - QM_2(k, a, b)$ não é primo se $b \in \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$.*

Demonstração. Basta observar que para $b \in \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ tem-se que $2 - QM_2(k, a, b)$ será par ou múltiplo de 5. \square

Com argumentos similares aos utilizados na Proposição 3.2 obtemos o próximo resultado:

Proposição 3.3. *Para todos $a, b \in D$ e $k \geq 1$, temos que $2 - QM_3(k, a, b)$ não é primo se $a \in \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$.*

O resultado a seguir é o clássico critério de divisibilidade por 3, cuja demonstração pode ser consultada em Niven, Zuckerman e Montgomery (1991) e Martinez *et al.* (2010).

Lema 3.4. *(Niven; Zuckerman; Montgomery, 1991; Martinez et al., 2010) Um número inteiro é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 3.*

Como consequência teremos que nenhum $2 - QM(k, a, b)$ é primo nos casos em que a e b são múltiplos de 3, vejamos:

Proposição 3.5. *Se $a, b \equiv 0 \pmod{3}$, então nenhum $2 - QM(k, a, b)$ não é primo.*

Demonstração. Como $a, b \equiv 0 \pmod{3}$, ou seja, existem inteiros q e r tais que $a = 3q$ e $b = 3r$. Agora, basta observar que pela Proposição 2.1 temos que:

$$2 - QM_1(k, 3q, 3r) = 3r(10^{k+1} + 1) + 3q \cdot 10R_k,$$

$$2 - QM_2(k, 3q, 3r) = 3qR_k10^2 + 3rR_2$$

e

$$2 - QM_3(k, 3q, 3r) = 3r \cdot R_2 10^k + 3qR_k,$$

são todos múltiplos de 3, portanto não podem ser primos. \square

De igual maneira, teremos que:

Proposição 3.6. *Se $k, b \equiv 0 \pmod{3}$, então nenhum $2 - QM(k, a, b)$ não é primo.*

Demonstração. Basta observar que se $n \equiv 0 \pmod{3}$ então $R_n \equiv 0 \pmod{3}$ (Costa; Santos, 2020, Proposição 1). Como também temos $b \equiv 0 \pmod{3}$, segue do Lema 3.4 que $2 - QM(k, a, b) \equiv 0 \pmod{3}$. \square

Em particular,

Corolário 3.7. *Se $k, b \equiv 0 \pmod{3}$, então nenhum $2 - QR(k, b)$ é um número primo.*

Proposição 3.8. *Se $k \equiv 0 \pmod{6}$ e $b = 7$, então nenhum $2 - QM(k, a, b)$ não é primo.*

Demonstração. De fato, como $k \equiv 0 \pmod{6}$ então $R_k \equiv 0 \pmod{7}$, conforme Costa e Santos (2020, Proposição 3), e o resultado segue. \square

Agora, apresentamos o conhecido critério de divisibilidade por 11 enunciado a seguir.

Lema 3.9. (Niven; Zuckerman; Montgomery, 1991; Martinez et al., 2010) *Um número é divisível por 11 se a soma alternada de seus algarismos for divisível por 11.*

Exemplo 3.10. (Carvalho; Costa, 2022a, p. 198) *Veja que 11 divide $2 - QM_1(2, a, b)$. De fato, visto que a soma alternada dos algarismos é $b - a + a - b = 0$. E mais, é de fácil fatoração, pois*

$$\begin{aligned} 2 - QM_1(2, a, b) &= b \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b = b(10^3 + 1) + 10a(10 + 1) \\ &= 11 \cdot 91b + 11 \cdot 10a = 11(91b + 10a). \end{aligned}$$

Exemplo 3.11. *Veja que 11 também divide $2 - QM_2(2, a, b)$ e $2 - QM_3(2, a, b)$. De fato, basta observar que a soma alternada dos algarismos é $a - a + b - b = 0$. E mais, a fatoração é*

$$\begin{aligned} 2 - QM_2(2, a, b) &= a \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + b = a \cdot 10^2(10 + 1) + b(10 + 1) \\ &= 11 \cdot (a \cdot 10^2 + b). \end{aligned}$$

Como consequência direta do Lema 3.9, temos o resultado seguinte:

Teorema 3.12. *Nenhum 2-quasemonodígito do tipo $2 - QM_1(k, a, b)$, $2 - QM_2(k, a, b)$ ou $2 - QM_3(k, a, b)$ é primo, sendo k um número inteiro par.*

Demonstração. Para qualquer k par, considere: $x = 2 - QM_1(k, a, b)$, $y = 2 - QM_2(k, a, b)$ e $z = 2 - QM_3(k, a, b)$. Para $x = b\underbrace{aa\dots aa}_k b$, $y = \underbrace{aa\dots aa}_k bb$ e $z = bb\underbrace{aa\dots aa}_k$, seja $S^*(t)$ a soma alternada dos algarismos de qualquer natural t . Nessas condições, segue que:

$$\begin{aligned}
 S^*(x) &= b + \underbrace{(-a + a) + \dots + (-a + a)}_{(k/2) \text{ parcelas}} - b = 0 \\
 S^*(y) &= \underbrace{(a - a) + \dots + (a - a)}_{(k/2) \text{ parcelas}} + (b - b) = 0 \\
 S^*(z) &= (b - b) + \underbrace{(a - a) + \dots + (a - a)}_{(k/2) \text{ parcelas}} = 0.
 \end{aligned}$$

Logo, segue do Lema 3.9 que x, y e z são todos divisíveis por 11. Portanto, nem x , nem y e nem z , é um número primo. □

Com os conhecimentos dos resultados desta seção, utilizamos o software *Octave* e escrevemos um código para determinar os números $2 - QM_1(k, a, b)$, $2 - QM_2(k, a, b)$ ou $2 - QM_3(k, a, b)$ primos com $k \leq 15$ ímpar. Os números apresentados na Tabela 2 são os números primos do tipo $2 - QM_1(k, a, b)$, na Tabela 1 os do tipo $2 - QM_2(k, a, b)$, e, por fim, na Tabela 3 os do tipo $2 - QM_3(k, a, b)$.

Tabela 1 – Números primos da forma $2 - QM_2(k, a, b)$, $k \leq 15$

b	(k, a)
1	(1,2), (1,3), (3,3), (5,3), (3,5), (3,7), (1,8), (3,8), (13,8), (1,9)
3	(1,2), (1,4), (1,7)
7	(3,1), (11,1), (1,2), (3,2), (7,2), (9,2), (3,3), (9,3), (1,5), (1,6), (1,8), (1,9), (9,9)
9	(1,1), (7,1), (1,4), (1,5), (7,5), (7,7)

Fonte: Elaboração dos autores.

Tabela 2 – Números primos da forma $2 - QM_1(k, a, b)$, $k \leq 15$

b	(k, a)
1	(1,3), (1,5), (1,8), (1,9), (3,3), (3,5), (3,6), (3,9), (5,3), (5,4), (5,7) (7,8), (7,9), (11,6), (13,8)
3	(1,1), (1,5), (1,7), (1,8), (5,2), (5,4), (7,2), (7,5), (11,1), (11,4), (11,8) (13,1), (13,7)
7	(1,2), (1,5), (1,8), (1,9), (3,2), (3,5), (3,6), (3,8), (3,9), (5,6), (7,2) (9,4), (9,5)
9	(1,1), (1,2), (5,2), (5,8), (11,2)

Fonte: Elaboração dos autores.

Tabela 3 – Números primos da forma $2 - QM_3(k, a, b)$, $k \leq 15$

a	(k, b)
1	(3,2), (1,3), (3,4), (1,6), (9,7), (1,8), (13,8), (1,9), (7,9)
3	(1,1), (5,1), (7,1), (1,2), (7,2), (1,4), (5,4), (11,4), (3,5), (1,7), (7,7), (1,8)
7	(3,1), (9,1), (1,2), (3,2), (1,3), (3,4), (9,4), (1,5), (1,6), (1,8), (13,8), (1,9), (5,9)
9	(5,1), (1,2), (1,4), (5,5), (3,7), (5,7), (7,7), (9,7)

Fonte: Elaboração dos autores.

4 NÚMEROS 2-QUASEMONODÍGITOS QUADRADOS PERFEITOS

Nesta seção, exibimos algumas propriedades associadas aos números quadrados perfeitos que também são números 2-quasemonodígitos.

Destacamos que um número inteiro positivo m é dito quadrado perfeito, quando existe um inteiro d de tal maneira que $m = d^2$. Para facilitar a organização e a compreensão das propriedades desta seção, faremos uso dos resultados auxiliares apresentados como lemas adiante. As demonstrações desses lemas baseiam-se em conceitos ou resultados usuais da aritmética modular, os quais podem ser consultados nas referências indicadas.

Lema 4.1. (Niven; Zuckerman; Montgomery, 1991; Martinez et al., 2010) *Um quadrado perfeito não termina em 2, 3, 7 e 8.*

Lema 4.2. (Niven; Zuckerman; Montgomery, 1991; Martinez et al., 2010) *Todo quadrado perfeito é da forma $4q$ ou $4q + 1$ para todo q natural.*

Lema 4.3. (Carvalho; Costa, 2022a, p. 200) *Para todo número n natural, temos*

$$10^{2n+1} + 1 = 11 \cdot (10^{2n} - 10^{2n-1} + \dots + 10^2 - 10^1 + 1).$$

No número 9090909091 o algarismo 9 aparece 5 vezes, e mais, $9090909091 = 11 \cdot 826466281$. O próximo resultado estabelece uma condição em que os números inteiros da forma $9090 \dots 9091$ não sejam divisores de 11, tal resultado nos será também útil adiante.

Proposição 4.4. *Para todo número natural n , se $n \not\equiv 5 \pmod{11}$ então 11 não divide*

$$10^{2n} - 10^{2n-1} + \dots + 10^2 - 10^1 + 1.$$

Demonstração. Veja que

$$\begin{aligned} y &= 10^{2n} - 10^{2n-1} + 10^{2n-2} - 10^{2n-3} + \dots + 10^2 - 10^1 + 1 \\ &= 10^{2n-1}(10 - 1) + 10^{2n-3}(10 - 1) + \dots + 10^3(10 - 1) + 10(10 - 1) + 1 \\ &= \underbrace{9090 \dots 909}_{9 \text{ aparece } n \text{ vezes}} 1. \end{aligned}$$

A soma alternada dos algarismos do número y é $9n - 1$, como $n \not\equiv 5 \pmod{11}$, segue do Lema 3.9 que y não é múltiplo de 11. \square

A demonstração dos dois resultados a seguir pode ser consultada em Carvalho e Costa (2022a, p. 199).

Proposição 4.5. *Seja a um número ímpar, então o número $2 - QM_1(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito para $b \in C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.*

Proposição 4.6. *Se a é um número par, então o número $2 - QM_1(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito para $b \in C_2 = \{2, 3, 6, 7, 8\}$.*

O Teorema 4.7, proposto inicialmente em Carvalho e Costa (2022a), continha um pequeno erro em sua demonstração, o qual será corrigido a seguir.

Teorema 4.7. *Nenhum $2 - QM_1(k, a, b)$ é um quadrado perfeito, para k par e $k \not\equiv 10 \pmod{11}$.*

Demonstração. Considere x um número da forma $x = 2 - QM_1(k, a, b)$, temos que k é par, como $k \not\equiv 10 \pmod{11}$, acarreta que existe um natural n tal que $n \not\equiv 5 \pmod{11}$. Pela Proposição 2.1, tem-se

$$x = b(10^{k+1} + 1) + 10aR_k = b(10^{2n+1} + 1) + 10aR_{2n},$$

sendo R_k uma repunidade. Pelo Teorema 3.12, sabe-se que 11 divide qualquer número $x \in 2 - QM_1(2n, a, b)$. Vamos mostrar que 11^2 não divide x . Pelo Lema 4.3, temos que 11 divide $b(10^{k+1} + 1)$ e pelo Lema 3.9, $R_2 = 11$ divide R_{2n} e assim também divide $10 \cdot aR_{2n}$. Se n também for par, teríamos que 11^2 divide $10 \cdot aR_{2n}$. No entanto, 11^2 nunca divide $b(10^{k+1} + 1)$, pois 11 não divide $y = 10^{2n} - 10^{2n-1} + \dots + 10^2 - 10^1 + 1$, conforme Proposição 4.4. Logo, x é divisível por 11, mas não é divisível por 11^2 . Portanto, x não pode ser um quadrado perfeito. \square

Observe que os números $2 - QM_1(1, 2, 1) = 11^2 = 121$, $2 - QM_1(1, 8, 4) = 22^2 = 484$ e $2 - QM_1(1, 7, 6) = 26^2 = 676$, são quadrados perfeitos, ou seja, existem quadrados perfeitos do tipo $2 - QM_1(1, a, b)$. No entanto,

Exemplo 4.8. (Carvalho; Costa, 2022a, p. 200) Nenhum número $2 - QM_1(2, a, b)$ é um quadrado perfeito. De fato, de acordo com o Lema 4.1, se $b = 2, 3, 7$ ou 8 , o número $2 - QM_1(2, a, b)$ não pode ser um quadrado perfeito. Considerando $k = 2$ nas Proposições 4.5 e 4.6, restam dois casos a serem verificados, a saber: 1) a é ímpar e $b = 6$, neste caso, a fatoração de todos os possíveis números, 6116, 6336, 6556, 6776 e 6996, são listadas na Tabela 4, observando que nenhum desses números é um quadrado perfeito. 2) a é par e $b = 1, 4, 5$ ou 9 , para esses números (veja Tabela 4), verifica-se também que nenhum deles é um quadrado perfeito. Portanto, é possível concluir que os números da forma $2 - QM_1(2, a, b)$ não são quadrados perfeitos, como demonstrado no Teorema 4.7.

Tabela 4 – Números $2 - QM_1(4, a, b)$ não quadrados perfeitos

baab	Fatoração
6116	$2^2 \times 11 \times 139$
6336	$2^6 \times 3^2 \times 11$
6556	$2^2 \times 11 \times 149$
6776	$2^3 \times 7 \times 11^2$
6996	$2^2 \times 11 \times 53$
1221	$3 \times 11 \times 37$
1441	11×31
1661	11×51
1881	$3^2 \times 11 \times 19$
4224	$2^7 \times 3 \times 11$
4664	$2^3 \times 11 \times 53$
4884	$2^2 \times 3 \times 11 \times 37$
5225	$5^2 \times 11 \times 19$
5445	$3^2 \times 5 \times 11^2$
5665	$5 \times 11 \times 103$
5885	$5 \times 11 \times 107$
9229	11×839
9449	11×859
9669	$3 \times 11 \times 293$
9889	$11 \times 29 \times 31$

Fonte: Elaboração dos autores.

Teorema 4.9. Nenhum número $2 - QM_2(k, a, b)$ é um quadrado perfeito para todo $k \geq 2$ natural.

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos que $a \neq b$ (o caso $a = b$ já foi demonstrado em Costa e Santos (2022)). Para $b \in \{2, 3, 7, 8\}$, o resultado segue do Lema 4.1.

Para os casos $b \in \{1, 5, 6, 9\}$, a Proposição 2.1 implica que $2 - QM_2(k, a, b) = aR_k 10^2 + bR_2$. Analisando os possíveis valores de bR_2 e observando que $10^2 = 4 \cdot 25$, concluímos que $2 - QM_2(k, a, b)$ é da forma $4q + 2$ ou $4q + 3$, para algum inteiro q , uma vez que se $b = 1$ então $bR_2 = 11 = 4 \cdot 2 + 3$, enquanto que para $b = 5$ temos $bR_2 = 55 = 4 \cdot 13 + 3$, para $b = 6$ implica que $bR_2 = 66 = 4 \cdot 16 + 2$ e, por fim, se $b = 9$ logo $bR_2 = 99 = 4 \cdot 24 + 3$. Pelo Lema 4.2, segue que $2 - QM_2(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito.

Agora o caso $b = 4$, note que a Proposição 2.1 implica que $2 - QM_2(k, a, 4) = aR_k 10^2 + 4R_2 = 4(25aR_k + 11)$, como $\text{mdc}(4, 25aR_k + 11) = 1$, então $2 - QM_2(k, a, 4)$ não pode ser um quadrado perfeito, concluindo assim a prova. \square

Com argumentos análogos, mostra-se também que:

Teorema 4.10. Nenhum número $2 - QM_3(k, a, b)$ é um quadrado perfeito para todo $k \geq 2$.

Demonstração. Os casos $a = 2, 3, 7$ e 8 decorrem de forma imediata do Lema 4.1.

Para o caso $a = 1$, observemos que

$$\begin{aligned} 2 - QM_3(k, 1, b) &= \underbrace{11 \dots 11}_k \underbrace{bb}_{k-2} \underbrace{11 \dots 11}_k = \underbrace{11 \dots 11}_k \underbrace{bb}_{k-2} \underbrace{11 \dots 1100}_k + 11 \\ &= 10^2 \cdot \underbrace{11 \dots 11}_k \underbrace{bb}_{k-2} + 11 \end{aligned}$$

como 4 é um fator de 10^2 e $11 = 4 \cdot 2 + 3$, então $2 - QM_3(k, 1, b)$ é da forma $4q + 3$. Assim, pelo Lema 4.2, concluímos que este número não pode ser um quadrado perfeito.

Se $a = 4$, aplicando o item (c) da Proposição 2.2, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 - QM_3(k, 4, b) &= \underbrace{44 \dots 44}_k \underbrace{bb}_{k-2} \underbrace{44 \dots 44}_k = \frac{10^k(4 + 99b) - 4}{9} = \frac{10^3 \cdot 10^{k-3}(4 + 99b) - 4}{9} \\ &= 4 \cdot \frac{2 \cdot 5^3 \cdot 10^{k-3}(4 + 99b) - 1}{9}. \end{aligned}$$

Devemos, portanto, analisar o termo $X = \frac{2 \cdot 5^3 \cdot 10^{k-3}(4+99b) - 1}{9}$. Note que $10^{k-3}(4+99b) \equiv 4 \pmod{9}$. Disso resulta que $2 \cdot 5^3 \cdot 10^{k-3}(4 + 99b) \equiv 1 \pmod{9}$, o que implica $2 \cdot 5^3 \cdot 10^{k-3}(4 + 99b) - 1 \equiv 0 \pmod{9}$. Portanto, X é inteiro. Além disso, com uma argumentação análoga, pode-se demonstrar que X é ímpar. Assim, temos que $\text{mdc}(4, X) = 1$. Consequentemente, concluímos que $2 - QM_3(k, 4, b)$ não pode ser um quadrado perfeito.

Para o caso $a = 5$, temos:

$$\begin{aligned}
 2 - QM_3(k, 5, b) &= \underbrace{55 \dots 55}_k \text{ } bb \underbrace{55 \dots 55}_k \\
 &= \underbrace{55 \dots 55}_k \text{ } bb \underbrace{55 \dots 5500}_k + 55 \\
 &= 10^2 \cdot \underbrace{55 \dots 55}_k \text{ } bb \underbrace{55 \dots 55}_{k-2} + 55.
 \end{aligned}$$

Como 4 é fator de 10^2 e $55 = 4 \cdot 12 + 3$, segue que $2 - QM_3(k, 5, b)$ é da forma $4q + 3$. Assim, pelo Lema 4.2, concluímos que este número não pode ser um quadrado perfeito.

No caso em que $a = 6$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 2 - QM_3(k, 6, b) &= \underbrace{66 \dots 66}_k \text{ } bb \underbrace{66 \dots 66}_k \\
 &= \underbrace{66 \dots 66}_k \text{ } bb \underbrace{66 \dots 6600}_k + 66 \\
 &= 10^2 \cdot \underbrace{66 \dots 66}_k \text{ } bb \underbrace{66 \dots 66}_{k-2} + 66.
 \end{aligned}$$

Como 4 é fator de 10^2 e $66 = 4 \cdot 16 + 2$, temos que $2 - QM_3(k, 6, b)$ é da forma $4q + 2$. Novamente, pelo Lema 4.2, concluímos que este número não pode ser um quadrado perfeito.

Finalmente, para o caso $a = 9$, temos:

$$\begin{aligned}
 2 - QM_3(k, 9, b) &= \underbrace{99 \dots 99}_k \text{ } bb \underbrace{99 \dots 99}_k \\
 &= \underbrace{99 \dots 99}_k \text{ } bb \underbrace{99 \dots 9900}_k + 99 \\
 &= 10^2 \cdot \underbrace{99 \dots 99}_k \text{ } bb \underbrace{99 \dots 99}_{k-2} + 99.
 \end{aligned}$$

Observando que 4 é fator de 10^2 e $99 = 4 \cdot 24 + 3$, obtemos que $2 - QM_3(k, 9, b)$ é da forma $4q + 3$. Portanto, pelo Lema 4.2, concluímos que este número também não pode ser um quadrado perfeito. \square

Na verdade, de forma mais geral, temos que:

Proposição 4.11. Para $k \geq 2$, nenhum número $2 - QM_2(k, a, b)$ é uma potência par.

Demonstração. Suponha que para algum inteiro d e $k \geq 2$ tenhamos $2 - QM_2(k, a, b) = d^{2n}$ para algum conveniente inteiro $n > 0$. Este fato acarretaria que $2 - QM_2(k, a, b)$ é um quadrado perfeito, pois $2 - QM_2(k, a, b) = (d^k)^2$, contrariando o Teorema 4.9. \square

De forma similar à Proposição 4.11, segue que:

Proposição 4.12. Para $k \geq 2$, nenhum número $2 - QM_3(k, a, b)$ é uma potência par.

5 ALGUMAS FÓRMULAS PARA SOMAS PARCIAIS

Considere a sequência de números inteiros $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$ representada por $\{a_k\}_{k \geq 0}$. Iniciaremos examinando a sequência de somas parciais para $k + 1$ termos, dada por

$$\sum_{n=0}^k a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k,$$

para $k \geq 0$, em que $\{a_k\}_{k \geq 0}$ representa uma sequência de números inteiros.

O próximo resultado exhibe algumas somas parciais de termos dos números repunidades dados na Equação (1). Os demais resultados apresentados nesta seção decorrem deste resultado auxiliar, cuja demonstração pode ser consultada em Santos, Costa e Catarino (2025, Exemplo 3) ou nas referências lá indicadas.

Lema 5.1. (Santos; Costa; Catarino, 2025, p. 11) Seja $\{R_k\}_{k \geq 0}$ a sequência repunidade e k um inteiro não negativo, então

$$(a) \sum_{n=1}^k R_n = \frac{10R_k - k}{9},$$

$$(b) \sum_{n=1}^k R_{2n} = \frac{(10^{k+1} + 1)R_{k+1}}{99} - \frac{k + 1}{9},$$

$$(c) \sum_{n=1}^k R_{2n-1} = \frac{(10^{k+1} + 10)R_k}{99} - \frac{k}{9}.$$

Doravante, por uma questão de clareza, e para simplificar a escrita, denotamos:

$$\mathcal{A}_k = 2 - QM_1(k, a, b)$$

$$\mathcal{B}_k = 2 - QM_2(k, a, b)$$

$$\mathcal{C}_k = 2 - QM_3(k, a, b)$$

e consideremos as sequências de números 2-quasemonodígitos dadas por $\{\mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$, $\{\mathcal{B}_k\}_{k \geq 0}$ e $\{\mathcal{C}_k\}_{k \geq 0}$.

Inicialmente, apresentamos uma fórmula que expressa a soma dos k primeiros números 2-quasemonodígitos, considerando o caso específico do tipo 1.

Proposição 5.2. *Seja \mathcal{A}_k um número 2-quasemonodígito, e k um inteiro não negativo, então*

$$(a) \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_n = \frac{10^2(9b+a)R_k - (10a-9b)k}{9},$$

$$(b) \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_{2n} = \frac{(10^{k+2}+10)R_{k+1} - 110(k+1)}{99}a + \frac{10R_{2k} + 11k}{11}b,$$

$$(c) \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_{2n-1} = \frac{10^2(10^{k+1}R_k - 11k)}{99}a + \frac{10^2R_{2k} + 11k}{11}b,$$

sendo $\{R_k\}_{k \geq 1}$ a sequência repunidade.

Demonstração. (a) Aplicando o item (a) da Proposição 2.1, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_n &= \sum_{n=1}^k (b(10^{n+1} + 1) + 10aR_n) \\ &= b \sum_{n=1}^k (10^{n+1} + 1) + 10a \sum_{n=1}^k R_k. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a soma da PG na primeira soma parcial, e o item (a) do Lema 5.1 na segunda soma parcial, obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_n &= (10^2R_k + k)b + 10a \frac{10R_k - k}{9} \\ &= \frac{10^2(a+9b)R_k - (10a-9b)k}{9}, \end{aligned}$$

donde o resultado segue.

(b) De forma similar ao item anterior, fazemos uso do item (a) da Proposição 2.1, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_{2n} &= \sum_{n=1}^k (b(10^{2n+1} + 1) + 10aR_{2n}) \\ &= b \sum_{n=0}^k (10^{2n+1} + 1) + 10a \sum_{n=1}^k R_{2n}. \end{aligned}$$

Aplicando a soma da PG, e o item (b) do Lema 5.1, obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_{2n} &= \frac{10bR_{2k}}{11} + kb + \frac{a(10^{k+2}+10)R_{k+1}}{99} - \frac{10(k+1)}{9}a \\ &= \frac{10R_{2k} + 11k}{11}b + \frac{(10^{k+2}+10)R_{k+1} - 110(k+1)}{99}a, \end{aligned}$$

e obtemos o resultado.

(c) Novamente, mesmo procedimento adotado em (a) e (b),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k \mathcal{A}_{2n-1} &= \sum_{n=1}^k (b(10^{2n} + 1) + 10aR_{2n-1}) \\ &= b \sum_{n=1}^k (10^{2n} + 1) + 10a \sum_{n=1}^k R_{2n-1}.\end{aligned}$$

Aplicando a soma da PG, e o item (c) do Lema 5.1, obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k \mathcal{A}_{2n-1} &= \frac{10^2 R_{2k} + 11k}{11} b + 10a \left(\frac{(10^{k+1} + 10)R_k}{99} - \frac{k}{9} \right) \\ &= \frac{10^2 R_{2k} + 11k}{11} b + \frac{10^2(10^{k+1}R_k - 11k)}{99} a,\end{aligned}$$

e o resultado segue como desejávamos. □

Os resultados a seguir mostram as fórmulas de somas parciais associadas aos termos dos números 2-quasemonodígitos do tipo \mathcal{B}_k e \mathcal{C}_k . A prova destes resultados é obtida de modo semelhante ao utilizado na Proposição 5.2, e as provas de alguns dos seus itens são omitidas por razões de brevidade.

Proposição 5.3. *Seja \mathcal{B}_k um número 2-quasemonodígito, e k um inteiro não negativo, então*

$$\begin{aligned}(a) \quad \sum_{n=1}^k \mathcal{B}_n &= \frac{10^3 a R_k - (100a - 99b)k}{9}; \\ (b) \quad \sum_{n=1}^k \mathcal{B}_{2n} &= \frac{10^2 a (10^{k+1} + 1) R_{k+1} - 11(100a - 99b)k - 110a}{99}; \\ (c) \quad \sum_{n=1}^k \mathcal{B}_{2n-1} &= \frac{10^2 a (10^{k+1} + 10) R_k - 11(100a + 99b)k}{99};\end{aligned}$$

sendo $\{R_k\}_{k \geq 1}$ a sequência repunidade.

Demonstração. (a) Aplicando o item (b) da Proposição 2.1 em conjunto do item (a) da Proposição 5.1, temos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k \mathcal{B}_n &= \sum_{n=1}^k (10^2 a R_n + b R_2) \\ &= 10^2 a \sum_{n=1}^k R_n + 11b \sum_{n=1}^k 1.\end{aligned}$$

Aplicando a soma da PG, e o item (a) do Lema 5.1, obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k \mathcal{B}_n &= 10^2 a \frac{10R_k - k}{9} + 11bk \\ &= \frac{10^3 a R_k - (100a - 99b)k}{9},\end{aligned}$$

donde o resultado segue. □

Proposição 5.4. *Seja \mathcal{C}_k um número 2-quasemonodígito, e k um inteiro não negativo, então*

$$\begin{aligned}(a) \quad \sum_{n=1}^k \mathcal{C}_n &= \frac{(11b + a)(10R_k - k)}{9}; \\ (b) \quad \sum_{n=1}^k \mathcal{C}_{2n} &= \frac{a(10^{k+1} + 1)R_{k+1} + 99b \cdot R_{2n} - 11a(k+1)}{99}; \\ (c) \quad \sum_{n=1}^k \mathcal{C}_{2n-1} &= \frac{a(10^{k+1} + 10)R_k + 990b R_{2k-2} - 11ak}{99};\end{aligned}$$

sendo $\{R_k\}_{k \geq 1}$ a sequência repunidade.

Demonstração. (a) Aplicando o item (c) da Proposição 2.1, temos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k \mathcal{C}_n &= bR_2 10^k + aR_k \\ &= 11b \sum_{n=1}^k 10^k + a \sum_{n=1}^k R_k.\end{aligned}$$

Aplicando a soma da PG e o item (a) do Lema 5.1, obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k \mathcal{C}_n &= \frac{10R_k - k}{9} 11b + \frac{10R_k - k}{9} \\ &= \frac{(11b + a)(10R_k - k)}{9},\end{aligned}$$

donde obtemos o resultado. □

Para finalizar esta seção, considere a sequência de somas parciais alternadas definida por

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k,$$

para todo $k \geq 1$, em que a_k denota o k -ésimo termo de uma sequência de números inteiros $\{a_k\}_{n \geq 0}$.

Proposição 5.5. *Seja $\{\mathcal{A}_k\}_{k \geq 1}$ os números 2-quasemonodígitos, e k seja um inteiro positivo. Portanto, o seguinte se aplica:*

$$(a) \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{A}_k = \frac{10^{k+2} + 10R_{k+1} - 990k - 110}{99}a - \frac{90R_{2k}}{11}b, \text{ se } k \text{ é par.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{A}_k = -\frac{(10^{k-1} \cdot 9999 + 10)R_k}{99}a - \frac{10^{2k-1} \cdot 111 - 1}{11}b, \text{ se } k \text{ é ímpar.}$$

Demonstração.

(a) Primeiro, suponha que k seja um número natural par ou, equivalentemente, que o último termo seja positivo; assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{A}_k &= -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 + \dots + \mathcal{A}_{2k-2} - \mathcal{A}_{2k-1} + \mathcal{A}_{2k} \\ &= (\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 + \dots + \mathcal{A}_{2k}) - (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 + \dots + \mathcal{A}_{2k-1}) \\ &= \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_{2n} - \sum_{n=2}^k \mathcal{A}_{2n-1}. \end{aligned}$$

De acordo com os itens (b) e (c) na Proposição 5.2, segue que

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{A}_k = -\frac{9 \cdot 10^2 (10^{2k-1} - 22)b}{11} - \frac{(10^{2k} + 109)a}{99}.$$

(b) A demonstração segue uma abordagem similar à utilizada no item (a), vejamos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{A}_k &= -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 + \dots + \mathcal{A}_{2k-2} - \mathcal{A}_{2k-1} + \mathcal{A}_{2k} \\ &= \frac{9 \cdot 10^2 R_{2k} b}{11} + \frac{(10^{2k+2} - 109)a}{99}, \end{aligned}$$

como desejado. □

Os dois próximos resultados a seguir mostram as fórmulas de somas parciais alternadas para os termos dos números 2-quasemonodígitos do tipo \mathcal{B}_k e \mathcal{C}_k . Novamente, a prova de alguns itens destes resultados é obtida de modo semelhante ao utilizado na Proposição 5.5, e as suas provas são omitidas por razões de brevidade.

Proposição 5.6. *Seja $\{\mathcal{B}_k\}_{k \geq 1}$ os números 2-quasemonodígitos, e k seja um inteiro positivo. Portanto, o seguinte se aplica:*

$$(a) \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{B}_n = \frac{(10^{k+2} - 10)R_{k+1}}{11} a, \text{ se } k \text{ é par.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{B}_n = -\frac{10^{k+2}R_k - 110a + 121b}{11}, \text{ se } k \text{ é ímpar.}$$

Demonstração.

(a) Primeiro, suponha que k seja um número natural par ou, equivalentemente, que o último termo seja positivo; assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{B}_n &= -\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_3 + \dots + \mathcal{B}_{2k-2} - \mathcal{B}_{2k-1} + \mathcal{B}_{2k} \\ &= (\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_4 + \dots + \mathcal{B}_{2k}) - (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_3 + \dots + \mathcal{B}_{2k-1}) \\ &= \sum_{n=1}^k \mathcal{B}_{2n} - \sum_{n=2}^k \mathcal{B}_{2n-1}. \end{aligned}$$

De acordo com os itens (b) e (c) na Proposição 5.3, segue que

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{B}_n = \frac{(10^{k+2} - 10)R_{k+1}}{11} a,$$

como requerido. □

Proposição 5.7. *Seja $\{\mathcal{C}_k\}_{k \geq 1}$ os números 2-quasemonodígitos, e k seja um inteiro positivo. Portanto, o seguinte se aplica:*

$$(a) \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{C}_k = -\frac{(10^{2k+1} + 1)a + 99 \cdot 10^{2k-1}b - 11a}{99}, \text{ se } k \text{ é par.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{C}_k = -\frac{(10^k + 1)R_k a + 99R_{2k-2}b}{11}, \text{ se } k \text{ é ímpar.}$$

Demonstração.

(a) Primeiro, suponha que k seja um número natural par ou, equivalentemente, que o último

termo seja positivo; assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{C}_n &= -\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_3 + \dots + \mathcal{C}_{2k-2} - \mathcal{C}_{2k-1} \\ &= (\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_4 + \dots + \mathcal{C}_{2k}) - (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_3 + \dots + \mathcal{C}_{2k-1}) \\ &= \sum_{n=1}^k \mathcal{C}_{2n} - \sum_{n=2}^k \mathcal{C}_{2n-1}. \end{aligned}$$

De acordo com os itens (b) e (c) na Proposição 5.4, segue que

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n \mathcal{C}_n = -\frac{(10^k + 1)R_k a + 99R_{2k-2}b}{11},$$

como requerido. □

6 CÓDIGO OCTAVE PARA GERAÇÃO DAS TABELAS DE PRIMOS 2-QM

O código a seguir, escrito em *Octave*, gera as tabelas 1, 2 e 3 com números primos das classes $2-QM1$, $2-QM2$ e $2-QM3$. O teste de primalidade utilizado foi o Miller-Rabin determinístico (bases: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17), que é adequado para números com até 15 algarismos ($k \leq 15$).

```
clear all, clc;

clear all; clc;

function qm_demo(Kmax, odd_only, allow_a_zero)
% qm_demo.m - Gera as tabelas de primos 2-QM1, 2-QM2 e 2-QM3
% Uso tipico: qm_demo(15, true, false)
if nargin<1, Kmax=15; end
if nargin<2, odd_only=true; end
if nargin<3, allow_a_zero=false; end

% Tabelas como celulas: indexacao por chave+1 quando chave começa em 0
qm1 = cell(1,10); % b=1..9 -> usa posicao b+1
qm2 = cell(1,10); % b=0..9 -> usa posicao b+1
qm3 = cell(1,10); % a=0..9 -> usa posicao a+1

% ---- QM1: chave = b in 1..9, guarda pares (k,a)
for b=1:9
    L=[];
    for k=1:Kmax
        if odd_only && mod(k,2)==0, continue; end
```

```

    for a=0:9
        if ~allow_a_zero && a==0, continue; end
        if a==b, continue; end
        n = QM1_num(k,a,b);
        if isprime64(n), L=[L; k a]; end
    end
end
if ~isempty(L), L=sortrows(L,[1 2]); end
qm1{b+1}=L;
end

% ---- QM2: chave = b in 0..9, guarda pares (k,a) (lider 'a' != 0)
for b=0:9
    L=[];
    for k=1:Kmax
        if odd_only && mod(k,2)==0, continue; end
        for a=1:9
            if a==b, continue; end
            n = QM2_num(k,a,b);
            if isprime64(n), L=[L; k a]; end
        end
    end
    if ~isempty(L), L=sortrows(L,[1 2]); end
    qm2{b+1}=L;
end

% ---- QM3: chave = a in 0..9, guarda pares (k,b)
for a=0:9
    if a==0 && ~allow_a_zero, qm3{a+1}=[]; continue; end
    L=[];
    for k=1:Kmax
        if odd_only && mod(k,2)==0, continue; end
        for b=1:9
            if a==b, continue; end
            n = QM3_num(k,a,b);
            if isprime64(n), L=[L; k b]; end
        end
    end
    if ~isempty(L), L=sortrows(L,[1 2]); end
    qm3{a+1}=L;
end

% ---- Impressao
print_table('Tabela QM1 - Numeros primos 2-QM1(k,a,b)', 'b', '(k,a):', qm1
,1:9);

```

```

print_table('Tabela QM2 - Numeros primos 2-QM2(k,a,b)', 'b', '(k,a):', qm2
,0:9);
print_table('Tabela QM3 - Numeros primos 2-QM3(k,b,a)', 'a', '(k,b):', qm3
,0:9);
end

% ===== GERADORES =====
function n = QM1_num(k,a,b) % b a...a b
n = uint64(b);
for i=1:k, n = n*uint64(10)+uint64(a); end
n = n*uint64(10)+uint64(b);
end

function n = QM2_num(k,a,b) % a...a b b
n = uint64(0);
for i=1:k, n = n*uint64(10)+uint64(a); end
n = n*uint64(10)+uint64(b);
n = n*uint64(10)+uint64(b);
end

function n = QM3_num(k,a,b) % b b a...a
n = uint64(b); n = n*uint64(10)+uint64(b);
for i=1:k, n = n*uint64(10)+uint64(a); end
end

% ===== MILLER-RABIN (64-bit) =====
function tf = isprime64(n)
n = uint64(n);
if n < 2, tf=false; return; end
sp = uint64([2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37]);
for p=sp
if n==p, tf=true; return; end
if mod(n,p)==0, tf=false; return; end
end
d = n-1; s=0;
while bitand(d,uint64(1))==0, d=bitshift(d,-1); s=s+1; end
bases = uint64([2 3 5 7 11 13 17]);
for a=bases
if mod(a,n)==0, continue; end
x = powmod_u64(a,d,n);
if x==1 || x==n-1, continue; end
comp = true;
for r=1:(s-1)
x = mulmod_u64(x,x,n);
if x==n-1, comp=false; break; end

```

```

    end
    if comp, tf=false; return; end
end
tf=true;
end

% ---- exponenciacao modular segura (evita overflow) ----
function r = powmod_u64(a,e,m)
    a = mod(uint64(a),uint64(m));
    e = uint64(e); m = uint64(m);
    r = uint64(1);
    while e > 0
        if bitand(e,uint64(1)), r = mulmod_u64(r,a,m); end
        a = mulmod_u64(a,a,m);
        e = bitshift(e,-1);
    end
end

% ---- multiplicacao modular segura (por repeticao) ----
function r = mulmod_u64(x,y,m)
    x = uint64(x); y = uint64(y); m = uint64(m);
    r = uint64(0);
    while y > 0
        if bitand(y,uint64(1)), r = mod(r + x, m); end
        x = mod(x + x, m);
        y = bitshift(y,-1);
    end
end

% ===== IMPRESSAO =====
function print_table(title_str,key_name,pair_name,celltab,keys)
    printf('\n%s\n', title_str);
    for key = keys
        L = celltab{key+1};
        if isempty(L), continue; end
        printf('%s %d %s ', key_name, key, pair_name);
        for i=1:size(L,1)
            printf('(%d,%d)', L(i,1), L(i,2));
            if i < size(L,1), printf(', '); end
        end
        printf('\n');
    end
end

% ===== FUNCAO PRINCIPAL =====
qm_demo(15, true, false);

```

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foram apresentados números primos da forma $2 - QM_1(k, a, b)$, $2 - QM_2(k, a, b)$ e $2 - QM_3(k, a, b)$, isto é, estendemos o Teorema 1 acerca de primalidade na classe $2 - QM_1(k, a, b)$ para as classes $2 - QM_2(k, a, b)$ e $2 - QM_3(k, a, b)$; assim, na Seção 3 investigamos as condições que levam à não primalidade dos números $2 - QM(k, a, b)$ e, como consequência, mostramos algumas tabelas, produzidas com auxílio do *Octave*, com casos específicos de números primos 2-quasemonodígitos em seus três tipos. Enquanto que, na Seção 2 são apresentadas algumas fórmulas geradoras para tais conjuntos de números. E mais, apresentamos algumas propriedades relativas aos quadrados perfeitos do tipo $2 - QM(k, a, b)$ que culminaram na demonstração do Teorema 4.7, apresentado em Carvalho e Costa (2022a). Ademais, exibimos algumas fórmulas de soma para termos na sequência de somas parciais.

Acreditamos que uma investigação acerca de classes de números também favorece a construção de intuições sobre o comportamento de sequências e séries, possibilidade de propor soluções elegantes para problemas mais avançados, além de fornecer subsídios para aplicações em diversas áreas, como teoria dos números, combinatória, criptografia e análise de algoritmos. Dessa forma, o estudo voltado para classes de números com padrões específicos contribui não apenas para o avanço do conhecimento teórico, mas também para o desenvolvimento de ferramentas que podem ser aplicadas em contextos práticos e computacionais.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. **Mathematical Olympiad Challenges**. [S. l.]: Birkhauser, 2008.

BEILER, Albert H. **Recreations in the theory of numbers: The queen of mathematics entertains**. Chapter 11: 111 ... 111. 1. ed. New York: Courier Corporation, 1964.

CARVALHO, Fernando Soares de; COSTA, Eudes Antonio. Alguns números 2-quasemonodígitos primos. **Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v. 10, n. 2, p. 195–202, 2022. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1013>.

CARVALHO, Fernando Soares de; COSTA, Eudes Antonio. Números quasemonodígitos primos ou quadrados perfeitos. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 1, 2022. Disponível em: <https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/article/view/272>. Acesso em: 20 abr. 2025.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio dos. Algumas propriedades sobre os números monodígitos e repunidades. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, p. 47–58, 2022.

Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5521>. Acesso em: 20 abr. 2025.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio dos. Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. **Professor de Matemática Online**, v. 8, n. 4, p. 495–503, 2020. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo836>.

GUPTA, Shyam Sunder. **Exploring the Beauty of Fascinating Numbers**. 1. ed. Jaipur, Rajasthan, India: Springer Nature, 2025. Chapter 11: Repunit Numbers.

MARTINEZ, Fábio Brochero; MOREIRA, Carlos Gustavo; SALDANHA, Nicolau; TENGAN, Eduardo. **Teoria dos Números**: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2010.

NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Herbert S.; MONTGOMERY, Hugh L. **An introduction to the theory of numbers**. 5. ed. [S. l.]: John Wiley & Sons, 1991.

RIBENBOIM, Paulo. **Números primos**: mistérios e recordes. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2001.

SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio; CATARINO, Paula M. M. C. On Gersenne Sequence: A Study of One Family in the Horadam-Type Sequence. **Axioms**, v. 14, n. 3, p. 1–13, 2025. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms14030203>.


WILLIAMS, H. C. Some primes with interesting digit patterns. **Mathematics of Computation**, v. 32, n. 144, p. 1306–1310, 1978. DOI: <https://doi.org/10.2307/2006356>.


YATES, Samuel. **Repunits and Repetends**. Boynton Beach, Florida: Star Publishing Co., Inc., 1992.

ZEITZ, Paul. **Art Craft Problem Solving**. New York: John Wiley, 1999.

SOBRE OS AUTORES

Dr. Eudes Antonio da Costa


 <https://orcid.org/0000-0001-6684-9961>


 <http://lattes.cnpq.br/8731273940556992>

Contato: eudes@uft.edu.br

Contribuição autoral: administração do projeto; análise formal; conceituação; curadoria de dados; escrita – primeira redação.

Me. Douglas Catulio dos Santos


 <https://orcid.org/0000-0002-5221-6087>


 <http://lattes.cnpq.br/7655950014904500>

Contato: catuliodouglas4@gmail.com

Contribuição autoral: análise formal; conceituação; curadoria de dados; escrita – primeira redação; escrita – revisão e edição.

Dr. Fernando Soares de Carvalho

 <https://orcid.org/0000-0001-6639-0716>

 <http://lattes.cnpq.br/8561806800139382>

Contato: fscarvalho@uft.edu.br

Contribuição autoral: análise formal; curadoria de dados; escrita – primeira redação; software.

Revisora de texto: Shirley Correia Alves Brasileiro