

PRICE OU SAC, QUAL É MELHOR?

PRICE SYSTEM OR CONSTANT AMORTIZATION SYSTEM, WHICH IS BETTER?

SISTEMA PRICE O SISTEMA DE AMORTIZACIÓN CONSTANTE ¿CUÁL ES MEJOR?

Tiago Soares dos Reis^[1]

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Nilópolis, RJ, Brasil.

Data de submissão: 28 fev. 2025. **Data de aprovação:** 19 maio 2025. **Financiamento:** o autor declara não haver financiamento. **Como citar:** REIS, Tiago Soares dos. Price ou SAC, qual é melhor? **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 11, p. e306, 8 set. 2025. <https://doi.org/10.35819/remat2025v11id7647>.



Este artigo está licenciado sob uma licença *Creative Commons Attribution 4.0 International License*.

Resumo: No Brasil, as instituições financeiras costumam oferecer duas modalidades de financiamento imobiliário a seus clientes: o Price e o SAC. Este texto se propõe a analisar qual das duas opções é matematicamente mais vantajosa para a credora e qual é mais vantajosa para a devedora. Nesse sentido, este trabalho demonstra que Price e SAC são igualmente vantajosos para a credora. Já, em relação à devedora, o trabalho demonstra que, se sua taxa interna de retorno for menor que a taxa de financiamento, o SAC é mais vantajoso e, no caso oposto, se sua taxa interna de retorno for maior que a taxa de financiamento, o Price é mais vantajoso. Embora também faça uso de exemplos e simulações com valores específicos, o presente trabalho demonstra esses resultados de forma geral. Isto é, demonstra a vantagem, desvantagem ou igualdade entre Price e SAC, estando ambos em iguais condições, quaisquer que sejam os valores envolvidos.

Palavras-chave: financiamento imobiliário; sistemas de amortização; Price; SAC; matemática financeira.

Abstract: In Brazil, the financial institutions usually offer two kinds of mortgage loan to their customers: Price System and Constant Amortization System (CAS). This paper aims to check which of the two options is mathematically more advantageous for the lender and which is more advantageous for the borrower. In this sense, this paper proves that Price and CAS are equally advantageous for the lender. Related to the borrower, the paper proves that if his internal rate of return is less than the financing rate then CAS is more advantageous. Otherwise, if his internal rate of return is greater than the financing rate then Price is more advantageous. Although the paper also uses examples and simulations with specific values, it proves those results in a general way. That is, it proves the advantage, disadvantage or equality between Price and CAS for any underlying values, both being in equal conditions.

Keywords: mortgage loan; amortization schedule; Price system; constant amortization system; mathematical finance.

Resumen: En Brasil, las instituciones financieras usualmente ofrecen dos tipos de financiación inmobiliaria a sus clientes: Sistema Price y Sistema de Amortización Constante (SAC). Este texto pretende analizar cuál de las dos opciones es matemáticamente más ventajosa para el acreedor y cuál es más ventajosa para el deudor. En este sentido, este trabajo demuestra que Price y SAC son igualmente ventajosos para el acreedor. En relación al deudor, el trabajo demuestra que si su tasa interna de retorno es menor que la tasa de financiamiento, entonces SAC es más ventajoso y, en el caso contrario, si su tasa interna de retorno es mayor que la tasa de financiamiento, entonces Price es más ventajoso. Aunque también utiliza ejemplos y simulaciones con valores específicos, este trabajo demuestra estos resultados de forma

general. Es decir, demuestra la ventaja, desventaja o igualdad entre Price y SAC, cualesquiera que sean los valores involucrados, estando ambos en igualdad de condiciones.

Palabras clave: financiamiento inmobiliario; sistemas de amortización; sistema Price; sistema de amortización constante; matemáticas financieras.

1 INTRODUÇÃO

O financiamento imobiliário é uma estratégia muito comum, utilizada por pessoas físicas, para a compra de um imóvel. O financiamento é uma forma de se obter o bem e pagar o seu valor dividido em parcelas a prazo. Para tanto, junto às parcelas, são cobrados juros por parte da financiadora.

Duas modalidades são oferecidas para financiamento imobiliário no Brasil, a modalidade Price e a SAC. O nome Price é uma referência ao economista Richard Price e o nome SAC é a sigla de Sistema de Amortização Constante. O Price é um sistema em que as prestações são constantes e o SAC é um sistema em que as prestações são decrescentes. Durante um período, as prestações do SAC são maiores do que a prestação do Price, no entanto, a partir de um dado momento, as prestações do SAC ficam menores do que a prestação do Price. Surge, então, naturalmente, a questão: Qual é melhor, Price ou SAC?

Outros trabalhos já abordaram a comparação entre Price e SAC. Por exemplo, Rezende (2003) fala que o Price segue o mesmo princípio do SAC, que é o de os juros serem calculados sempre em função do saldo devedor. Embora não seja o tema central do texto, ele indica que Price e SAC são equivalentes, quando se tem a taxa de financiamento como referência. Eloy e Paiva (2011) tratam de temas comuns a Rezende e, ainda, salientam que, para determinada camada da população, apenas o Price é acessível. Esses textos têm o objetivo principal de discutir Price e SAC conceitualmente e abordar polêmicas jurídicas sobre os dois sistemas. Já Ferreira (2014) e Santos (2020), por exemplo, comparam Price e SAC, mas o fazem por meio de simulações, de exemplos específicos. O presente texto, por sua vez, tem a finalidade de trazer uma abordagem a mais a essa discussão. Aqui, fazemos uma comparação estritamente matemática entre Price e SAC. Isto é, não discutimos questões conceituais, questões jurídicas, questões de acesso ao financiamento, nem de preferência de acordo com o estilo de vida da devedora. Também, não nos restringimos a simulações, mas comparamos o caso geral. O objetivo do presente trabalho é fornecer uma demonstração matemática à resposta da pergunta: Qual o mais vantajoso, Price ou SAC?

A contribuição do presente trabalho, propriamente dita, encontra-se na Seção 3. A Seção 2 contém conceitos e resultados de matemática financeira já conhecidos, aqueles que são necessários para o entendimento da Seção 3.

2 PRELIMINARES

Nesta seção, apresentamos os conceitos de taxa interna de retorno, valor presente, sistema de amortização, Price e SAC. Para tal, nos baseamos em Morgado, Wagner e Zani (2001).

2.1 TAXA INTERNA DE RETORNO

Um investimento em uma aplicação financeira é a operação em que uma pessoa ou instituição deposita uma quantia em dinheiro esperando recebê-la de volta num momento futuro acrescida de uma nova quantia. A quantia depositada é chamada de **capital inicial** e a quantia acrescida é chamada de **juro**. O **montante** da aplicação em um determinado instante é a soma entre o capital inicial e os juros que foram acrescidos a cada unidade de tempo até aquele instante. O juro em um determinado instante é uma fração do montante na aplicação no instante imediatamente anterior. A razão com a qual o montante cresce a cada unidade de tempo é chamada de **taxa de juro** do investimento. Assim, o juro em um determinado instante é o produto da taxa de juro pelo montante no instante imediatamente anterior. O montante no instante zero é o capital inicial. Denotando a taxa de juro por i , o montante no instante zero por M_0 e, para cada número natural k , o montante no instante k por M_k e o juro no instante k por J_k , temos que

$$J_k = iM_{k-1} \quad \text{e} \quad M_k = M_{k-1} + J_k.$$

Assim,

$$M_k = M_{k-1} + J_k = M_{k-1} + iM_{k-1} = M_{k-1}(1 + i).$$

Denotando o capital inicial por C , temos que o montante no instante 1 é

$$M_1 = M_0(1 + i) = C(1 + i) = C(1 + i)^1,$$

o montante no instante 2 é

$$M_2 = M_1(1 + i) = C(1 + i)^1(1 + i) = C(1 + i)^2,$$

o montante no instante 3 é

$$M_3 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3.$$

De forma geral, para todo natural n , o montante no instante n é

$$M_n = C(1 + i)^n.$$

Inflação é o aumento do preço dos bens e serviços ao longo do tempo. Por exemplo, se

um produto custava R\$ 100,00 e, após um determinado período, passou a custar R\$ 108,00, então este produto sofreu uma inflação de 8% no período. Um índice de inflação é uma taxa medida a cada unidade de tempo, é a variação do custo de um conjunto de produtos e serviços. Por exemplo, a inflação em um determinado ano ter sido 5% significa que, ao longo daquele ano, o custo de vida aumentou em 5%. Em outras palavras, os preços dos produtos e serviços aumentaram, em média, em 5%, ponderados por seus respectivos pesos.

Taxa interna de retorno de uma pessoa ou instituição é a taxa de juro com a qual o poder de seu dinheiro tem variação real. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 1. *Suponhamos que uma pessoa possua R\$ 100,00 e que um dado produto custe R\$ 5,00. Suponhamos, ainda, que, durante um determinado período, o dinheiro da pessoa tenha rendido a uma taxa de 10,25% e que, nesse mesmo período, o produto passou a custar R\$ 5,25. Vamos determinar o quanto variou o poder de compra dessa pessoa durante o período. No início, com R\$ 100,00 e o produto a R\$ 5,00, a pessoa compraria $\frac{100}{5} = 20$ produtos. Após o referido período, o dinheiro da pessoa passou a ser $M = 100(1 + 0,1025)^1 = 100 \times 1,1025 = 110,25$, isto é, R\$ 110,25. Assim, após o referido período, a pessoa compraria $\frac{110,25}{5,25} = 21$ produtos. Dessa forma, a pessoa poderia comprar 1 produto a mais do que no início. Como 1 é 5% de 20, temos que o aumento real do poder de compra da pessoa é de 5%.*

Com o Exemplo 1, notamos que o que importa não é a taxa de rendimento, mas a taxa real de variação do poder de compra. A taxa real é a taxa de rendimento descontada a taxa de inflação. Chamamos de **taxa interna de retorno** de uma pessoa ou instituição a taxa efetiva, real, do seu investimento. A taxa interna de retorno é o parâmetro utilizado para se tomar a decisão sobre se um negócio é vantajoso ou não.

2.2 VALOR PRESENTE

O valor do dinheiro no tempo é um conceito crucial na matemática financeira. Ele consiste no fato de que o valor do dinheiro não é intrínseco à quantia, mas ao poder que ela tem. Nos referimos ao poder de comprar um bem ou serviço. Ora, uma quantia de R\$ 100,00 vale mais em um instante em que um bem custa R\$ 20,00 do que em um instante em que o mesmo bem custa R\$ 25,00. O que importa para a matemática financeira não é a quantia em si, mas o seu poder de compra, o seu valor no tempo.

O que é melhor, ganhar R\$ 100,00 hoje ou ganhar R\$ 110,00 daqui a um ano? Depende! Se o bem que hoje custa R\$ 100,00 passa a custar R\$ 115,00 daqui a um ano, então é melhor ganhar os R\$ 100,00 hoje, pois, dessa forma, você consegue comprar o bem sem precisar acrescentar dinheiro. Entretanto, se o bem que hoje custa R\$ 100,00 passa a custar R\$ 105,00 daqui a um ano, por exemplo, então o melhor é ganhar os R\$ 110,00 daqui a um ano, pois, dessa forma, hoje não sobraria dinheiro e daqui a um ano sobraria. Esse é o efeito da inflação.

Mas não é só a inflação que importa. O que é melhor, ganhar R\$ 100,00 hoje ou ganhar R\$ 110,00 daqui a um ano? Depende do quanto varia seu dinheiro ao longo do tempo. Se seu dinheiro rende, por exemplo, a 12% ao ano, então, ganhando R\$ 100,00 hoje, você teria R\$ 112,00 daqui a um ano. Mais do que a segunda opção, que é ganhar os R\$ 110,00 daqui a um ano. Entretanto se, em um outro exemplo, seu dinheiro rende a 5% ao ano, então R\$ 100,00 hoje significaria R\$ 105,00 daqui a um ano, o que é menos do que a segunda opção, os R\$ 110,00 daqui a um ano.

O valor do dinheiro no tempo depende da inflação e do quanto seu dinheiro rende. Por isso, falamos de taxa real de variação do valor do dinheiro, a taxa interna de retorno. A comparação de duas quantias em momentos distintos depende sempre da taxa interna de retorno. Por exemplo, com uma taxa interna de retorno de 10% ao ano, a quantia de R\$ 100,00 hoje é equivalente à quantia de R\$ 110,00 daqui a um ano. Com a taxa interna de retorno de 10% ao ano, R\$ 100,00 hoje é mais valioso do que R\$ 105,00 daqui a um ano, por exemplo. O que se faz, na matemática financeira, é comparar os valores presentes de cada quantia.

O valor presente de uma quantia é o valor, no instante zero, que geraria essa quantia no instante em questão, segundo a taxa interna de retorno. Portanto, dada uma quantia Q no instante t , denotando por P seu valor presente, segue que P é o capital que, rendendo a taxa interna de retorno durante o período t , geraria a quantia Q . Ou seja, denotando a taxa interna de retorno por i , o valor presente P é aquele que satisfaz $Q = P(1 + i)^t$. Por exemplo, qual o valor presente de uma quantia de R\$ 105,00 no ano 1, segundo a taxa de 10% ao ano? Bem, o valor presente P é aquele que satisfaz $105 = P(1 + 0,1)^1$. Assim, $105 = P \times 1,1$, donde $P = \frac{105}{1,1}$, isto é, $P = 95,45$.

Definição 1. Dada uma quantia Q no instante t , o **valor presente** de Q , segundo uma taxa positiva i , é definido por

$$\frac{Q}{(1 + i)^t}.$$

Por exemplo, dizer que, segundo a taxa de 10% ao ano, a quantia de R\$ 100,00 hoje é mais valiosa do que a quantia de R\$ 105,00 daqui a um ano, significa dizer que $\frac{100}{(1+0,1)^0}$ é maior que $\frac{105}{(1+0,1)^1}$.

Para comparar, entre duas opções, qual é a mais vantajosa, financeiramente falando, deve-se comparar os valores presentes das opções.

2.3 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Um sistema de amortização é uma maneira de se pagar uma dívida, como, por exemplo, o empréstimo de uma quantia em dinheiro, ou o pagamento por um bem ou um serviço. A pessoa ou instituição que empresta o dinheiro ou vende o bem ou serviço para ser pago a prazo, isto é, quem recebe o pagamento da dívida, é chamada de **credora**. A pessoa ou instituição que contrai

a dívida, isto é, quem faz o pagamento da dívida, é chamada de **devedora**. Além da dívida em si, a devedora paga, à credora, uma quantia referente ao serviço de poder pagar a dívida a prazo. Ou seja, a credora aceita ficar sem o dinheiro por um tempo e recebê-lo apenas à frente, pois receberá, além da quantia financiada, um valor a mais como pagamento pelo serviço. A devedora aceita pagar mais do que o valor financiado, pois poderá não o pagar imediatamente, apenas mais à frente. A parte do pagamento que se refere, de fato, à quitação da dívida é chamada de **amortização** e a parte do pagamento que se refere ao serviço é chamada de **juro**.

Uma forma comum em sistemas de amortização é aquela em que o pagamento da dívida é feito em partes. Cada uma dessas partes é chamada de **prestação**. Cada prestação é formada por duas parcelas: a amortização e o juro. Existem alguns casos em que, além de amortização e juro, são cobradas, também, uma quantia referente a seguro e uma quantia referente à administração. Aqui, tratamos somente dos sistemas nos quais a prestação é feita apenas das duas partes: amortização e juro. Dessa forma, denotando a prestação por P , a amortização por A e o juro por J , temos que

$$P = A + J.$$

A soma de todas as amortizações precisa ser exatamente o valor da dívida contraída. Este é o princípio. As amortizações quitam a dívida. Nesse sentido, no caso em que a dívida é paga em n prestações, denotando a dívida por D e, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, a amortização do instante k por A_k , temos que

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n = D.$$

O **saldo devedor** em um determinado instante é a quantia que a devedora ainda não quitou da dívida naquele instante. Isto é, o saldo devedor em um determinado instante é a dívida inicial menos as amortizações que foram feitas até aquele instante. Em financiamentos imobiliários, é comum que o saldo devedor seja reajustado anualmente pela Taxa Referencial (TR). No entanto, no presente trabalho, não consideramos a TR, não é feito qualquer reajuste no saldo devedor. Sendo assim, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, denotando o saldo devedor do instante k por D_k , temos que

$$D_k = D - A_1 - A_2 - \dots - A_{k-1} - A_k.$$

O saldo devedor em um determinado instante pode ser encarado, também, como o saldo devedor do instante imediatamente anterior menos a amortização daquele instante. Dessa forma, considerando a dívida contraída como o saldo devedor do instante zero e denotando-o por D_0 , temos que

$$D_k = D_{k-1} - A_k$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. O juro em um determinado instante é uma fração do quanto se deve naquele momento. Escolhe-se um número entre 0 e 1 para ser a razão do saldo devedor que corresponderá ao juro. Esse número é chamado de **taxa de juro**. Assim, o juro em um

determinado instante é o produto da taxa de juro pelo saldo devedor do instante imediatamente anterior. Sendo assim, denotando a taxa de juro por i e, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, o juro do instante k por J_k , temos que

$$J_k = iD_{k-1}.$$

Em resumo, tratamos, no presente texto, dos sistemas de amortização que satisfazem:

- A.1 O saldo devedor do instante zero é a dívida contraída ($D_0 = D$) e o saldo devedor do último instante é zero ($D_n = 0$).
- A.2 O saldo devedor de cada instante, a partir do instante 1, é o saldo devedor do instante imediatamente anterior menos a amortização do referido instante ($D_k = D_{k-1} - A_k$).
- A.3 A prestação em cada instante é a soma da amortização do referido instante com o juro do referido instante ($P_k = A_k + J_k$).
- A.4 O juro de cada instante é o produto da taxa de juro do financiamento pelo saldo devedor do instante imediatamente anterior ($J_k = iD_{k-1}$).
- A.5 As prestações são consecutivas, isto é, da primeira até a última, a cada unidade de tempo, é paga uma prestação.
- A.6 A primeira prestação é paga exatamente uma unidade de tempo após a dívida ser contraída.

Para cada sistema de amortização, podemos determinar uma tabela em que as colunas expressam, respectivamente, os valores do saldo devedor, da amortização, do juro e da prestação ao longo dos instantes – cada instante expresso em uma linha. Pela Propriedade A.1, o saldo devedor no instante zero é a dívida contraída e o saldo devedor no instante n é zero. Pela Propriedade A.6, a prestação e, conseqüentemente, a amortização e o juro no instante zero são todos iguais a zero.

Tabela 1 – Sistema de amortização

Tempo	Saldo Devedor	Amortização	Juro	Prestação
0	D	0	0	0
1				
2				
⋮				
$n - 1$				
n	0			

Fonte: elaboração do autor.

Definir, então, um sistema de amortização é definir uma forma de preencher as células vazias da Tabela 1. Como o juro é função dos saldos devedores, o saldo devedor é função das amortizações e a prestação é função da amortização e juro, em última análise, juro, saldo devedor e prestação são todos funções das amortizações. Por isso, basta que sejam definidas as amortizações. Tendo-as definidas, os valores de todas as outras colunas são calculados em função delas.

2.4 PRICE E SAC

No Brasil, os dois sistemas de amortização largamente utilizados em financiamentos imobiliários são o Price e o SAC. O Price é, por concepção, um sistema cujas prestações são constantes, isto é, as prestações são todas iguais, e o SAC é, por concepção, um sistema cujas amortizações são constantes, isto é, as amortizações são todas iguais.

2.4.1 PRICE

A idealização do Price é que ele seja um sistema em que as prestações sejam todas iguais. As amortizações no Price são definidas respondendo-se à seguinte pergunta: **Qual deve ser o valor das prestações iguais, de modo que a soma dos valores presentes delas seja igual à dívida contraída?** Ou seja, as amortizações são definidas de forma indireta. Definimos, na verdade, o valor das prestações e, a partir delas, calculamos as amortizações. No Price:

P.1 As prestações são iguais entre si e a soma dos valores presentes delas é igual à dívida contraída.

Definição 2. *Price é o sistema de amortização definido pelas propriedades de A.1 a A.6 e P.1.*

Denotando a dívida por D , a quantidade de parcelas por n , a taxa de juro por i e a prestação por P , temos que, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, o valor presente da k -ésima prestação é $\frac{P}{(1+i)^k}$. Assim, no Price, o valor das prestações, que são todas iguais, é a solução da equação

$$\frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \dots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n} = D$$

na incógnita P .

Exemplo 2. *Digamos que uma dívida de R\$ 10.000,00 será paga em 4 prestações mensais a uma taxa de juro de 3% ao mês pelo Price. Vamos determinar a tabela desse sistema de amortização. Denotemos o valor das parcelas por P . Por definição, P é a solução da equação*

$$\frac{P}{(1+0,03)^1} + \frac{P}{(1+0,03)^2} + \frac{P}{(1+0,03)^3} + \frac{P}{(1+0,03)^4} = 10.000.$$

Resolvendo a equação, temos $P = 2.690$. Assim, já temos a coluna das prestações. Com o saldo devedor no instante zero ($D_0 = 10.000$), calculamos o juro no instante 1: $J_1 = iD_0 = 0,03 \times 10.000 = 300$. Com a prestação no instante 1 ($P_1 = 2.690$) e o juro no instante 1 ($J_1 = 300$), calculamos a amortização no instante 1: $A_1 = P_1 - J_1 = 2.690 - 300 = 2.390$. Com a amortização no instante 1 ($A_1 = 2.390$) e o saldo devedor no instante zero ($D_0 = 10.000$), calculamos o saldo devedor no instante 1: $D_1 = D_0 - A_1 = 10.000 - 2.390 = 7.610$. E, assim, temos completa a linha no instante 1 da tabela. Fazemos, então, as contas análogas para as linhas restantes, completando toda a Tabela 2.

Tabela 2 – Exemplo de tabela Price

Tempo	Saldo Devedor	Amortização	Juro	Prestação
0	10.000	0	0	0
1	7.610	2.390	300	2.690
2	5.148	2.462	228	2.690
3	2.612	2.536	154	2.690
4	0	2.612	78	2.690

Fonte: elaboração do autor.

No Teorema 1, a seguir, vemos como expressar a prestação no Price em função da dívida, da quantidade de prestações e da taxa de juro.

Teorema 1. Consideremos uma dívida D paga em n prestações a uma taxa positiva de juro i . Pelo Price, a prestação é dada por $P = D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$.

Demonstração. Sejam D o valor de uma dívida, n a quantidade de prestações para pagar essa dívida, i a taxa positiva de juro do financiamento e P o valor das prestações pelo Price. Pela Definição 2, segue que as prestações são iguais entre si e a soma dos valores presentes delas é igual à dívida contraída. Assim,

$$\frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \dots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n} = D,$$

donde

$$P = D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

□

2.4.2 SAC

A idealização do SAC é que ele seja um sistema cujas amortizações sejam todas iguais. As amortizações no SAC são definidas respondendo-se à seguinte pergunta: **Qual deve ser o**

valor das amortizações iguais, de modo que a soma delas seja igual à dívida contraída?

As amortizações são definidas de forma direta. Definimos o valor das amortizações e, a partir delas, calculamos as prestações. No SAC:

S.1 As amortizações são iguais entre si e a soma delas é igual à dívida contraída.

Definição 3. SAC é o sistema de amortização definido pelas propriedades de A.1 a A.6 e S.1.

Denotando a dívida por D , a quantidade de parcelas por n e a amortização por A , temos que, no SAC, o valor das amortizações, que são todas iguais, é a solução da equação

$$nA = D$$

na incógnita A .

Exemplo 3. Digamos que uma dívida de R\$ 10.000,00 será paga em 4 prestações mensais a uma taxa de juro de 3% ao mês pelo SAC. Vamos determinar a tabela desse sistema de amortização. Denotemos o valor das amortizações por A . Por definição, A é a solução da equação $4A = 10.000$, donde $A = 2.500$. Assim, já temos a coluna das amortizações. Com o saldo devedor no instante zero ($D_0 = 10.000$) e a amortização no instante 1 ($A_1 = 2.500$), calculamos o saldo devedor no instante 1: $D_1 = D_0 - A_1 = 10.000 - 2.500 = 7.500$. Com o saldo devedor no instante zero ($D_0 = 10.000$), calculamos o juro no instante 1: $J_1 = iD_0 = 0,03 \times 10.000 = 300$. Com a amortização no instante 1 ($A_1 = 2.500$) e o juro no instante 1 ($J_1 = 300$), calculamos a prestação no instante 1: $P_1 = A_1 + J_1 = 2.500 + 300 = 2.800$. E, assim, temos completa a linha no instante 1 da tabela. Fazemos, então, as contas análogas para as linhas restantes, completando toda a Tabela 3.

Tabela 3 – Exemplo de tabela SAC

Tempo	Saldo Devedor	Amortização	Juro	Prestação
0	10.000	0	0	0
1	7.500	2.500	300	2.800
2	5.000	2.500	225	2.725
3	2.500	2.500	150	2.650
4	0	2.500	75	2.575

Fonte: elaboração do autor.

No Teorema 2, a seguir, vemos como expressar as prestações no SAC em função da dívida, da quantidade de prestações e da taxa de juro.

Teorema 2. Consideremos uma dívida D paga em n prestações a uma taxa de juro i . Pelo SAC, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, a k -ésima prestação é dada por $P_k = \frac{D}{n}(1 + ni + i - ki)$.

Demonstração. Sejam D o valor de uma dívida, n a quantidade de prestações para pagar esta dívida, i a taxa de juro do financiamento, D_0 o 0-ésimo saldo devedor, A a amortização pelo SAC e, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, P_k a k -ésima prestação, J_k o k -ésimo juro e D_k o k -ésimo saldo devedor. Pela Definição 3, segue que as amortizações são iguais entre si e a soma delas é igual à dívida contraída. Assim, $nA = D$, donde $A = \frac{D}{n}$. A prestação é a soma da amortização com o juro, isto é, $P_k = A + J_k$. O saldo devedor é a dívida inicial menos as amortizações feitas, isto é, $D_k = D - kA$, donde $D_k = D - k\frac{D}{n}$. O juro é o produto da taxa de juro do financiamento pelo saldo devedor do instante anterior, isto é, $J_k = iD_{k-1}$. Logo,

$$P_k = A + J_k = \frac{D}{n} + iD_{k-1} = \frac{D}{n} + i \left(D - (k-1)\frac{D}{n} \right) = \frac{D}{n}(1 + ni + i - ki).$$

□

3 COMPARAÇÃO PRICE E SAC

O leitor pode reparar que, nos exemplos 2 e 3, o financiamento teve o mesmo valor de dívida, mesma taxa de juro e mesma quantidade de prestações. A única diferença entre um exemplo e outro foi o sistema de amortização, Price, no Exemplo 2, e SAC, no Exemplo 3. É natural que surja a pergunta de qual das duas opções seria melhor.

Em um olhar descuidado, somos tentados a, simplesmente, somar os valores pagos em cada um dos sistemas e julgar que aquele que gerou a menor soma é o melhor para a devedora e o que gerou a maior soma é o melhor para a credora. A soma das prestações no Exemplo 2 (Price) é $2.690 + 2.690 + 2.690 + 2.690 = 10.760$. A soma das prestações no Exemplo 3 (SAC) é $2.800 + 2.725 + 2.650 + 2.575 = 10.750$. Mas essas informações são irrelevantes para saber qual sistema é mais vantajoso do ponto de vista da matemática financeira. Para se decidir, entre duas opções, qual é a mais vantajosa financeiramente, deve-se comparar os valores presentes pagos em cada opção. Dessa forma, leva-se em consideração o custo de oportunidade, uma vez que os valores presentes representam o custo real de cada opção. Ainda, lembramos que não levamos em consideração qualquer reajuste sobre o saldo devedor ou sobre as prestações, evitando flutuações de taxas futuras.

3.1 QUAL É MAIS VANTAJOSO PARA A CREDORA?

Sob a perspectiva da credora, isto é, daquela que vai receber os valores das prestações, a taxa interna de retorno é a taxa de financiamento, uma vez que é sob a taxa de financiamento que a quantia que ela emprestou varia. Dessa forma, para compararmos os dois sistemas, temos que calcular a soma dos valores presentes, com respeito à taxa de financiamento, das prestações em cada sistema e comparar as duas somas.

Exemplo 4. A soma dos valores presentes, com respeito à taxa de financiamento, das prestações no Exemplo 2 (Price) é $\frac{2690}{(1+0,03)^1} + \frac{2690}{(1+0,03)^2} + \frac{2690}{(1+0,03)^3} + \frac{2690}{(1+0,03)^4} = 10.000$. A soma dos valores presentes, com respeito à taxa de financiamento, das prestações no Exemplo 3 (SAC) é $\frac{2800}{(1+0,03)^1} + \frac{2725}{(1+0,03)^2} + \frac{2650}{(1+0,03)^3} + \frac{2575}{(1+0,03)^4} = 10.000$. Como a soma dos valores presentes, com respeito à taxa de financiamento, do Price é igual à do SAC, concluímos que, no caso de uma dívida de R\$ 10.000,00, paga em 4 prestações mensais, a uma taxa de juro de 3% ao mês, Price e SAC são igualmente vantajosos para a credora.

O Exemplo 4 ilustra a comparação, dá uma pista para o caso geral, mas nos permite a conclusão apenas para um caso específico de valor de dívida, taxa de juro e quantidade de prestações. O Teorema 3, a seguir, nos garante que a conclusão que tiramos pode ser generalizada a qualquer caso. Isto é, o Teorema 3 mostra que Price e SAC são igualmente vantajosos para a credora, quaisquer que sejam o valor de dívida, a taxa de juro e a quantidade de prestações.

Teorema 3. Para uma mesma dívida, mesma quantidade de parcelas e mesma taxa positiva de juro, segue que Price e SAC são igualmente vantajosos para quem vai receber os pagamentos.

Na verdade, o Teorema 3 é um caso particular de um fato mais amplo. Ocorre que, não só Price e SAC são equivalentes, mas quaisquer sistemas de amortização que satisfaçam as propriedades de A.1 a A.6 são equivalentes entre si. O Price é, por definição, um sistema de amortização no qual a soma dos valores presentes das prestações é igual à dívida contraída. O SAC é, em particular, um sistema de amortização onde as amortizações são iguais entre si. O Teorema 3 garante que, no SAC, a soma dos valores presentes das prestações também é igual à dívida contraída. No entanto, como vemos no Teorema 4, a seguir, não há nada de especial no fato de as amortizações serem todas iguais. O Teorema 4 mostra que não importa como são feitas as amortizações, desde que elas de fato liquidem a dívida. Isto é, desde que a soma de todas as amortizações seja igual ao valor da dívida contraída, a soma dos valores presentes das prestações também será igual à dívida contraída.

Teorema 4. Para uma mesma dívida, mesma quantidade de parcelas e mesma taxa positiva de juro, segue que dois sistemas de amortização quaisquer, que satisfazem as propriedades de A.1 a A.6, são igualmente vantajosos para quem vai receber os pagamentos.

Demonstração. Consideremos um sistema de amortização que satisfaz as propriedades de A.1 a A.6 qualquer. Denotemos o valor da dívida por D , a quantidade de prestações para pagar essa dívida por n e a taxa positiva de juro do financiamento por i . Denotemos, ainda, o 0-ésimo saldo devedor por D_0 e, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, a k -ésima amortização por A_k , a k -ésima prestação por P_k , o k -ésimo juro por J_k e o k -ésimo saldo devedor por D_k .

O saldo devedor é a dívida inicial menos as amortizações feitas, isto é, $D_k = D - A_1 - A_2 - \dots - A_{k-1} - A_k$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Em particular, $D_n = D - A_1 - A_2 - \dots - A_{n-1} - A_n$. Mas o

saldo devedor do último instante é zero, isto é, $D_n = 0$. Assim, $0 = D - A_1 - A_2 - \dots - A_{n-1} - A_n$,
 donde

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n = D. \quad (1)$$

Pela Definição 1, o valor presente da k -ésima prestação, com respeito a i , é dado por $\frac{P_k}{(1+i)^k}$.
 Mas

$$\begin{aligned} P_k &= A_k + J_k \\ &= A_k + iD_{k-1} \\ &= A_k + i(D - A_1 - A_2 - \dots - A_{k-2} - A_{k-1}) \\ &= A_k + i(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n - A_1 - A_2 - \dots - A_{k-2} - A_{k-1}) \\ &= A_k + i(A_k + A_{k+1} + \dots + A_{n-1} + A_n) \\ &= A_k + iA_k + iA_{k+1} + \dots + iA_{n-1} + iA_n \end{aligned}$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Assim, denotando a soma dos valores presentes, com respeito a i , das prestações por Σ , temos que

$$\Sigma = \frac{A_1 + iA_1 + \dots + iA_n}{(1+i)^1} + \frac{A_2 + iA_2 + \dots + iA_n}{(1+i)^2} + \dots + \frac{A_{n-1} + iA_{n-1} + iA_n}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A_n + iA_n}{(1+i)^n}. \quad (2)$$

Note que

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{A_1 + iA_1 + \dots + iA_n}{(1+i)^1} \\ &+ \frac{A_2 + iA_2 + \dots + iA_n}{(1+i)^2} \\ &\vdots \\ &+ \frac{A_{n-1} + iA_{n-1} + iA_n}{(1+i)^{n-1}} \\ &+ \frac{A_n + iA_n}{(1+i)^n} \\ \\ &= \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{iA_1}{(1+i)^1} + \frac{iA_2}{(1+i)^1} + \dots + \frac{iA_{n-1}}{(1+i)^1} + \frac{iA_n}{(1+i)^1} \\ &+ \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{iA_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{iA_{n-1}}{(1+i)^2} + \frac{iA_n}{(1+i)^2} \\ &\vdots \\ &+ \frac{A_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{iA_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{iA_n}{(1+i)^{n-1}} \\ &+ \frac{A_n}{(1+i)^n} + \frac{iA_n}{(1+i)^n} \\ \\ &= \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{iA_1}{(1+i)^1} \\ &+ \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{iA_2}{(1+i)^1} + \frac{iA_2}{(1+i)^2} \\ &\vdots \\ &+ \frac{A_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{iA_{n-1}}{(1+i)^1} + \frac{iA_{n-1}}{(1+i)^2} + \dots + \frac{iA_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \\ &+ \frac{A_n}{(1+i)^n} + \frac{iA_n}{(1+i)^1} + \frac{iA_n}{(1+i)^2} + \dots + \frac{iA_n}{(1+i)^{n-1}} + \frac{iA_n}{(1+i)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_1 \left(\frac{1}{(1+i)^1} + i \frac{1}{(1+i)^1} \right) \\
&+ A_2 \left(\frac{1}{(1+i)^2} + i \left(\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} \right) \right) \\
&\vdots \\
&+ A_{n-1} \left(\frac{1}{(1+i)^{n-1}} + i \left(\frac{1}{(1+i)^1} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right) \right) \\
&+ A_n \left(\frac{1}{(1+i)^n} + i \left(\frac{1}{(1+i)^1} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} \right) \right) \\
&= A_1 \left(\frac{1}{(1+i)^1} + i \left(\frac{1}{(1+i)^1} \frac{(1+i)^1 - 1}{(1+i) - 1} \right) \right) \\
&+ A_2 \left(\frac{1}{(1+i)^2} + i \left(\frac{1}{(1+i)^2} \frac{(1+i)^2 - 1}{(1+i) - 1} \right) \right) \\
&\vdots \\
&+ A_{n-1} \left(\frac{1}{(1+i)^{n-1}} + i \left(\frac{1}{(1+i)^{n-1}} \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{(1+i) - 1} \right) \right) \\
&+ A_n \left(\frac{1}{(1+i)^n} + i \left(\frac{1}{(1+i)^n} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \right) \right) \\
&= A_1 \frac{(1+i)^1}{(1+i)^1} + A_2 \frac{(1+i)^2}{(1+i)^2} + \cdots + A_{n-1} \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + A_n \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} \\
&= A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\Sigma = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n. \quad (3)$$

Das igualdades 1, 2 e 3, segue que

$$\frac{A_1 + iA_1 + \cdots + iA_n}{(1+i)^1} + \frac{A_2 + iA_2 + \cdots + iA_n}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A_{n-1} + iA_{n-1} + iA_n}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A_n + iA_n}{(1+i)^n} = D.$$

Logo, a soma dos valores presentes, com respeito a i , das prestações é igual à dívida contraída.

Mas o sistema de amortização considerado aqui é arbitrário satisfazendo as propriedades de A.1 a A.6. Isso significa que qualquer sistema de amortização que satisfaça tais propriedades tem a soma dos valores presentes, com respeito à taxa de financiamento, de suas prestações igual à dívida contraída. Portanto, dois sistemas de amortização quaisquer que satisfazem as propriedades de A.1 a A.6 são igualmente vantajosos para quem vai receber os pagamentos. \square

3.2 QUAL É MAIS VANTAJOSO PARA A DEVEDORA?

Sob a perspectiva da devedora, isto é, daquela que vai pagar os valores das prestações, a comparação depende de sua taxa interna de retorno. Ou seja, do quanto o valor de seu dinheiro varia. Dessa forma, para compararmos os dois sistemas, temos que calcular a soma dos valores presentes, com respeito à taxa interna de retorno, das prestações em cada sistema e comparar as duas somas.

Exemplo 5. Consideremos uma taxa interna de retorno de 2% ao mês. A soma dos valores presentes, com respeito à taxa interna de retorno de 2%, das prestações no Exemplo 2 (Price) é $\frac{2690}{(1+0,02)^1} + \frac{2690}{(1+0,02)^2} + \frac{2690}{(1+0,02)^3} + \frac{2690}{(1+0,02)^4} = 10.243$. A soma dos valores presentes, com respeito à taxa interna de retorno de 2%, das prestações no Exemplo 3 (SAC) é $\frac{2800}{(1+0,02)^1} + \frac{2725}{(1+0,02)^2} + \frac{2650}{(1+0,02)^3} + \frac{2575}{(1+0,02)^4} = 10.240$. Como, com respeito à taxa interna de retorno de 2%, a soma dos valores presentes no Price é maior que a soma dos valores presentes no SAC, concluímos que, no caso de uma dívida de R\$ 10.000, paga em 4 prestações mensais, a uma taxa de juro de 3% ao mês e uma taxa interna de retorno de 2%, o SAC é mais vantajoso do que o Price, para a devedora.

Exemplo 6. Agora, consideremos uma taxa interna de retorno de 4% ao mês. A soma dos valores presentes, com respeito à taxa interna de retorno de 4%, das prestações no Exemplo 2 (Price) é $\frac{2690}{(1+0,04)^1} + \frac{2690}{(1+0,04)^2} + \frac{2690}{(1+0,04)^3} + \frac{2690}{(1+0,04)^4} = 9.764$. A soma dos valores presentes, com respeito à taxa interna de retorno de 4%, das prestações no Exemplo 3 (SAC) é $\frac{2800}{(1+0,04)^1} + \frac{2725}{(1+0,04)^2} + \frac{2650}{(1+0,04)^3} + \frac{2575}{(1+0,04)^4} = 9.769$. Como, com respeito à taxa interna de retorno de 4%, a soma dos valores presentes no Price é menor que a soma dos valores presentes no SAC, concluímos que, no caso de uma dívida de R\$ 10.000, paga em 4 prestações mensais, a uma taxa de juro de 3% ao mês e uma taxa interna de retorno de 4%, o Price é mais vantajoso do que o SAC, para a devedora.

Os exemplos 5 e 6 ilustram a comparação, dão uma pista para o caso geral, mas nos permitem a conclusão apenas para um caso específico de valor de dívida, taxa de juro, quantidade de prestações e taxa interna de retorno. O Teorema 5, a seguir, nos permite tirar conclusões para qualquer caso. Isto é, o Teorema 5 nos permite tirar conclusões sobre qual é mais vantajoso para a devedora, quaisquer que sejam o valor de dívida, a taxa de juro, a quantidade de prestações e a taxa interna de retorno.

Teorema 5. Para uma mesma dívida, mesma quantidade de parcelas e mesma taxa positiva de juro:

- a) Se a taxa interna de retorno positiva de quem contraiu a dívida é igual à taxa do financiamento, então, para essa pessoa, Price e SAC são igualmente vantajosos.
- b) Se a taxa interna de retorno positiva de quem contraiu a dívida é menor que a taxa do financiamento, então, para essa pessoa, o pagamento pelo SAC é mais vantajoso do que o pagamento pelo Price.
- c) Se a taxa interna de retorno positiva de quem contraiu a dívida é maior que a taxa do financiamento, então, para essa pessoa, o pagamento pelo Price é mais vantajoso do que o pagamento pelo SAC.

Demonstração. Consideremos que uma dívida será paga em prestações a uma determinada taxa positiva de juro. Vamos denotar por D o valor da dívida, por n a quantidade de prestações para pagar esta dívida, por i a taxa de juro do financiamento e por j a taxa interna de retorno positiva de quem contraiu a dívida.

Denotando o valor das prestações pelo Price por P , para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, pela Definição 1, o valor presente da k -ésima prestação, com respeito a j , pelo Price é dado por $\frac{P}{(1+j)^k}$. Pelo Teorema 1, a prestação no Price é dada por $P = D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$. Assim, denotando a soma dos valores presentes, com respeito a j , das prestações pelo Price por Σ_P , segue que

$$\Sigma_P = \frac{D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}{(1+j)^1} + \frac{D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}{(1+j)^2} + \dots + \frac{D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}{(1+j)^{n-1}} + \frac{D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}{(1+j)^n}.$$

Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, denotando o valor das prestações pelo SAC por P_k , o valor presente da k -ésima prestação, com respeito a j , pelo SAC é dado por $\frac{P_k}{(1+j)^k}$. Pelo Teorema 2, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, a k -ésima prestação pelo SAC é dada por $P_k = \frac{D}{n}(1 + ni + i - ki)$. Assim, denotando a soma dos valores presentes, com respeito a j , das prestações pelo SAC por Σ_S , segue que

$$\Sigma_S = \frac{\frac{D}{n}(1 + ni + i - i)}{(1+j)^1} + \frac{\frac{D}{n}(1 + ni + i - 2i)}{(1+j)^2} + \dots + \frac{\frac{D}{n}(1 + ni + i - ni)}{(1+j)^n}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \Sigma_P &= \frac{D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}{(1+j)^1} + \frac{D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}{(1+j)^2} + \dots + \frac{D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}{(1+j)^{n-1}} + \frac{D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}{(1+j)^n} \\ &= D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \left(\frac{1}{(1+j)^1} + \frac{1}{(1+j)^2} + \dots + \frac{1}{(1+j)^{n-1}} + \frac{1}{(1+j)^n} \right) \\ &= D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \frac{1}{(1+j)^n} \frac{(1+j)^n - 1}{1+j-1} \\ &= Di \frac{(1+j)^n - 1}{j(1+j)^n} \left(\frac{1}{(1+i)^n - 1} + 1 \right). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\Sigma_P = Di \frac{(1+j)^n - 1}{j(1+j)^n} \left(\frac{1}{(1+i)^n - 1} + 1 \right). \quad (4)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \Sigma_S &= \frac{\frac{D}{n}(1+in+i-i)}{(1+j)^1} + \dots + \frac{\frac{D}{n}(1+in+i-ni)}{(1+j)^n} \\ &= \frac{D}{n} \left(\frac{1+in+i}{(1+j)^1} - \frac{i}{(1+j)^1} + \dots + \frac{1+in+i}{(1+j)^n} - \frac{ni}{(1+j)^n} \right) \\ &= \frac{D}{n} \left(\left(\frac{1+in+i}{(1+j)^1} + \dots + \frac{1+in+i}{(1+j)^n} \right) + \left(-\frac{i}{(1+j)^1} - \dots - \frac{ni}{(1+j)^n} \right) \right) \\ &= \frac{D}{n} \left((1+in+i) \left(\frac{1}{(1+j)^1} + \dots + \frac{1}{(1+j)^n} \right) - i \left(\frac{1}{(1+j)^1} + \dots + \frac{n}{(1+j)^n} \right) \right) \\ &= \frac{D}{n} \left((1+in+i) \frac{(1+j)^n - 1}{j(1+j)^n} - i \left(\frac{1}{(1+j)^1} + \dots + \frac{n}{(1+j)^n} \right) \right). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\Sigma_S = \frac{D}{n} \left((1 + in + i) \frac{(1 + j)^n - 1}{j(1 + j)^n} - i \left(\frac{1}{(1 + j)^1} + \dots + \frac{n}{(1 + j)^n} \right) \right). \quad (5)$$

Denotando

$$B = \frac{1}{(1 + j)^1} + \frac{2}{(1 + j)^2} + \dots + \frac{n - 1}{(1 + j)^{n-1}} + \frac{n}{(1 + j)^n}, \quad (6)$$

temos que

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{(1+j)^1} \\ &+ \frac{2}{(1+j)^2} \\ &\vdots \\ &+ \frac{n-1}{(1+j)^{n-1}} \\ &+ \frac{n}{(1+j)^n} \\ &= \frac{1}{(1+j)^1} \\ &+ \frac{1}{(1+j)^2} + \frac{1}{(1+j)^2} \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{(1+j)^{n-1}} + \frac{1}{(1+j)^{n-1}} + \dots + \frac{1}{(1+j)^{n-1}} \\ &+ \frac{1}{(1+j)^n} + \frac{1}{(1+j)^n} + \dots + \frac{1}{(1+j)^n} + \frac{1}{(1+j)^n} \\ &= \frac{1}{(1+j)^1} + \frac{1}{(1+j)^2} + \dots + \frac{1}{(1+j)^{n-1}} + \frac{1}{(1+j)^n} \\ &+ \frac{1}{(1+j)^2} + \dots + \frac{1}{(1+j)^{n-1}} + \frac{1}{(1+j)^n} \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{(1+j)^{n-1}} + \frac{1}{(1+j)^n} \\ &+ \frac{1}{(1+j)^n} \\ &= \left(\frac{1}{(1+j)^1} + \dots + \frac{1}{(1+j)^n} \right) + \left(\frac{1}{(1+j)^2} + \dots + \frac{1}{(1+j)^n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(1+j)^{n-1}} + \frac{1}{(1+j)^n} \right) + \left(\frac{1}{(1+j)^n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{(1+j)^n} \frac{(1+j)^{n-1}}{(1+j)-1} \right) + \left(\frac{1}{(1+j)^n} \frac{(1+j)^{n-1}-1}{(1+j)-1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(1+j)^n} \frac{(1+j)^2-1}{(1+j)-1} \right) + \left(\frac{1}{(1+j)^n} \frac{(1+j)^1-1}{(1+j)-1} \right) \\ &= \frac{1}{j(1+j)^n} ((1+j)^n - 1 + (1+j)^{n-1} - 1 + \dots + (1+j)^2 - 1 + (1+j)^1 - 1) \\ &= \frac{1}{j(1+j)^n} ((1+j)^n + (1+j)^{n-1} + \dots + (1+j)^2 + (1+j)^1 - n) \\ &= \frac{1}{j(1+j)^n} \left((1+j)^1 \frac{(1+j)^n-1}{(1+j)-1} - n \right) \\ &= \frac{(1+j)^n-1}{j^2(1+j)^{n-1}} - \frac{n}{j(1+j)^n}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$B = \frac{(1+j)^n - 1}{j^2(1+j)^{n-1}} - \frac{n}{j(1+j)^n}. \quad (7)$$

Das igualdades 6 e 7, segue que

$$\frac{1}{(1+j)^1} + \frac{2}{(1+j)^2} + \dots + \frac{n-1}{(1+j)^{n-1}} + \frac{n}{(1+j)^n} = \frac{(1+j)^n - 1}{j^2(1+j)^{n-1}} - \frac{n}{j(1+j)^n}. \quad (8)$$

Das igualdades 5 e 8, segue que

$$\Sigma_S = \frac{D}{n} \left((1+in+i) \frac{(1+j)^n - 1}{j(1+j)^n} - i \left(\frac{(1+j)^n - 1}{j^2(1+j)^{n-1}} - \frac{n}{j(1+j)^n} \right) \right),$$

donde

$$\Sigma_S = Di \frac{(1+j)^n - 1}{j(1+j)^n} \left(\frac{1}{ni} - \frac{1}{nj} + \frac{1}{(1+j)^n - 1} + 1 \right). \quad (9)$$

a) Vejamos o caso em que a taxa interna de retorno é igual à taxa do financiamento. Vimos, na demonstração do Teorema 4, que, em qualquer sistema de amortização, a soma dos valores presentes, com respeito a i , das prestações é igual a D . Assim, no caso $j = i$, a soma dos valores presentes, com respeito a j , das prestações pelo Price é igual à soma dos valores presentes, com respeito a j , das prestações pelo SAC. Portanto, nesse caso, Price e SAC são igualmente vantajosos.

b) Vejamos o caso em que a taxa interna de retorno é menor que a taxa do financiamento, isto é, $j < i$.

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $x > 0$ e $n > 1$. Pela Desigualdade das Médias Lima (2008, p. 120), segue que

$$\frac{(1+x)^{n-1} + \dots + (1+x)^1 + (1+x)^0}{n} > \sqrt[n]{(1+x)^{n-1} \dots (1+x)^1 (1+x)^0},$$

donde

$$(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x)^1 + (1+x)^0 > n \sqrt[n]{(1+x)^{n-1+n-2+\dots+1+0}}.$$

Como $(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x)^1 + (1+x)^0 = \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x) - 1}$ e $n-1+n-2+\dots+1+0 = (0+n-1)\frac{n}{2}$, segue que $\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x) - 1} > n \sqrt[n]{(1+x)^{\frac{(n-1)n}{2}}}$, isto é, $\frac{(1+x)^n - 1}{x} > n(1+x)^{\frac{n-1}{2}}$, donde $((1+x)^n - 1)^2 > n^2(1+x)^{n-1}x^2$. Portanto,

$$((1+x)^n - 1)^2 - n^2x^2(1+x)^{n-1} > 0. \quad (10)$$

Agora, sejam $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ e $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\frac{1}{nx} + \frac{1}{(1+x)^{n-1}}$ para

todo $x \in (0, \infty)$. Note que $f'(x) = \frac{((1+x)^{n-1})^2 - n^2 x^2 (1+x)^{n-1}}{nx^2((1+x)^{n-1})^2}$ para todo $x \in (0, \infty)$. Pela Desigualdade 10, segue que $\frac{((1+x)^{n-1})^2 - n^2 x^2 (1+x)^{n-1}}{nx^2((1+x)^{n-1})^2} > 0$, donde $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$. Portanto, f é estritamente crescente.

Como i e j são positivos, $j < i$ e f é estritamente crescente, segue que $f(j) < f(i)$. Isto é,

$$-\frac{1}{nj} + \frac{1}{(1+j)^n - 1} < -\frac{1}{ni} + \frac{1}{(1+i)^n - 1},$$

donde

$$\frac{1}{ni} + 1 + -\frac{1}{nj} + \frac{1}{(1+j)^n - 1} < \frac{1}{ni} + 1 + -\frac{1}{ni} + \frac{1}{(1+i)^n - 1}.$$

Isto é,

$$\frac{1}{ni} - \frac{1}{nj} + \frac{1}{(1+j)^n - 1} + 1 < \frac{1}{(1+i)^n - 1} + 1.$$

Assim,

$$Di \frac{(1+j)^n - 1}{j(1+j)^n} \left(\frac{1}{ni} - \frac{1}{nj} + \frac{1}{(1+j)^n - 1} + 1 \right) < Di \frac{(1+j)^n - 1}{j(1+j)^n} \left(\frac{1}{(1+i)^n - 1} + 1 \right). \quad (11)$$

Pelas Desigualdade 11 e igualdades 4 e 9, segue que $\Sigma_S < \Sigma_P$. Assim, no caso $j < i$, a soma dos valores presentes, com respeito a j , das prestações pelo SAC é menor que a soma dos valores presentes, com respeito a j , das prestações pelo Price. Portanto, nesse caso, o SAC é mais vantajoso do que o Price.

- c) No caso em que a taxa interna de retorno é maior que a taxa do financiamento, de forma análoga ao caso anterior, vemos que a soma dos valores presentes, com respeito a j , das prestações pelo Price é menor que a soma dos valores presentes, com respeito a j , das prestações pelo SAC. Portanto, nesse caso, o Price é mais vantajoso do que o SAC.

□

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabe-se que os sistemas de financiamento imobiliário oferecidos no Brasil são Price e SAC. O Price é um sistema em que as prestações se mantêm constantes ao longo de todo o período de pagamento e o SAC é um sistema em que as prestações decrescem. Naturalmente, quem busca contratar um financiamento se questiona sobre qual dessas opções é a mais vantajosa. É claro, entendemos por mais vantajosa aquela que gera o menor custo. Em um primeiro momento, somos tentados a, simplesmente, somar as prestações no Price e somar as prestações no SAC: o que der a menor soma será o melhor. No entanto, esta abordagem não leva em consideração um conceito primordial da matemática financeira: o valor do dinheiro no tempo. Quantias de

dinheiro em instantes distintos podem possuir valores distintos. O necessário, então, é somar, não o valor absoluto das prestações, mas o valor de cada uma delas levadas a um mesmo instante de tempo. O que foi feito no presente trabalho. A partir de teoremas, concluímos – não apenas para exemplos ou simulações específicas, mas para o caso geral – que Price e SAC são igualmente vantajosos para a credora e que, para a devedora, o mais vantajoso entre Price e SAC depende de sua taxa interna de retorno. Para a devedora: se sua taxa interna de retorno for menor que a taxa de financiamento, então o SAC é mais vantajoso; se sua taxa interna de retorno for maior que a taxa de financiamento, então o Price é mais vantajoso.

REFERÊNCIAS

ELOY, Claudia Magalhães; PAIVA, Henrique Bottura. Tabela Price: a nova relevância de uma antiga polêmica – considerações sobre a questão do anatocismo e outras abordagens. In: **ABECIP. 3º Prêmio ABECIP de Monografia em Crédito Imobiliário e Poupança**. Os sistemas de amortização e o conceito de capitalização de juros nos financiamentos imobiliários: a experiência brasileira e o modelo internacional. São Paulo: ABECIP, 2011. v. 1, p. 11–64.

Disponível em: <https://www.abecip.org.br/admin/assets/uploads/anexos/livro-iii-premioabecip-volume11.pdf>. Acesso em: 21 maio 2025.

FERREIRA, Débora Borges. SAC ou PRICE? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, RJ, n. 85, p. 42–45, 2014. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/85/19.html>. Acesso em: 21 maio 2025.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática**: e outras histórias. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. Disponível em:

<https://matematicatransformadora.com/wp-content/uploads/2019/04/5-SBM-Elon-Lages-Lima-Meu-Professor-de-Matematica-e-Outras-Hist%C3%B3rias.pdf>. Acesso em: 21 maio 2025.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila. **Progressões e Matemática Financeira**. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.


REZENDE, Teotônio Costa. **Os sistemas de amortização nas operações de crédito imobiliário**: a falácia da capitalização de juros e da inversão do momento de deduzir a quota de amortização. 2003. Dissertação (Mestrado Profissional em Gestão e Estratégia em Negócios) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Humanas e Sociais, Rio de Janeiro.


SANTOS, Sérgio Ferreira dos. **Análise Comparativa dos Sistemas de Amortizações**: SAC e Price. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Estadual do Piauí, Teresina. Disponível em:

<https://sistemas2.uespi.br/handle/tede/623>. Acesso em: 21 maio 2025.

SOBRE O AUTOR

Dr. Tiago Soares dos Reis

 <https://orcid.org/0000-0003-2909-2335>

 <http://lattes.cnpq.br/7858280277437268>

Contato: tiago.reis@ifrj.edu.br

Contribuição autoral: conceituação; escrita – primeira redação; escrita – revisão e edição; investigação.

Revisora de texto: Giselle Maria Sarti Leal