FUNÇÕES FELIZES E SEUS PONTOS FIXOS

HAPPY FUNCTIONS AND THEIR FIXED POINTS

FUNCIONES FELICES Y SUS PUNTOS FIJOS

Luciano Rodrigues Coelho[1], Marcelo Oliveira Veloso[1], Gilcelia Regiane de Souza[1]

[1] Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ), Ouro Branco, Minas Gerais, Brasil.

Data de submissão: 27 dez. 2024. Data de aprovação: 17 jun. 2025. Financiamento: Universidade Federal de São João Del-Rei. Como citar: COELHO, Luciano Rodrigues; VELOSO, Marcelo Oliveira; SOUZA, Gilcelia Regiane de. Funções felizes e seus pontos fixos. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 11, p. e308, 28 out. 2025. https://doi.org/10.35819/remat2025v11id7522.

Resumo: Este trabalho tem como objetivo principal explorar os pontos fixos da função felicidade em qualquer sistema de numeração posicional. Apresentamos diversos resultados e propriedades associados aos números felizes e aos pontos fixos da função (e, b)-feliz. Em especial, introduzimos métodos para identificá-los por meio da resolução de equações diofantinas, utilizando recursos computacionais. No caso do expoente dois, utilizamos uma fórmula de Alan Beardon para o cálculo do número de pontos fixos, aplicando-a para exibir alguns exemplos concretos. Além disso, apresentamos um resultado que estabelece uma relação entre o número de pontos fixos e os números de Mersenne.

Palavras-chave: números felizes; pontos fixos; números de Mersenne.

Abstract: This work primarily aims to explore the fixed points of the happiness function in any positional numeral system. We present various results and properties related to happy numbers and the fixed points of the (e, b)-happy function. In particular, we introduce methods to identify them through the resolution of Diophantine equations, using computational tools. For the case of exponent two, we employ a formula by Alan Beardon for calculating the number of fixed points, applying it to exhibit some concrete examples. Furthermore, we present a result that establishes a connection between the number of fixed points and Mersenne numbers.

Keywords: happy numbers; fixed points; Mersenne numbers.

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo principal explorar los puntos fijos de la función felicidad en cualquier sistema de numeración posicional. Presentamos diversos resultados y propiedades asociados a los números felices y a los puntos fijos de la función (e, b)-feliz. En particular, introducimos métodos para identificarlos mediante la resolución de ecuaciones diofánticas, utilizando recursos computacionales. En el caso del exponente dos, empleamos una fórmula de Alan Beardon para el cálculo del número de puntos fijos, aplicándola para mostrar algunos ejemplos concretos. Además, presentamos un resultado que establece una relación entre el número de puntos fijos y los números de Mersenne.

Palabras clave: números felices; puntos fijos; números de Mersenne.

1 INTRODUÇÃO

Os números felizes abrangem uma variedade de temas na matemática. O estudo desses números integra elementos de teoria dos números, sistemas dinâmicos discretos, computação, entre outras áreas. Trata-se de um tema atual e relevante, explorado por diversos autores (ver, por exemplo, Beardon (1998), Grundman e Teeple (2001), Rodrigues (2021), Mata e Veloso (2023) e Costa e Carvalho (2025)). Neste contexto, destacamos os artigos Beardon (1998) e Mata e Veloso (2023) que serviram como base teórica fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Considere o seguinte algoritmo, na base decimal: dado um número inteiro, calcule a soma dos quadrados de seus dígitos. Repita essa etapa com o número obtido, e continue o processo de forma iterativa. Se, ao final da execução do algoritmo, obtemos o número 1, dizemos que o número inteiro inicial é um número feliz. Observe que o 49 é feliz

$$49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1.$$

Se, nesse procedimento, nunca obtemos o número 1, diremos que o número inicial não é feliz e será chamado de triste. Agora note que o número 38 é um número triste, pois, ao aplicarmos o algoritmo, ele entra em um ciclo infinito. A sequência de iterações é:

$$38 \to 73 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to \cdots$$

Observe que o número 58 aparece em duas iterações distintas, confirmando a formação do ciclo:

$$\{58, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37\}.$$

O presente trabalho explora os pontos fixos da função felicidade em qualquer base posicional. Em especial, abordamos algumas técnicas para encontrar esses pontos fixos, resolvendo equações diofantinas com o auxílio de um programa computacional. Também exploramos um resultado de Alan Beardon (Beardon, 1998, Teorema 3.1) para determinar o número de pontos fixos da função feliz $F_{2,b}$, obtendo exemplos e um resultado bem interessante que relaciona o número de pontos fixos da função feliz $F_{2,b}$ com os números de Mersenne, Teorema 4.12. Os números de Mersenne são inteiros positivos que podem ser expressos pela fórmula $2^n - 1$, onde n é um número inteiro positivo (veja Gomes, Costa e Santos (2008)).

Para o leitor interessado no tema, existem diversas questões relacionadas aos números felizes, como, por exemplo, a existência de infinitos números primos felizes, na base 10.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2, estudamos a função (e, b)-feliz, os números (e, b)-felizes e (e, b)-tristes, além de descrever um método, utilizando equações diofantinas, para determiná-los. Na Seção 3, estudamos os pontos fixos da função (e, b)-feliz e apresentamos métodos para encontrá-los. Por fim, na Seção 4, exploramos a fórmula para calcular o número de pontos fixos da função $(2, b)$ em qualquer base, sua relação com os números de Mersenne e alguns resultados correlatos.

2 NÚMEROS FELIZES

Apresentamos a definição da função $(e,\, b)$-feliz e os números $(e,\, b)$-felizes, de acordo com Grundman e Teeple (2001). Em especial, discutimos como determinar se um dado número é $(e,\, b)$-feliz (veja o comentário após o Corolário 2.9). É necessário recordarmos como representar um inteiro positivo em qualquer base $b \geq 2$. O leitor familiarizado com a representação posicional pode ir direto à definição da função $(e,\, b)$-feliz.

O próximo resultado, uma consequência direta do Lema de Euclides, nos permite representar um inteiro positivo, de maneira única, em qualquer base posicional $b \geq 2$. A sua demonstração foge do escopo deste trabalho. Ao leitor interessado indicamos as referências Hardy e Wright (1960), Lacerda (2014), Martins (2015) e Rocha (2019).

Teorema 2.1 *Para qualquer número inteiro não negativo N e qualquer base inteira b, tal que $b > 1$, existe uma representação única na forma polinomial*

$$N = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0,$$

onde $n \geq 0$, $0 \leq a_i \leq b - 1$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, desde que $a_n \neq 0$.

É usual denotar a forma polinomial $a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0$, do Teorema 2.1, por $[a_n \ldots a_1 a_0]_b$.

A demonstração do Teorema 2.1 fornece um algoritmo para representar qualquer inteiro não negativo em uma base dada, $b \geq 2$. Caso queira entender esse algoritmo mais detalhadamente, leia a seção 2 em Rocha (2019). A seguir descrevemos, com um exemplo, como representar um número em determinada base.

Exemplo 2.2 *Vamos representar o número 58 na base 5. Para isso, faremos uma divisão euclidiana de 58 por 5. Após essa primeira divisão, faremos sucessivas divisões euclidianas entre o quociente anterior e a base 5, até encontrarmos um quociente menor que a base. Observe:*

$$58 = 5 \cdot 11 + 3 \quad (i)$$

$$11 = 5 \cdot 2 + 1 \quad (ii)$$

Agora, ao substituirmos (i) em (ii), obtemos

$$58 = 5 \cdot (5 \cdot 2 + 1) + 3.$$

Escrevendo na forma polinomial, temos:

$$58 = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3.$$

Portanto, temos que $58 = [213]_5$. $\diamondsuit$

Os sistemas de numeração em bases não decimais também possuem aplicações em nosso cotidiano. Para o leitor interessado em aprofundar-se no tema, recomendamos a consulta ao trabalho de Rocha (2019).

Agora estamos em condições de apresentar a função feliz e o número feliz em qualquer base posicional e expoente. Dados os inteiros $e \geq 2$ e $b \geq 2$, seja x um número inteiro positivo cuja representação na base b é dada por

$$x = [a_r a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_0]_b = \sum_{i=0}^{r} a_i b^i.$$

A função (e, b)-feliz é definida por

$$\begin{aligned} F_{e,b} : \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ x &\longmapsto \sum_{i=0}^{r} a_i^e. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$F_{e,b}(x) = F_{e,b}(\sum_{i=0}^{r} a_i b^i) = \sum_{i=0}^{r} a_i^e.$$

É usual denotar a função $F_{2,10}$ por F. Assim, quando a base e o expoente não são declarados, subentende-se que seu valor $e = 2$ e $b = 10$.

Dizemos que um número inteiro positivo m é $(e,\, b)$-feliz quando, para algum inteiro $k \geq 1$, temos que $F_{e,b}^k(m) = 1$, onde $F_{e,b}^0 = id$ (função identidade) e $F_{e,b}^k = F_{e,b} \circ F_{e,b} \circ \cdots \circ F_{e,b}$ (composição de k funções $F_{e,b}$). Caso contrário, ele é dito $(e,\, b)$-triste. É imediato que o número 1 é $(e,\, b)$-feliz para qualquer expoente e qualquer base.

Exemplo 2.3 *O número 193 é* $(2,\, 10)$*-feliz na base 10, pois*

$$\begin{aligned} F(193) &= 1^2 + 9^2 + 3^2 = 1 + 81 + 9 = 91 \\ F^2(193) &= F(F(193)) = F(91) = 9^2 + 1^2 = 81 + 1 = 82 \\ F^3(193) &= F(F^2(193)) = F(82) = 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68 \\ F^4(193) &= F(F^3(193)) = F(68) = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \\ F^5(193) &= F(F^4(193)) = F(100) = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 + 0 + 0 = 1. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Exemplo 2.4 *Iterando a função $F_{2,\,10}$ no número 154, obtemos*

$$F(154) = 42,\; F^2(154) = 20, \ldots, F^8(154) = 145,\; F^9(154) = 42.$$

Agora, observe que

$$F^k(154) \in \{4,\, 16,\, 37,\, 58,\, 89,\, 145,\, 42,\, 20\}$$

para todo $k \geq 1$. Logo $F^k(154) \neq 1$, para todo $k \geq 1$. Ou seja, 154 é um número $(2,\, 10)$-triste.

♢

Exemplo 2.5 *O número 127 é feliz na base 9, pois*

$$\begin{aligned} F_{2,9}(127) &= F_{2,9}([151]_9) = 1^2 + 5^2 + 1^2 = 27 \\ F^2_{2,9}(127) &= F_{2,9}(27) = F_{2,9}([30]_9) = 3^2 + 0^2 = 9 \\ F^3_{2,9}(127) &= F_{2,9}(9) = F_{2,9}([10]_9) = 1^2 + 0^2 = 1. \end{aligned}$$

♢

Teorema 2.6 *Na base 2 todo número é $(e,\, 2)$-feliz.*

Prova. Vamos demonstrar por indução. Note que

$$F_{e,2}(1) = 1, \quad F_{e,2}(2) = F_{e,2}([10]_2) = 1^e + 0^e = 1,$$

$$F_{e,2}(3) = F_{e,2}([11]_2) = 1^e + 1^e = 2 \text{ e } F^2_{e,2}(3) = F_{e,2}(F_{e,2}(3)) = F_{e,2}(2) = 1.$$

Logo, os inteiros 1, 2 e 3 são números $(e,\, 2)$-felizes. Seja $n > 3$. Vamos supor, por hipótese de indução, que todo inteiro menor que n é um número $(e,\, 2)$-feliz. Seja $n = a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0$ a representação posicional de n, na base 2. Por suposição $r \geq 2$, $a_r = 1$ e $a_i \in \{0, 1\}$, para todo $0 \leq i \leq r - 1$. Visto que $a_i^e = a_i$, obtemos que

$$\begin{aligned} F_{e,2}(n) =& a_r^e + a_{r-1}^e + \cdots + a_1^e + a_0^e \\ =& 1 + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 \\ \leq& 1 + r < 2^r \\ \leq& 2^r + a_{r-1}2^{r-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 = n. \end{aligned}$$

Verificando que $F_{e,2}(n) < n$. Segue, por hipótese de indução, que $F_{e,2}(n)$ é um número $(e,\, 2)$-feliz. Logo existe k tal que

$$F^k_{e,2}(F_{e,2}(n)) = 1.$$

Ou seja,

$$F_{e,2}^{k+1}(n) = F_{e,2}^{k}(F_{e,2}(n)) = 1.$$

Isso mostra que n é um número $(e,\, 2)$-feliz. Portanto, todo número é $(e,\, 2)$-feliz. $\square$

Se em determinada base posicional, b, todo número é $(e,\, b)$-feliz é usual chamar essa base posicional por **base** $(e,\, b)$**-feliz**. O resultado anterior mostra que a base 2 é uma base $(e,\, 2)$-feliz.

O seguinte resultado mostra que, ao aplicarmos as iteradas da função $(e,\, b)$-feliz a um inteiro m e encontrarmos um número $(e,\, b)$-feliz (ou triste), $F_{e,\,b}^{r}(m)$, nesse processo, todos os números da sequência

$$m,\; F_{e,\,b}(m),\; F_{e,\,b}^{2}(m), \ldots, F_{e,\,b}^{k}(m), \ldots$$

também são $(e,\, b)$-felizes (ou tristes).

Teorema 2.7 *Seja m um número inteiro positivo.*

1. *Se m é $(e,\, b)$-feliz e $F_{e,\,b}^{k}(n) = m$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então n é $(e,\, b)$-feliz.*
2. *Se m é $(e,\, b)$-triste e $F_{e,\,b}^{k}(n) = m$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então n é $(e,\, b)$-triste.*

Prova. Seja m um número inteiro positivo.

1. Seja m um número $(e,\, b)$-feliz. Então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $F_{e,\,b}^{r}(m) = 1$. Assim

   $$F_{e,\,b}^{r+k}(n) = F_{e,\,b}^{r}(F_{e,\,b}^{k}(n)) = F_{e,\,b}^{r}(m) = 1.$$

   Portanto, n é um número $(e,\, b)$-feliz.

2. Se m é $(e,\, b)$-triste, então $m \neq 1$ e $F_{e,\,b}^{r}(m) \neq 1$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Visto que $F_{e,\,b}^{k}(n) = m$ e m é $(e,\, b)$-triste temos que $F_{e,\,b}^{l}(n) \neq 1$ para $0 \leq l \leq k$. Isto implica que

   $$F_{e,\,b}^{r+k}(n) = F_{e,\,b}^{r}(F_{e,\,b}^{k}(n)) = F_{e,\,b}^{r}(m) \neq 1,$$

   para todo $r \in \mathbb{N}$. Logo $F_{e,\,b}^{r}(n) \neq 1$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Portanto, n é um número $(e,\, b)$-triste.

$\square$

Teorema 2.8 *Sejam m, $e \geq 2$ e $b \geq 2$ inteiros positivos. Então $F_{e,b}(m) < m$, para todo $m \geq b^{e+1}$.*

Prova. Seja $m = [a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0]_b$ a representação posicional de m na base $b \geq 2$. Visto que $m \geq b^{e+1}$ temos que $r \geq e+1$ e $a_r \neq 0$. Logo m possui, pelo menos $(e+2)$ dígitos. Por definição,

$$F_{e,b}(m) = a_r^e + a_{r-1}^e + \cdots + a_1^e + a_0^e.$$

Agora, considere a diferença entre m e $F_{e,b}(m)$:

$$\begin{aligned} m - F_{e,b}(m) &= a_r b^r + a_{r-1}b^{r-1} + \cdots + a_1 b + a_0 - (a_r^e + a_{r-1}^e + \cdots + a_1^e + a_0^e) \\ &= (a_r b^r - a_r^e) + (a_{r-1}b^{r-1} - a_{r-1}^e) + \cdots + (a_1 b - a_1^e) + (a_0 - a_0^e) \\ &= a_r(b^r - a_r^{e-1}) + a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}^{e-1}) + \cdots + a_e(b^e - a_e^{e-1}) + a_{e-1}(b^{e-1} - a_{e-1}^{e-1}) \\ &\quad + a_{e-2}(b^{e-2} - a_{e-2}^{e-1}) + a_{e-3}(b^{e-3} - a_{e-3}^{e-1}) + \cdots + a_1(b - a_1^{e-1}) + a_0(1 - a_0^{e-1}). \end{aligned}$$

Faça

$$\alpha = a_r(b^r - a_r^{e-1}) + a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}^{e-1}) + \cdots + a_e(b^e - a_e^{e-1}) + a_{e-1}(b^{e-1} - a_{e-1}^{e-1})$$

e

$$\beta = a_{e-2}(b^{e-2} - a_{e-2}^{e-1}) + a_{e-3}(b^{e-3} - a_{e-3}^{e-1}) + \cdots + a_1(b - a_1^{e-1}) + a_0(1 - a_0^{e-1}).$$

Agora, observe que $\alpha > 0$, pois $0 \leq a_i < b$ para todo $0 \leq i \leq r$ e $a_r \neq 0$. Além disso, o menor valor de α ocorre quando $r = e+1$, $a_{e+1} = 1$, $a_e = 0$ e $a_{e-1} = 0$. Assim,

$$\alpha = a_{e+1}(b^{e+1} - a_{e+1}^{e-1}) + a_e(b^e - a_e^{e-1}) + a_{e-1}(b^{e-1} - a_{e-1}^{e-1}) = b^{e+1} - 1.$$

E o menor valor possível para β ocorre quando $a_i = b-1$ para $i = 0,\, 1,\, 2, \ldots, e-2$. Assim,

$$\begin{aligned} \beta &= (b-1)(b^{e-2} - (b-1)^{e-1}) + (b-1)(b^{e-3} - (b-1)^{e-1}) + \cdots + (b-1)(1 - (b-1)^{e-1}) \\ &= (b-1)[(b^{e-2} - (b-1)^{e-1}) + (b^{e-3} - (b-1)^{e-1}) + \cdots + (b - (b-1)^{e-1}) + (1 - (b-1)^{e-1})] \\ &= (b-1)[-(e-1)(b-1)^{e-1} + b^{e-2} + b^{e-3} + \cdots + b + 1] \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} m - F_{e,b}(m) &\geq \alpha + \beta \\ &= b^{e+1} - 1 + (b-1)[-(e-1)(b-1)^{e-1} + b^{e-2} + b^{e-3} + \cdots + b + 1] \\ &= b^{e+1} - 1 - (e-1)(b-1)^e + (b-1)(b^{e-2} + b^{e-3} + \cdots + b + 1) \\ &= b^{e+1} - 1 - (e-1)(b-1)^e + b^{e-1} - 1 \\ &= b^{e+1} + b^{e-1} - (e-1)(b-1)^e - 2 \\ &\geq b^{e+1} - (e-1)(b-1)^e \\ &= ((b-1)+1)^{e+1} - (e-1)(b-1)^e \\ &\geq (b-1)^{e+1} + (e+1)(b-1)^e - (e-1)(b-1)^e \text{ (expansão binomial)} \\ &= (b-1)^{e+1} + 2(b-1)^e \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, $F_{e,b}(m) < m$ quando $m \geq b^{e+1}$. $\square$

Corolário 2.9 *Dado um inteiro positivo m, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$F^k_{e,b}(m) < b^{e+1}.$$

Prova. Suponha que $F^k_{e,b}(m) \geq b^{e+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 2.8 que

$$F_{e,b}(m) > F^2_{e,b}(m) > F^3_{e,b}(m) > \cdots > F^i_{e,b}(m) > \cdots > b^{e+1}$$

é uma sequência infinita de números inteiros, estritamente decrescente e limitada inferiormente. Um absurdo! Donde segue o resultado. $\square$

Agora temos um procedimento para determinar se um número é (e, b)-feliz. Primeiramente, identificamos quais números do conjunto

$$D_{e,b} = \{1,\, 2, \ldots, b^{e+1} - 1\}$$

são (e, b)-felizes, utilizando recursos computacionais. Se $m > b^{e+1} - 1$ calculamos as iteradas da função $F_{e,b}$, até obtermos uma k-ésima iterada tal que $F^k_{e,b}(m) \in D_{e,b}$ (Corolário 2.9). Em seguida, verificamos por inspeção se o número $F^k_{e,b}(m)$ é (e, b)-feliz. Se $F^k_{e,b}(m)$ for (e, b)-feliz, então todos os números da sequência

$$m,\, F_{e,b}(m),\, F^2_{e,b}(m), \ldots, F^k_{e,b}(m)$$

também são (e, b)-felizes, de acordo com o Teorema 2.7. Em particular, o inteiro m é (e, b)-feliz.

Exemplo 2.10 *Vejamos como utilizar o método descrito acima para aferir se um número é $(4,\, 3)$-Feliz. Primeiramente, verificamos, usando um programa computacional, quais são os números felizes no conjunto $D_{4,3}$. Ou seja, quais inteiros inteiros positivos menores que $3^{4+1} - 1 = 242$ são $(4,\, 3)$-felizes. São eles:*

$$1,\ 3,\ 9,\ 13,\ 27,\ 31,\ 37,\ 39,\ 81,\ 85,\ 91,\ 93,\ 109,\ 111,\ 117.$$

Os demais números do conjunto $D_{4,3}$ são $(4,\, 3)$-tristes. Agora, para saber se um número $m > 242$ é $(4,\, 3)$-feliz ou $(4,\, 3)$-triste, calculamos as iterações da função $F^k_{4,3}(m)$ até obtermos uma k-ésima iteração que satisfaça $F^k_{4,3}(m) \in D_{4,3}$ e verificamos se esse valor é um número $(4, 3)$-feliz ou $(4,\, 3)$-triste, por inspeção. Seja $m = 349$. Calculando as iterações de $F_{4,3}$ sobre 349, obtemos:

$$F^1_{4,3}(349) = F_{4,3}([110221]_3) = 35.$$

Na primeira iteração, como 35 é um número $(4,\,3)$*-triste pertencente ao conjunto* $D_{4,3}$*, concluímos que 349 também é um número* $(4,3)$*-triste, pelo Teorema* 2.7*.*

Agora, calculando as iterações para 485, teríamos os seguintes resultados:

$$F^1_{4,3}(485) = F_{4,3}([122222]_3) = 81.$$

Observe que, já na primeira iteração, temos como resultado um número $(4,\,3)$*-feliz pertencente ao conjunto* $D_{4,3}$*. Logo, concluímos que 485 também é um número* $(4,3)$*-feliz, novamente pelo Teorema* 2.7*.* ♢

O próximo resultado (veja Exemplo 2.8 em Mata e Veloso (2023)), descreve como utilizar o método para verificar que todo número é $(2,4)$-feliz.

Teorema 2.11 *Na base 4, todo número é* $(2,4)$*-feliz.*

Prova. É uma consequência direta do método descrito, após o Corolário 2.9, para verificar se um número é $(e,\,b)$-feliz. Seja

$$D_{2,4} = \{1,\,2,\ldots,63 = 4^{2+1} - 1\}.$$

Agora, precisamos determinar quais elementos do conjunto $D_{2,4}$ são felizes. Utilizando um simples programa computacional, verificamos que todos os elementos de $D_{2,4}$ são felizes. O resultado segue pelo Teorema 2.7 e Corolário 2.9. □

Observamos que para certos expoentes existem números $(e,4)$-tristes. Por exemplo, para $e = 3$, temos que $F_{3,4}(15) = 54$, $F^2_{3,4}(15) = 36$ e

$$F^k_{3,4}(15) = 9 \text{ para todo } k \geq 3.$$

Portanto, podemos concluir que o número 15 é $(3,4)$-triste.

3 PONTOS FIXOS

Nesta seção, abordaremos os pontos fixos da função felicidade $F_{e,b}$. O principal resultado, detalhado no Teorema 3.4, demonstra que podemos encontrar esses pontos fixos resolvendo uma equação diofantina sobre um subconjunto específico dos números inteiros positivos.

Um inteiro positivo n é chamado de **ponto fixo** da função (e,b)-feliz quando

$$F_{e,b}(n) = n.$$

É imediato que 1 é um ponto fixo para qualquer função (e,b)-feliz.

Exemplo 3.1 *O número 273 é ponto fixo da função* $(4, 8)$*-feliz. De fato,*

$$F_{4,8}(273) = F_{4,8}([421]_8) = 4^4 + 2^4 + 1^4 = 256 + 16 + 1 = 273.$$

$\diamondsuit$

Nos seguintes exemplos escrevemos um pequeno programa no *Octave*, para exibir os pontos fixos da função $F_{e,b}$.

O *Octave* é um *software* gratuito e uma linguagem de programação de alto nível, ideal para realizar cálculos numéricos e experimentos matemáticos computacionais.

Exemplo 3.2 *O número 13 é ponto fixo da função* $F_{2,5}$*. De fato,*

$$F_{2,5}(13) = F_{2,5}([23]_5) = 2^2 + 3^2 = 13.$$

A função $F_{2,5}$ *tem mais dois pontos fixos. São eles:* 1 *e* 18*. De fato,*

$$F_{2,5}(1) = F_{2,5}([1]_5) = 1^2 = 1$$

e

$$F_{2,5}(18) = F_{2,5}([33]_5) = 3^2 + 3^2 = 18.$$

$\diamondsuit$

Exemplo 3.3 *A função* $F_{2,27}$ *tem pontos fixos diferentes do número 1. Por exemplo, o número 90. Observe que*

$$F_{2,27}(90) = F_{2,27}([39]_{27}) = 3^2 + 9^2 = 90.$$

$\diamondsuit$

Teorema 3.4 *Os pontos fixos da função* $F_{e,\,b}$ *são os números*

$$[a_e a_{e-1} \dots a_1 a_0]_b = a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

que satisfazem

$$a_e^e + a_{e-1}^e + \cdots + a_2^e + a_1^e + a_0^e = a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Prova. Segue do Teorema 2.8 que os pontos fixos da função $F_{e,\,b}$ pertencem ao conjunto $\{1, 2, \dots, b^{e+1} - 1\}$. Visto que

$$b^{e+1} - 1 = (b-1)b^e + (b-1)b^{e-1} + \cdots + (b-1)b + (b-1),$$

temos que os possíveis pontos fixos possuem, no máximo, $(e+1)$-dígitos na base b. Logo, se m é um ponto fixo, então m é da forma

$$[a_e a_{e-1} \dots a_1 a_0]_b = a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0, \tag{1}$$

onde $0 \leq a_i \leq b-1$, $i = 0, \dots, e$. Como $F_{e,\,b}(m) = F_{e,\,b}([a_e a_{e-1} \dots a_1 a_0]_b) = a_e^e + a_{e-1}^e + \cdots + a_2^e + a_1^e + a_0^e$ e m é ponto fixo, obtemos

$$a_e^e + a_{e-1}^e + \cdots + a_2^e + a_1^e + a_0^e = a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0. \tag{2}$$

Portanto, os pontos fixos da função $F_{e,\,b}$ são da forma (1) e satisfazem (2). □

Exemplo 3.5 *Determinar os pontos fixos da função $F_{3,5}$ é equivalente a determinar as soluções da equação:*

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 5^3 x + 5^2 y + 5z + w,$$

onde $0 \leq x, y, z, w \leq 4$. Resolvendo a equação, com nosso programa, obtemos as seguintes soluções: $(0,0,0,1)$, $(0,1,0,3)$, $(0,4,3,3)$. Logo, os três pontos fixos da função $F_{3,5}$ são

$$1 = [1]_5, \quad 28 = [103]_5, \text{ e } 118 = [433]_5.$$

♢

Exemplo 3.6 *Determinando os pontos fixos da função $F_{6,\,5}$. Note que, pelo Teorema 3.4, os pontos fixos dessa função são as soluções da seguinte equação:*

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 + g^6 = 5^6 a + 5^5 b + 5^4 c + 5^3 d + 5^2 e + 5f + g.$$

Com auxílio computacional, verificamos que os pontos fixos da função $F_{6,\,5}$ são

$$1 = [1]_5, \quad 4890 = [124030]_5, \quad 4891 = [124031]_5 \text{ e } 9113 = [242423]_5.$$

♢

Exemplo 3.7 *Determinando os pontos fixos da função $F_{8,\,3}$. Observe que, pelo Teorema 3.4, todos pontos fixos dessa função satisfazem a equação*

$$x_8^8 + x_7^8 + \cdots + x_2^8 + x_1^8 + x_0^8 = 3^8 x_8 + 3^7 x_7 + \cdots + 3^3 x^3 + 3^2 x_2 + 3x_1 + x_0.$$

Com auxílio computacional, verificamos que os pontos fixos da função $F_{8,\,3}$ são

$$1 = [1]_3, \quad 258 = [100120]_3 \text{ e } 259 = [1000121]_3.$$

♢

4 NÚMERO DE PONTOS FIXOS

O objetivo desta seção é abordar a quantidade de pontos fixos da função $F_{2,b}$. A principal referência é a terceira seção do artigo de Beardon (1998). O principal resultado do artigo de Alan Beardon assegura que o número de pontos fixos é igual ao número de divisores do inteiro $1+b^2$ menos um (veja Teorema 4.3). Nosso trabalho acrescenta exemplos e um resultado interessante que, em certos casos, relaciona o número de pontos fixos com os números de Mersenne.

Em virtude do Teorema 2.5 (Beardon, 1998), para determinar os pontos fixos da função $F_{2,b}$, precisamos resolver a equação polinomial

$$x^2 + y^2 = xb + y. \tag{3}$$

Utilizando recursos computacionais verificamos quais pontos (x, y), onde $0 \leq x, y \leq b-1$, satisfazem a equação 3. É possível reduzir o intervalo de variação de y para $1 < y < 1 + \frac{b}{2}$, como mostra o próximo resultado.

Teorema 4.1 *Seja $[xy]_b$ um ponto fixo na base $b \geq 2$. Se $x \neq 0$, então $1 < y < 1 + \frac{b}{2}$.*

Prova. Veja o Teorema 3.5 do artigo de Mata e Veloso (2023). □

Contudo, queremos contar o número de pontos fixos. Com esse objetivo, completando quadrados, podemos reescrever a equação 3 da seguinte forma:

$$(2y-1)^2 + (2x-b)^2 = 1 + b^2. \tag{4}$$

Assim, para determinar quantos são os pontos fixos da função $F_{2,b}$, precisamos encontrar todas as maneiras de expressar $1 + b^2$ como uma soma de dois quadrados. De forma mais precisa, o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é igual à cardinalidade do conjunto

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq x,\ y \leq b-1 \text{ e } (2y-1)^2 + (2x-b)^2 = 1 + b^2\}.$$

Desse modo, o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é igual ao número de maneiras distintas de expressar $b^2 + 1$ como a soma de dois quadrados. Esse resultado é bem conhecido na literatura; por exemplo, pode ser encontrado no livro *An introduction to the theory of numbers* (Hardy; Wright, 1960).

Antes do resultado principal da seção, precisamos da seguinte notação: Dado um inteiro positivo, vamos denotar por $d(n)$ o número de seus divisores naturais. É fácil ver que a quantidade de divisores de um número natural n é o produto dos sucessores de todos os expoentes de seus fatores primos de sua decomposição fatorial. Sugerimos ao leitor, interessado no assunto, que consulte o capítulo 4 do livro de Lacerda (2014).

Exemplo 4.2 *Se quisermos encontrar o número de divisores naturais de 360, por exemplo, primeiramente temos que decompor o 360 em fatores primos,* $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ *e depois somar uma unidade ao expoente de cada fator e fazemos o produto desses valores. Assim,* $d(360) = (3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$*. Portanto, o número de divisores naturais de 360 é 24.* $\diamondsuit$

Existe uma fórmula para o número de pontos fixos da função feliz $F_{2,b}$, conforme apresentado no próximo resultado.

Teorema 4.3 (Teorema 3.1, Beardon (1998)) *O número de pontos fixos da função* $F_{2,b}$ *é igual a* $d(1+b^2) - 1$*.*

Vamos denotar o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ por $fix(b)$. Logo,

$$fix(b) = d(1+b^2) - 1.$$

Exemplo 4.4 *Determinando o número de pontos fixos na base 5, temos:*

$$fix(5) = d(1+5^2) - 1 = d(26) - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Logo, na base 5 existem exatamente 3 pontos fixos. É possível determinar esses pontos fixos resolvendo a equação diofantina

$$x^2 + y^2 = 5x + y,$$

onde $0 \leq x,\, y \leq 4$*. Utilizando nosso programa, obtemos as seguintes soluções:* $(0,1)$*,* $(2,3)$ *e* $(3,3)$*. Logo, os três pontos fixos da função* $F_{2,5}$ *são* $1 = [1]_5$*,* $13 = [23]_5$ *e* $18 = [33]_5$*.* $\diamondsuit$

Exemplo 4.5 *Neste exemplo vamos encontrar todos os pontos fixos da função* $F_{2,7}$*. Para isso, iremos resolver a equação*

$$x^2 + y^2 = 7x + y.$$

Resolvendo, também de maneira computacional, encontramos as seguintes soluções: $(0,1)$*,* $(1,3)$*,* $(3,4)$*,* $(4,4)$ *e* $(6,3)$*.*
Portanto, os cinco pontos fixos da função $F_{2,7}$ *são:* $1 = [1]_7$*,* $10 = [13]_7$*,* $25 = [34]_7$*,* $32 = [44]_7$ *e* $45 = [63]_7$*.* $\diamondsuit$

O próximo resultado (Lebesgue, 1850) nos permite deduzir diversas consequências interessantes do Teorema 4.3.

Lema 4.6 (Lebesgue (1850)) *Seja* $m > 1$ *um inteiro. Então, não existem inteiros positivos* x *e* y *tais que*

$$1 + y^2 = x^m.$$

Corolário 4.7 (Corolário 3.2, Beardon (1998)) *A função $F_{2,b}$ tem um único ponto fixo se, e somente se, $1+b^2$ é um número primo.*

Prova. Observe que um inteiro maior que 1 tem dois divisores se, e somente se, for um número primo. Logo, $1+b^2$ é um número primo, se e somente se, tem dois divisores. Segue do Teorema 4.3 que o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é dado por:

$$fix(b) = d(1+b^2) - 1.$$

Visto que $d(1+b^2) = 2$, obtemos

$$fix(b) = 2 - 1 = 1,$$

o que verifica o resultado. □

Exemplo 4.8 *Não existe nenhuma base tal que $F_{2,b}$ tenha 8 pontos fixos. Para que $fix(b) = 8$, ou seja, para que tenhamos 8 pontos fixos distintos, $1+b^2 = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ deve ter 9 divisores naturais, ou seja, $(1+\beta_1)\cdot(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n) - 1 = 8$. Logo, $(1+\beta_1)\cdot(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n) = 9$ e isso ocorre se, e somente se, $n = 1$ e $\beta_1 = 8$ ou $n = 2$, $\beta_1 = 2$ e $\beta_2 = 2$.*

Para o primeiro caso, teremos $1+b^2 = p^8$ e essa possibilidade não é válida, pois se $1+b^2 = p^8$, então $p^8 - b^2 = 1$. Logo, $(p^4+b)\cdot(p^4-b) = 1$ e, como p e b são naturais, a única possibilidade que temos é que $p^4+b = 1$ e $p^4-b = 1$. Isso implica que $p = 1$ e $b = 0$, o que é impossível, pois p é primo e $b \geq 2$ ou $p = 0$ e $b = 1$, que também é impossível pelo mesmo fato.

Para o segundo caso, teremos $1+b^2 = p^2 \cdot q^2 = (pq)^2$ e, de maneira análoga ao primeiro caso, essa possibilidade também não é válida, pois se $1+b^2 = (pq)^2$, então $(pq)^2 - b^2 = 1$. Logo, $(pq+b)\cdot(pq-b) = 1$ e, como p e b são naturais, a única possibilidade que temos é que $pq+b = 1$ e $pq-b = 1$. Isso implica que $pq = 1$ e $b = 0$, o que é impossível, pois p e q são primos e $b \geq 2$ ou $pq = 0$ ou e $b = 1$, que também é impossível pelo mesmo fato.

Portanto, em nenhuma base haverá 8 pontos fixos distintos. ♢

Corolário 4.9 (Teorema 3.5, Beardon (1998)) *Seja $b \geq 2$. Então a função $F_{2,b}$*

1. *tem 3 pontos fixos se, e somente se, $1+b^2 = pq$, onde p e q são primos distintos;*

2. *tem 5 pontos fixos se, e somente se, $1+b^2 = pq^2$ onde p e q são primos distintos;*

3. *tem 7 pontos fixos se, e somente se, $1+b^2 = pq^3$ ou $1+b^2 = pqr$ onde p e q são primos distintos;*

4. *tem 9 pontos fixos se, e somente se, $1+b^2 = pq^4$ onde p e r são primos distintos.*

Prova. Decompondo $1+b^2$ em fatores primos, temos

$$1+b^2 = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n},$$

onde os primos p_i satisfazem $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ e $\beta_j \geq 1$ para cada j. Assim, baseado no Teorema 4.3, podemos afirmar que

$$fix(b) = (1+\beta_1) \cdot (1+\beta_2) \cdots (1+\beta_n) - 1.$$

Prova do item $4)$. Observe que $fix(b) = 9$ se, e somente se,

$$(1+\beta_1) \cdot (1+\beta_2) \cdots (1+\beta_n) = 10.$$

Isso só é possível se $n = 1$ e $\beta_1 = 9$ ou $n = 2$, $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 4$. Note que a primeira possibilidade implica $1+b^2 = p^9$, contrariando o Lema 4.6. Portanto, a única possibilidade para $fix(b) = 9$ é $1+b^2 = pq^4$.

Os itens 1, 2 e 3 podem ser verificados de maneira análoga ao item 4. □

Exemplo 4.10 *Seja $b = 38$, então $1+b^2 = 1+38^2 = 1445 = 5 \cdot 17^2$ e temos 5 pontos fixos. Isto é coerente com o caso 2 do Corolário 4.9. Usando um programa computacional podemos encontrar esses cinco pontos fixos. São eles:*

$$1 = [1]_{38}, \quad 85 = [29]_{38}, \quad 320 = [8G]_{38} \quad, 1156 = [KG]_{38}, \text{ e } 1377 = [L9]_{38},$$

onde $G = 16$, $K = 30$ e $L = 36$. ♢

Corolário 4.11 *Não existe base, $b \geq 2$, tal que a função $F_{2,b}$ tenha 2 pontos fixos.*

Prova. Para que $fix(b) = 2$, ou seja, para que tenhamos somente dois pontos fixos, $1+b^2 = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ deve ter 3 divisores naturais, ou seja, $(1+\beta_1) \cdot (1+\beta_2) \cdots (1+\beta_n) = 3$ e isso ocorre se, e somente se, $n = 1$ e $\beta_1 = 2$. Para essa única possibilidade, teremos $1+b^2 = p^2$ e essa possibilidade não é válida, em virtude do Lema 4.6.

□

O próximo resultado relaciona o número de pontos fixos, em certas bases, com os números de Mersenne, M_n. Um número inteiro não negativo é dito um número de Mersenne se é da forma $M_n = 2^n - 1$. Existe uma grande variedade de questões relacionadas aos números de Mersenne na literatura, o que torna o resultado interessante. Os $(n+1)$-primeiros termos da sequência dos números de Mersenne são:

$$\{0,\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ 255,\ 511,\ 1.023,\ 2.047,\ 4.095,\ 8.191,\ 16.383,\ 32.767, \ldots,\ 2^n - 1\}.$$

Teorema 4.12 *Seja $b \geq 2$ e $1 + b^2 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$. Então o número de pontos fixos da função $F_{2,\,b}$ é um número de Mersenne se, e somente se, cada β_i é um número de Mersenne.*

Prova. Suponha que o número de pontos fixos da função $F_{2,\,b}$ é um número de Mersenne, $fix(b) = 2^n - 1$. Seja $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ a decomposição de $1 + b^2$ em fatores primos. Segue do Teorema 4.3 que

$$2^n - 1 = fix(b) = d(1 + b^2) - 1 = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1) - 1.$$

Ou seja,

$$2^n = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1).$$

Isso implica que $\beta_i + 1 = 2^{r_i}$, para cada $i = 1, \ldots, k$, tal que $r_1 + \cdots r_k = n$. Portanto, cada $\beta_i = 2^{r_i} - 1$ é um número de Mersenne.

Agora, suponha que

$$1 + b^2 = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_k},$$

onde $\beta_i = 2^{r_i} - 1$ é um número de Mersenne, para cada $i = 1, \ldots k$. Segue do Teorema 4.3 que

$$(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1) - 1$$

é o número de pontos fixos de $F_{2,\,b}$. Então,

$$\begin{aligned} fix(b) = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1) - 1 =& (2^{r_1} - 1 + 1)(2^{r_2} - 1 + 1) \ldots (2^{r_k} - 1 + 1) - 1 \\ =& 2^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdots 2^{r_k} - 1 \\ =& 2^R - 1, \end{aligned}$$

onde $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_k \in \mathbb{N}$. Portanto, o número de pontos fixos de $F_{2,\,b}$ é um número de Mersenne.

$\square$

Exemplo 4.13 *Considere que $1 + b^2 = 5^3 \cdot 37^1$. Note que os expoentes dos fatores primos, 3 e 1, são números de Mersenne, pois $3 = 2^2 - 1$ e $1 = 2^1 - 1$. O número de pontos fixos para a base b é dado por:*

$$fix(b) = d(1 + b^2) - 1 = (3 + 1) \cdot (1 + 1) - 1 = 4 \cdot 2 - 1 = 8 - 1 = 2^3 - 1,$$

o que também é um número de Mersenne. Resolvendo a equação $1 + b^2 = 5^3 \cdot 37^1$, encontramos $b = 68$. Portanto, o número de pontos fixos de $F_{2,\,68} = 2^3 - 1$. $\diamondsuit$

Exemplo 4.14 *Seja $1 + b^2 = 2^1 \cdot 5^3 \cdot 13^1$. Observe que os expoentes dos fatores primos, 1 e 3, são números de Mersenne, pois $1 = 2^1 - 1$ e $3 = 2^2 - 1$. O número de pontos fixos para a base b é dado por:*

$$fix(b) = d(1 + b^2) - 1 = (1 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (1 + 1) - 1 = 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 = 16 - 1 = 2^4 - 1,$$

que também é um número de Mersenne. Ao resolver a equação $1+b^2 = 2^1 \cdot 5^3 \cdot 13^1$, encontramos $b = 57$. Logo, o número de pontos fixos de $F_{2,57}$ é igual a $M_4 = 2^4 - 1$. ♢

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho explorou a função (e, b)-feliz e seus pontos fixos, verificando que determiná-los equivale a resolver uma equação diofantina em um intervalo específico dos inteiros positivos. Em virtude do Teorema 4.3, que fornece uma fórmula para o número de pontos fixos de $F_{2,b}$, e de um resultado de Lebesgue (Teorema 4.6), obtivemos alguns resultados sobre a quantidade de pontos fixos em qualquer base $b \geq 2$, em função da decomposição em fatores primos de $1 + b^2$.

Em particular, estabelecemos uma relação direta entre os expoentes da decomposição em fatores primos do inteiro $1 + b^2$ e o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$, provando que esses expoentes são números de Mersenne se, e somente se, o número de pontos fixos também é um número de Mersenne (Teorema 4.12). Como perspectiva futura, pretendemos investigar se é possível obter uma fórmula explícita para o número de pontos fixos da função $(3, b)$-feliz, estendendo assim os resultados aqui apresentados.

REFERÊNCIAS

BEARDON, Alan F. Sums of squares of digits. **The Mathematical Gazette**, v. 82, n. 495, p. 379–388, 1998. DOI: `https://doi.org/10.2307/3619884`.

COSTA, Eudes Antonio; CARVALHO, Fernando Soares de. Os pontos fixos da função feliz. **Professor de Matemática Online**, v. 13, n. 1, p. 93–105, 2025. DOI: `https://doi.org/10.21711/2319023x2025/pmo1307`.

GOMES, Alacyr José; COSTA, Eudes Antonio da; SANTOS, Ronaldo Antonio dos. Números perfeitos e primos de Mersenne. **Revista da Olimpíada**, IME, UFG, n. 7, p. 99–111, 2008.

GRUNDMAN, H. G.; TEEPLE, E. A. Generalized happy numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 39, n. 5, p. 462–466, 2001. Disponível em: `https://www.fq.math.ca/39-5.html`. Acesso em: 24 out. 2025.

HARDY, Godfrey Harold; WRIGHT, Edward Maitland. **An introduction to the theory of numbers**. [S.l.]: Oxford University Press, 1960.

LACERDA, José Carlos Admo. **Praticando a Aritmética**. [S.l.]: Gráfica e Editora Maia, 2014.

LEBESGUE, Victor Amédée. Sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^m = y^2 + I$. **Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, 1e série, 9, p. 178–181, 1850. Disponível em: https://www.numdam.org/item/NAM_1850_1_9__178_0/. Acesso em: 24 out. 2025.

MARTINS, Charles James Leite. **Algoritmo da Divisão de Euclides**: uma nova proposta de ensino de matemática na educação básica. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/items/2e3a04b8-3473-41f2-a4da-832ebd30f486. Acesso em: 24 out. 2025.

MATA, Rudney Carlos da; VELOSO, Marcelo Oliveira. Números felizes e pontos fixos. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, e3002, 2023. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6190.

ROCHA, Katiuce Fernandes. **Bases numéricas não usuais**: um breve estudo. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 29 abr. 2019. Disponível em: https://repositorio.ufgd.edu.br/jspui/handle/prefix/1375. Acesso em: 24 out. 2025.

RODRIGUES, Thiago Patrocínio. **Números felizes generalizados**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de São João del-Rei, Alto Paraopeba. Disponível em: https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat_cap/THIAGO_PATROCINIO_RODRIGUES.pdf. Acesso em: 24 out. 2025.

SOBRE OS AUTORES

Me. Luciano Rodrigues Coelho
https://orcid.org/0009-0004-8108-5583
http://lattes.cnpq.br/9483906877180475
Contato: lucrcoelho@gmail.com
Contribuição autoral: Escrita – primeira redação; escrita – revisão e edição; investigação; curadoria de dados; software; validação; visualização.

Dr. Marcelo Oliveira Veloso
https://orcid.org/0000-0002-2585-1210
http://lattes.cnpq.br/4008756490618057
Contato: veloso@ufsj.edu.br
Contribuição autoral: administração do projeto; análise formal; conceituação; escrita – revisão e edição; investigação; metodologia; supervisão; validação.

Dra. Gilcelia Regiane de Souza
https://orcid.org/0000-0002-9889-3366
http://lattes.cnpq.br/5960685665975498
Contato: gilcelia@ufsj.edu.br
Contribuição autoral: análise formal; escrita – revisão e edição; software; supervisão; validação; visualização.

Revisora de texto: Fabiana Oliveira Veloso da Rocha Lima