UMA BASE PARA A ÁLGEBRA QUÂNTICA DE TIPO E_6

A BASIS FOR THE QUANTUM ALGEBRA OF TYPE E_6

UNA BASE PARA EL ÁLGEBRA CUÁNTICA DE TIPO E_6

Vitória Gomes[1], Bárbara Pogorelsky[1]

[1] Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil.

Data de submissão: 30 set. 2024. Data de aprovação: 17 abr. 2025. Financiamento: os autores declaram não haver financiamento. Como citar: GOMES, Vitória; POGORELSKY, Bárbara. Uma base para a álgebra quântica de tipo E_6. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 11, p. e304, 29 jul. 2025. https://doi.org/10.35819/remat2025v11id7505.

Resumo: As álgebras quânticas, ou grupos quânticos, são álgebras de Hopf não comutativas e não cocomutativas. Neste trabalho consideramos a envolvente quântica de dimensão infinita obtida a partir da álgebra de Lie simples de tipo E_6. Inicialmente, fazemos a construção completa desta álgebra a partir das características da álgebra de Lie, que podem ser obtidas em sua matriz de Cartan. Uma vez obtidos os geradores, relações e parâmetros de quantização da álgebra, o objetivo é construirmos a sua base PBW, que possui extrema importância em muitas ferramentas utilizadas no estudo de álgebras de Hopf, como por exemplo, a determinação das subálgebras coideais, o cálculo do posto combinatório e até mesmo o estudo das representações.
Palavras-chave: base PBW; grupos quânticos; álgebras de Hopf.

Abstract: Quantum algebras, or quantum groups, are non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras. In this work we consider the infinite-dimensional quantum enveloping algebra obtained from the simple Lie algebra of type E_6. Initially, we make the complete construction of this algebra based on the characteristics of the Lie algebra, which can be obtained from its Cartan matrix. Once the generators, relations and quantization parameters of the algebra are obtained, the purpose is to construct its PBW base, which is extremely important in many tools used in the study of Hopf algebras, such as, for example, the determination of coideal subalgebras, the calculation of the combinatorial rank and even the study of its representations.
Keywords: PBW-basis; quantum groups; Hopf algebras.

Resumen: Las álgebras cuánticas, o grupos cuánticos, son álgebras de Hopf no conmutativas y no coconmutativas. En este trabajo consideramos la envolvente cuántica de dimensión infinita obtenida a partir del álgebra de Lie simple de tipo E_6. Inicialmente realizamos la construcción completa de esta álgebra con base en las características del álgebra de Lie, las cuales se pueden obtener de su matriz de Cartan. Una vez obtenidos los generadores, relaciones y parámetros de cuantificación del álgebra, el objetivo es construir su base PBW, la cual es sumamente importante en muchas herramientas utilizadas en el estudio de las álgebras de Hopf, como, por ejemplo, la determinación de subálgebras coideales, el cálculo del rango combinatorio y incluso el estudio de representaciones.
Palabras clave: base PBW; grupos cuánticos; álgebras de Hopf.

1 INTRODUÇÃO

Uma álgebra de Hopf é uma álgebra sobre um corpo com estrutura dual de coálgebra, além de uma condição de compatibilidade entre estas estruturas e uma aplicação chamada antípoda que satisfaz determinadas condições. Dizemos que uma álgebra de Hopf é um grupo quântico ou álgebra quântica, se ela for não comutativa como álgebra e não cocomutativa como coálgebra. A família $U_q^+(\mathfrak{g})$ de envolventes quânticas de álgebras de Lie simples $\mathfrak{g}$ representa o exemplo mais importante de grupos quânticos. Existem muitos resultados para os casos em que $\mathfrak{g}$ é de tipo A_n, B_n, C_n e D_n e alguns para tipo G_2 e F_4, no entanto os casos E_6, E_7 e E_8 praticamente ainda não foram estudados em suas particularidades.

Dada uma álgebra A, podemos dizer de maneira simplificada que um conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ é uma base de Poincaré-Birkoff-Witt para A se o conjunto formado pelos elementos $w_1^{n_1} \ldots w_t^{n_t}$ é uma base para esta álgebra. Com isto, podemos obter bases finitas para álgebras de dimensão infinita, ou pelo menos diminuir muito o número de elementos da base, caso os expoentes n_i tenham alguma limitação e a dimensão seja finita. O objetivo deste trabalho é encontrar uma base PBW finita para a álgebra $U_q^+(E_6)$, que possui dimensão infinita. Com isso, possibilitamos a continuação de estudo de diversas propriedades destas álgebras que podem ser obtidas a partir de bases PBW, como por exemplo o posto combinatório.

Nas primeiras seções introduzimos os conceitos e resultados necessários, utilizando como referência principal Kharchenko (2015). A partir da seção 8 tratamos especificamente da álgebra $U_q^+(E_6)$, concluindo o trabalho com a obtenção da base PBW desejada.

2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito de variáveis, denominado **alfabeto**, onde cada variável deste conjunto é chamada **letra**. Uma **palavra** será uma lista ordenada de letras de X. Dadas duas palavras em letras do alfabeto X, fazemos o produto entre elas utilizando o **produto concatenação**, ou seja, o produto de duas palavras $u = u_1u_2 \ldots u_n$ e $v = v_1v_2 \ldots v_m$ é dado por $uv = u_1u_2 \ldots u_nv_1v_2 \ldots v_m$. Ao longo deste trabalho $\mathbb{K}$ denotará um corpo qualquer, sem restrições quanto à sua característica.

Definição 2.1. Se $w = uv$, dizemos que a palavra u é um **começo** de w e v é um **final** de w.

Definição 2.2. O **comprimento** $L(u)$ de uma palavra u é definido como o número de letras de u.

Exemplo 2.3. Se $u = x_1x_2x_2$ então $L(u) = 3$.

Dado $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um alfabeto, fixaremos a ordem entre as letras deste alfabeto, sendo $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_{n-1} > x_n$. Utilizaremos a **ordem lexicográfica** para compararmos duas palavras, isto é, dadas u e v palavras distintas, comparamos cada letra da esquerda para a direita, a palavra maior será a palavra que tem a primeira letra distinta maior nesta comparação. No caso em que uma palavra seja o começo de outra, a palavra de menor comprimento será a maior.

Exemplo 2.4. Dadas as palavras $u = x_1x_2$, $v = x_1x_2x_1$ e $w = x_1x_2x_2$, temos que, $u > v > w$.

Definição 2.5. Dizemos que uma palavra u é uma **palavra standard** se para quaisquer duas palavras não nulas u_1 e u_2 onde $u = u_1u_2$, temos que $u > u_2u_1$.

Exemplo 2.6. Dadas as palavras $u = x_1x_2^2x_3$ e $v = x_1x_3x_1x_2$, temos que u é standard e v é não standard. Note que v pode ser escrita como $v = v_1v_2$, sendo $v_1 = x_1x_3$ e $v_2 = x_1x_2$. Assim, temos

$$v_2v_1 = x_1x_2x_1x_3 > x_1x_3x_1x_2 = v.$$

Definição 2.7. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e X um conjunto de variáveis. A **álgebra livre** $\mathbb{K}\langle X\rangle$, consiste de polinômios de variáveis não comutativas, que podem ser expressos por combinações lineares formais $\sum_i k_iv_i$ de palavras em letras do conjunto X, com o produto concatenação.

Definição 2.8. A **constituição** de uma palavra u em $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma família ordenada de inteiros não negativos $\{m_i \mid x_i \in X\}$ tais que u possui m_i ocorrências de x_i.

Exemplo 2.9. Dado $X = \{x_1, x_2\}$, se $u = x_2^2x_1x_2$ temos que, $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$, então a constituição de u é $\{1, 3\}$.

Fixada a ordem total $>$ em X, sendo $x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n > \ldots$, tomamos Γ^+ o monóide aditivo livre (comutativo) gerado por X. O monoide Γ^+ é completamente ordenado com relação à seguinte ordem:

$$m_1x_{i_1} + m_2x_{i_2} + \cdots + m_kx_{i_k} > m_1'x_{i_1} + m_2'x_{i_2} + \cdots + m_k'x_{i_k}$$

se o primeiro número diferente de zero da esquerda em $(m_1 - m_1', m_2 - m_2', \ldots, m_k - m_k')$ for positivo, onde $x_{i_j} \in X$ e $x_{i_1} > x_{i_2} > \cdots > x_{i_k}$.

Definição 2.10. O **grau** de uma palavra u é dado por $D(u) = \sum_{x\in X} m_x x \in \Gamma^+$, onde $\{m_x \mid x \in X\}$ é a constituição de u. Se $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, com $\alpha_i \neq 0$, definimos $D(f) = max\{D(u_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Exemplo 2.11. No exemplo 2.9 a constituição de u é $\{1, 3\}$, então o seu grau é $D(u) = 1x_1 + 3x_2$.

Exemplo 2.12. Seja $f = x_1x_2x_1 + x_3x_1^2x_2^2 \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ um polinômio não comutativo. Tomando $u_1 = x_1x_2x_1$ e $u_2 = x_3x_1^2x_2^2$, temos que a constituição de u_1 é $\{2, 1, 0\}$ e a constituição de u_2 é $\{2, 2, 1\}$, então $D(u_1) = 2x_1 + 1x_2$ e $D(u_2) = 2x_1 + 2x_2 + 1x_3$. Logo, $D(u_2) > D(u_1)$, pois em $(2-2, 2-1, 1-0) = (0, 1, 1)$ o primeiro termo diferente de zero é positivo. Portanto $D(f) = D(u_2)$.

Para facilitar a escrita, como iremos trabalhar adiante com o conjunto X sendo finito, utilizaremos $(\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ como o grau da palavra y, onde ∂_i é a constante associada a variável x_i no grau de y. Note ainda que a soma $\partial_1 + \partial_2 + \cdots + \partial_n$ é exatamente o comprimento da palavra y. Neste caso, temos que o grau de u do exemplo anterior é (1, 3) e o seu comprimento é 4.

Definição 2.13. Um polinômio $f = \sum_i a_iv_i$ é **homogêneo** se todas as palavras v_i têm mesmo grau.

3 ÁLGEBRAS DE HOPF DE CARACTERES

O objetivo desta seção é definir as álgebras de Hopf de caracteres, em particular a skew álgebra de grupo $H = G\langle X\rangle$, uma vez que as quantizações que serão definidas adiante são quocientes desta.

Definição 3.1. Uma função $\chi : G \to \mathbb{K}\backslash\{0\}$ é dita um **caracter** do grupo G se χ é um homomorfismo de grupos.

Definição 3.2. Seja H uma álgebra de Hopf qualquer. Um elemento $a \in H$ é dito **semi-invariante** sobre $G \subseteq H$ se ag e ga são proporcionais para todo $g \in G$, isto é, $ag = \lambda ga$, com $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definição 3.3. Uma álgebra de Hopf H é dita uma **álgebra de Hopf de caracteres** se o grupo G de todos elementos group-likes é comutativo e H é gerado sobre $\mathbb{K}G$ por skew-primitivos semi-invariantes a_i, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, isto é:

$$\Delta(a_i) = a_i \otimes 1 + g_i \otimes a_i, g_i \in G \quad e \quad ga_ig^{-1} = \chi^i(g)a_i, g \in G,$$

onde χ^i, $i \in I$, são caracteres do grupo G.

Definição 3.4. Dizemos que $x \in H$ é uma **variável quântica** se um elemento g de um grupo abeliano $G \subseteq H$ e um caracter $\chi : G \to \mathbb{K}\backslash\{0\}$, que serão denotados por g_x e χ^x, estão associados a x. Um **polinômio quântico** é um polinômio em variáveis quânticas.

Observação 3.5. Se $u = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_l}$ então $g_u = g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_l}$. Se v é uma palavra em variáveis quânticas, isto é, $v = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$, onde cada x_{i_j} é uma variável quântica, temos que $\chi^v(g_u) = \chi^{x_{i_1}}(g_u)\chi^{x_{i_2}}(g_u)\ldots\chi^{x_{i_k}}(g_u)$.

Notação 3.6. Denotaremos $\chi^v(g_u)$ por $p(u,v) = p_{uv}$, onde u, v são palavras em variáveis quânticas.

Definição 3.7. Definimos a ação de um grupo abeliano G sobre a álgebra livre $\mathbb{K}\langle X\rangle$, por $g_i a_j g_i^{-1} = \chi^j(g_i)a_j$, onde a_j é um monômio arbitrário de X, g_i um elemento do grupo G e χ^j é um caracter de X, com $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\mathbb{K}$ um corpo. A **skew álgebra de grupo** $G\langle X\rangle$ é uma álgebra definida pelos geradores $x_i \in X$, $g \in G$ e relações de comutação $g_i x_j = p_{ij} x_j g_i$.

A álgebra $G\langle X\rangle$ tem a estrutura natural de uma álgebra de Hopf de caracteres considerando

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i, \quad i \in I, \quad \Delta(g) = g \otimes g.$$

Definição 3.8. Definimos um **skew-comutador bilinear** sobre o conjunto de todas as palavras em variáveis quânticas pela fórmula:

$$[u, v] = uv - p_{uv} vu. \tag{1}$$

4 HIPER-LETRAS DURAS

Nesta seção iremos definir palavras não associativas e apresentar resultados necessários para utilizarmos hiper-letras duras. Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um alfabeto formado for variáveis quânticas, G o grupo abeliano gerado pelos elementos $g_1, \ldots, g_n$ associados aos elementos de X, e $H = G\langle X\rangle$ uma álgebra de Hopf de caracteres.

Definição 4.1. Uma **palavra não associativa** é uma palavra onde colchetes $[\,,\,]$ definem como deve ser aplicado o produto entre as letras desta palavra. Em nosso caso usaremos a definição do colchete dado em (1). Denotaremos por $[u]$ a palavra não associativa, e u a palavra associativa correspondente.

Exemplo 4.2. Dada a palavra associativa $u = x_1x_2x_3$, temos as seguintes possíveis palavras não associativas relacionadas

$$[u] = [x_1, [x_2, x_3]] \quad ou \quad [u] = [[x_1, x_2], x_3].$$

Observação 4.3. O comprimento e o grau de uma palavra não associativa $[u]$ é o comprimento e o grau da sua palavra associativa correspondente u.

Definição 4.4. O **conjunto de todas as palavras não associativas** é definido indutivamente por:

i) Todas as letras são palavras não associativas;

ii) Se $[u]$ e $[v]$ são palavras não associativas então $[w] = [[u],[v]]$ é uma palavra não associativa;

iii) Não existem outras palavras não associativas.

Definimos uma ordem natural para as palavras não associativas. Dadas palavras $[u]$ e $[v]$, temos que $[u] > [v]$ se, e somente se, $u > v$.

Definição 4.5. Dizemos que uma palavra não associativa $[u]$ é **standard** se:

i) A palavra u é standard;

ii) Se $[u] = [[u_1],[u_2]]$ então, $[u_1]$ e $[u_2]$ são palavras não associativas standard;

iii) Se $[u] = [[[u_1],[u_2]],[u_3]]$, então $u_2 \leq u_3$.

Exemplo 4.6. Entre as palavras não associativas obtidas no exemplo 4.2 temos que $[u] = [x_1,[x_2,x_3]]$ é standard mas $[u] = [[x_1,x_2],x_3]$ não é standard, pois $x_2 > x_3$.

Embora possam existir diferentes palavras não associativas provenientes de uma palavra associativa standard, quando exigimos que esta palavra não associativa também seja standard sempre existirá um único alinhamento possível. A prova deste resultado foi feita por A. I. Shirshov e pode ser encontrada em Shirshov (1958).

Teorema 4.7 (Teorema de Shirshov)**.** *Toda palavra standard u possui um único alinhamento de colchetes tal que a palavra não associativa $[u]$ é standard.*

Além da unicidade destas palavras não associativas standards, A. I. Shirshov apresenta como deve ser feito o alinhamento dos colchetes a partir de uma palavra associativa standard para que resulte em uma palavra não associativa standard. Os fatores v, w da decomposição não associativa $[u] = [[v],[w]]$ são palavras standards tais que $u = vw$ e v tem comprimento mínimo.

Exemplo 4.8. Seja $u = x_1^2x_3x_1x_2$, temos as seguintes opções para v e w:

1. Se $v = x_1$ e $w = x_1x_3x_1x_2$. Então w não é standard, pois $w = w_1w_2$ tal que $w_1 = x_1x_3$ e $w_2 = x_1x_2$, mas $w_2w_1 > w.$

2. Se $v = x_1^2$ e $w = x_3x_1x_2$, é fácil ver que w não é standard.

3. Se $v = x_1^2x_3$ e $w = x_1x_2$, ambas as palavras são standard. Como esta opção já cumpre com as exigências acima não há necessidade de continuar avaliando os outros casos, uma vez que, pelo Teorema de Shirshov, o alinhamento de colchetes standard relacionado a palavra associativa u é único.

Desta forma, temos que o alinhamento em que a palavra não associativa $[u]$ é standard é $[u] = [[v],[w]] = [[x_1^2x_3],[x_1x_2]]$. Seguindo este processo, podemos alinhar v e w como palavras não associativas standards resultando no alinhamento $[u] = [[x_1,[x_1,x_3]],[x_1,x_2]]$.

Definição 4.9. Uma **hiper-letra** é um polinômio que é uma palavra standard não associativa, onde os colchetes são definidos por (1). Uma palavra em hiper-letras é chamada de **hiper-palavra**.

Observação 4.10. Sejam $[u]$ e $[v]$ duas hiper-letras e $u = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_l}$ e $v = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}$ suas palavras associativas correspondentes, então p_{uv} será dado por,

$$p_{uv} = p_{i_1j_1}p_{i_1j_2}\dots p_{i_1j_k}p_{i_2j_1}p_{i_2j_2}\dots p_{i_2j_k}\dots p_{i_lj_1}p_{i_lj_2}\dots p_{i_lj_k}.$$

Corolário 4.11. *Cada palavra standard u define uma única hiper-letra $[u]$.*

Definição 4.12. Uma hiper-letra $[u]$ é dita **dura** na álgebra H se o seu valor em H não é uma combinação linear de valores de hiper-palavras do mesmo grau em hiper-letras menores do que $[u]$. Caso contrário, dizemos que $[u]$ é **suave** em H.

Proposição 4.13. *(Kharchenko, 1999, Corollary 2) Uma hiper-letra $[u]$ é dura em H se e somente se, o valor em H da palavra standard u não é uma combinação linear de palavras menores com o mesmo grau.*

Exemplo 4.14. Considerando a relação $[[x_1,x_2],x_2] = 0$ e seguindo a ordem já definida na álgebra de Hopf H, veremos que $[u] = [[[x_1,x_2],x_2],x_2]$ é uma hiper-letra suave. Desenvolvendo os colchetes, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}0 &= [[x_1,x_2],x_2] = [x_1,x_2]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[x_1,x_2] = (x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_2 - p_{12}p_{22}x_2(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)\\ &= x_1x_2^2 - (p_{12} + p_{12}p_{22})x_2x_1x_2 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1.\end{aligned}$$

Note que, $x_1x_2^2 = (p_{12} + p_{12}p_{22})x_2x_1x_2 - p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1$ e multiplicando por x_2 em ambos os lados temos,

$$x_1x_2^3 = (p_{12} + p_{12}p_{22})x_2x_1x_2^2 - p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1x_2.$$

Isto é, a palavra u é uma combinação linear de palavras menores com o mesmo grau. Assim, pela proposição anterior, a palavra $[u]$ é suave.

Observação 4.15. Note que, se uma hiper-letra é igual a zero, então ela não será dura. De fato, se $[u] = 0$, podemos escrever

$$[u] = u_1u_2\dots u_n + \alpha_j u_{j_1}u_{j_2}\dots u_{j_n} + \dots + \alpha_i u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_n} = 0,$$

com o grau de cada palavra associativa na soma igual ao grau de u, no qual a palavra associativa $u = u_1 u_2 \dots u_n$. Assim, temos $u_1 u_2 \dots u_n = \beta_j u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_n} + \dots + \beta_i u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_n}$, como u é standard, por ser uma hiper-letra, segue que cada palavra associativa do lado direito é menor que u. Portanto, temos que a palavra associativa u é uma combinação linear de palavras menores de mesmo grau, e pela Proposição 4.13, $[u]$ não é uma hiper-letra dura.

Proposição 4.16. *(Kharchenko, 2002, Lemma 4.8) Seja B um conjunto de hiper-letras contendo $x_1, \dots, x_n$. Se cada par $[u], [v]$ em B, com $u > v$, satisfaz uma das seguintes condições:*

i) $[[u], [v]]$ *não é uma palavra standard não associativa,*

ii) A hiper-letra $[[u], [v]]$ *não é dura em H,*

iii) $[[u], [v]] \in B$ *,*

então o conjunto B contém todas as hiper-letras duras em H.

5 BASES PBW

Definição 5.1. Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e B uma $\mathbb{K}$-subálgebra de A com uma base fixada $\{b_j \mid j \in J\}$. Um subconjunto totalmente ordenado $W \subseteq A$ é dito ser um conjunto de **geradores PBW** de A sobre B se existe uma função $h : W \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, chamada função altura, tal que o conjunto de todos os produtos

$$b_j w_1^{n_1} w_2^{n_2} \dots w_k^{n_k},$$

onde $j \in J$, $w_1 < w_2 < \dots < w_k \in W, 0 < n_i < h(w_i), 1 \leq i \leq k$ é uma base de A. O valor $h(w)$ é referido como a **altura** de w em W. Se $B = \mathbb{K}$ corpo base, então chamaremos W simplesmente como um conjunto de **geradores PBW de** A.

Definição 5.2. A **altura h** de uma hiper-letra dura [u] em H é definida como o menor número tal que:

i) p_{uu} é uma h-ésima raiz da unidade;

ii) O valor de $[u]^h$ em H é uma combinação linear de hiper-palavras do mesmo grau em hiper-letras menores que $[u]$.

Se não existir tal número dizemos que a altura é igual a infinito.

Teorema 5.3. *(Kharchenko, 1999, Theorem 2) Sejam H uma álgebra de Hopf de caracteres e G o grupo dos elementos group-likes de H. Os valores de todas hiper-letras duras em H junto com suas alturas formam um conjunto de geradores PBW para H sobre $\mathbb{K}G$.*

6 ORDEM CONVEXA

Nesta seção vamos definir a noção de base PBW convexa. Seja (V, c) um espaço vetorial trançado de $dim(V) = n$, no qual existe uma base $(x_i)_{i\in\mathbb{I}_n}$, $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, e uma matriz de trança $\mathbf{p} = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}_\theta}$. Sejam $\Delta^{\mathbf{p}}$ o sistema de raízes generalizado associado a $\mathbf{p}$ e $\Delta^{\mathbf{p}}_+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_M\}$ o subconjunto de raízes positivas. Sejam α_i, $i \in \mathbb{I}_n$, as raízes simples. Denotamos $x_{\alpha_i} = x_i$, $i \in \mathbb{I}_n$.

Definição 6.1. Considere um sistema de raízes $\Delta^{\mathbf{p}}_+$ com uma ordem total fixada $<$. Dizemos que esta ordem é uma **ordem convexa** se para quaisquer $\alpha, \beta \in \Delta^{\mathbf{p}}_+$, tais que $\alpha < \beta$ e $\alpha + \beta \in \Delta^{\mathbf{p}}_+$, nós temos

$$\alpha < \alpha + \beta < \beta.$$

Observação 6.2. Toda álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$ possui um sistema de raízes $\Delta^{\mathbf{p}}_+$ de forma que podemos fixar uma ordem convexa às suas raízes. Além disso, segundo I. Angiono, cada raiz simples α_i está associada a uma variável quântica $x_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ e cada raiz positiva β_i está associada a um gerador PBW l_{β_i} das álgebras de Hopf $U_q^+(\mathfrak{g})$ sobre $\mathbb{K}G$ de forma que se $\beta_i < \beta_j$ então $l_{\beta_i} < l_{\beta_j}$. Estes resultados são demonstrados e mais explorados em Angiono (2009).

No resultado a seguir é dada uma forma de associar as raízes positivas de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ a um conjunto de geradores PBW da álgebra de Hopf $U_q^+(\mathfrak{g})$, no qual l_β é a palavra associativa standard, que é um gerador PBW de $U_q^+(\mathfrak{g})$, associada a raiz positiva β.

Proposição 6.3. *(Angiono, 2009, Corolario 2.1.18) Para cada $\beta \in \Delta^p_+$, com $\beta \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,*

$$l_\beta = \textit{mín}\{l_{\delta_1} l_{\delta_2} : \quad \delta_1, \delta_2 \in \Delta^p_+,\ \delta_1 + \delta_2 = \beta,\ l_{\delta_1} > l_{\delta_2}\}.$$

Definição 6.4. Dizemos que uma base PBW é uma **base convexa** se a ordem das raízes associadas aos geradores PBW é convexa.

Note que nem sempre uma álgebra quântica possui apenas um conjunto convexo de geradores PBW, mesmo quando fixamos uma ordem para as raízes simples. No entanto, se supormos que os elementos são hiper-letras, temos apenas uma base convexa possível, a base gerada pelas hiper-letras duras como afirma a proposição seguinte.

Observação 6.5. Pelo Lemma 4.5 de Angiono (2015), se uma base PBW de hiper-letras é uma base convexa, então para quaisquer $[u], [v]$ nesta base, com $[u] > [v]$, temos que $[[u], [v]]$ é uma combinação linear de hiper-palavras da base $[w] = [w_1] \ldots [w_k]$, onde $[u] > [w_i] > [v]$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $[w_i]$ pertence a base PBW e $[w]$ tem mesmo grau de $[[u], [v]]$.

Seja B um conjunto de geradores PBW formado por hiper-letras. Na proposição a seguir mostramos uma importante relação entre as definições de hiper-letras duras e base convexa.

Proposição 6.6. *Seja B um conjunto de geradores PBW convexo formado por hiper-letras. Então B é constituído por hiper-letras duras.*

Demonstração. Seja B uma base PBW convexa de hiper-letras. Pela observação anterior e pela Definição 4.12, para todo par $[u], [v] \in B$, tal que $[u] > [v]$, temos que $[[u], [v]] \in B$ ou $[[u], [v]]$ não é dura. Ou seja, os itens (ii) ou (iii) da Proposição 4.16 são satisfeitos, logo B é constituído pelas hiper-letras duras.

□

7 GRUPOS QUÂNTICOS

Nesta seção definiremos os grupos quânticos $U_q^+(\mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples.

Definição 7.1. Uma **matriz de Cartan**, $C = (a_{ij})$, com $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, é uma matriz simetrizável (existe matriz diagonal D, tal que o produto de C por D resulta em uma matriz simétrica) associada a um sistema de raízes simples (ver Capítulo III de Humphreys (2012)), tal que $a_{ii} = 2, a_{ij} \leq 0, i \neq j$, e $a_{ij} = 0$ se, e somente se, $a_{ji} = 0$.

Exemplo 7.2. As matrizes $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ são matrizes de Cartan de tipo A_2, B_2 e G_2, respectivamente.

Definição 7.3. Seja $C = (a_{ij})$ uma matriz de Cartan simetrizável por $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$, isto é, $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$, e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Kac-Moody definida por C (ver Kac (2012, p. 6)). Suponha que os parâmetros de quantização p_{ij} são relacionados por

$$p_{ii} = q^{d_i}, \quad p_{ij}p_{ji} = q^{d_i a_{ij}}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{2}$$

onde q é um elemento do corpo $\mathbb{K}$ e $q^2 \neq 1$. A quantização $U_q^+(\mathfrak{g})$ da subálgebra de Borel $\mathfrak{g}^+$ é uma álgebra de Hopf de caracteres gerada por $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ e definida pelas seguintes relações de Serre com skew-comutador (1):

$$[[\ldots[[x_i, x_j], x_j], \ldots], x_j] = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

onde x_j aparece $1 - a_{ji}$ vezes. Isto é, $U_q^+(\mathfrak{g}) = \frac{G\langle X \rangle}{\mathrm{S}}$, com $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ e $\mathrm{S} = \langle [[\ldots[[x_i, x_j], x_j], \ldots], x_j] \rangle$ é o conjunto gerado pelos elementos das relações de Serre.

Exemplo 7.4. Utilizando as matrizes de Cartan do exemplo 7.2 vemos que as álgebras de Borel quânticas de tipo A_2, B_2 e G_2 são definidas por geradores x_1, x_2, g_1, g_2, no entanto, $U_q^+(A_2)$ possui relações $[[x_1, x_2], x_2] = 0 = [x_1, [x_1, x_2]]$ e parâmetros $p_{11} = p_{22} = q$, $p_{12}p_{21} = q^{-1}$, a álgebra $U_q^+(B_2)$ possui relações $[[[x_1, x_2], x_2], x_2] = 0 = [x_1, [x_1, x_2]]$ e $p_{11} = p_{22}^2 = q^2$, $p_{12}p_{21} =$

q^{-2} e, analogamente, $U_q^+(G_2)$ possui relações $[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], x_2] = 0 = [x_1, [x_1, x_2]]$ e $p_{11} = p_{22}^3 = q^3$, $p_{12}p_{21} = q^{-3}$. Em todos os casos, $q \in \mathbb{K}$.

Observação 7.5. Pelo Theorem 6.1 de Kharchenko (1998), temos que $[[\ldots[[x_i, x_j], x_j], \ldots], x_j]$, para $i, j \in I$, é um skew-primitivo em $G\langle X\rangle$. Portanto o ideal gerado por esses elementos é um ideal de Hopf.

Note que, como os grupos quânticos $U_q^+(\mathfrak{g})$ são definidos como um quociente da álgebra de Hopf de caracteres $G\langle X\rangle$ por um ideal de Hopf, a estrutura de álgebra de Hopf dada em 3.7 para $G\langle X\rangle$ será a mesma para $U_q^+(\mathfrak{g})$.

Observação 7.6. Como vimos na Observação 6.2, temos que as raízes positivas de $\mathfrak{g}$ com ordem convexa, podem ser relacionadas a palavras associativas standards que são geradores PBW das álgebras de Hopf $U_q^+(\mathfrak{g})$ sobre $\mathbb{K}G$. Utilizando o Teorema de Shirshov 4.7 conseguimos encontrar o alinhamento para estas palavras associativas de forma que seja uma hiper-letra, segundo I. Angiono estas hiper-letras também são geradores PBW de $U_q^+(\mathfrak{g})$. Mais ainda, pela Proposição 6.6, temos que o conjunto desses geradores (conjunto de geradores PBW convexo de hiper-letras) é constituído por hiper-letras duras. Mais informações podem ser encontradas em Angiono (2009, p. 28).

8 QUANTIZAÇÕES DE TIPO E_6

Nesta seção construiremos a álgebra de Borel quântica 7.3 de tipo E_6. Seja E_6 a álgebra de Lie simples associada à matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz acima é simétrica, desta forma uma matriz diagonal D que simetriza a matriz de Cartan é a matriz identidade I_6. Logo, podemos tomar $d_i = 1$, para $1 \leq i \leq 6$. Assim, usando as relações dadas em (2) e tendo que $a_{13} = a_{24} = a_{34} = a_{45} = a_{56} = -1$ e $a_{12} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{23} = a_{25} = a_{26} = a_{35} = a_{36} = a_{46} = 0$, com $a_{ij} = a_{ji}$, temos que os parâmetros de quantização são dados por

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{44} = p_{55} = p_{66} = q, \qquad p_{12}p_{21} = p_{23}p_{32} = p_{34}p_{43} = p_{36}p_{63} = p_{45}p_{54} = q^{-1},$$
$$p_{13}p_{31} = p_{14}p_{41} = p_{15}p_{51} = p_{16}p_{61} = p_{24}p_{42} = p_{25}p_{52} = p_{26}p_{62} = p_{35}p_{53} = p_{46}p_{64} = p_{56}p_{65} = q^0 = 1.$$

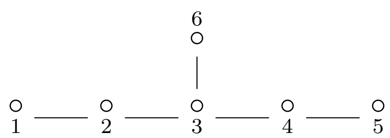
Portanto, temos que a álgebra de Hopf $U_q^+(E_6)$ é gerada por x_i e g_i, com $1 \leq i \leq 6$, e definida pelas seguintes relações de Serre:

$$
\begin{aligned}
&[x_1,[x_1,x_2]] = [[x_1,x_2],x_2] = [x_2,[x_2,x_3]] = [[x_2,x_3],x_3] = [x_3,[x_3,x_4]] = 0 \\
&[[x_3,x_4],x_4] = [x_3,[x_3,x_6]] = [[x_3,x_6],x_6] = [x_4,[x_4,x_5]] = [[x_4,x_5],x_5] = 0 \\
[x_1,x_3] = [x_1,x_4] &= [x_1,x_5] = [x_1,x_6] = [x_2,x_4] = [x_2,x_5] = [x_2,x_6] = [x_3,x_5] = [x_4,x_6] \\
&= [x_5,x_6] = 0.
\end{aligned}
$$

Observação 8.1. Note que a relação de Serre obtida quando tomamos $a_{ji} = -1$, com $j > i$, é $[[x_j,x_i],x_i]$. Porém, como essa palavra não associativa não é standard, escrevemos $[x_i,[x_i,x_j]]$, uma vez que ambas são equivalentes e a segunda é uma hiper-letra. Para verificar esta equivalência basta notar que $0 = [[x_j,x_i],x_i] = p_{ii}p_{ji}^2[x_i,[x_i,x_j]]$.

9 SISTEMA DE RAÍZES POSITIVAS PARA A ÁLGEBRA DE LIE DE TIPO E_6

Nesta seção encontraremos o sistema de raízes positivas da álgebra de Lie simples de tipo E_6, o que será usado no cálculo da base PBW de sua álgebra de Borel quântica associada 7.3. Para isso, inicialmente fazemos uma análise em seu diagrama de Dynkin, como é feito em Andruskiewitsch e Angiono (2017, p. 35).



Consideramos o conhecido diagrama de Dynkin de E_6, dado acima, e teremos que suas raízes positivas são da forma $\alpha = \sum_{j=1}^{6} a_j\alpha_j$, onde $\alpha_j, 1 \leq j \leq 6,$ correspondem às raízes simples de E_6. Se tomarmos $a_1 = 0,$ o que corresponde a desconsiderar o vértice 1 do diagrama de E_6, o subdiagrama de Dynkin será equivalente ao diagrama de Dynkin de D_5 com vértices $2,3,4,5$ e 6. Assim, as raízes correspondem às raízes de D_5 com algumas trocas de numerações dadas por $\alpha_1 \to \alpha_5$, $\alpha_2 \to \alpha_4$, $\alpha_3 \to \alpha_3$, $\alpha_4 \to \alpha_2$ e $\alpha_5 \to \alpha_6$.

Ainda por Andruskiewitsch e Angiono (2017), temos que as raízes de D_5 são da seguinte forma:

$$u_{i,j} := \sum_{k=i}^{j} \alpha_k, \quad 1 \leq i \leq j \leq 5, \text{ com } (i,j) \neq (4,5);$$
$$\overline{u_i} := \sum_{k=i}^{3} \alpha_k + \alpha_5, \quad 1 \leq i \leq 3;$$
$$z_{i,j} := \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k + 2\sum_{k=j}^{3} \alpha_k + \alpha_4 + \alpha_5, \quad i < j \leq 3.$$

Abrindo as equações e realizando as devidas mudanças de numerações temos que as raízes $\{\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_6,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_3+\alpha_6,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_4,\ \alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_5,\ \alpha_6\}$ são raízes positivas de E_6.

Agora, se tomarmos $a_5 = 0$, teremos que o subdiagrama de Dynkin de E_6 corresponderá ao diagrama de Dynkin de D_5 com vértices $1, 2, 3, 4, 6$. Desta forma, as raízes correspondem às raízes de D_5 com apenas uma troca de numeração, sendo α_5 em D_5 correspondendo a α_6 em E_6. Este processo resulta nas seguintes raízes positivas de E_6: $\{\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_6,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_6,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_3+\alpha_6,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_4, \alpha_6\}$.

Se tomarmos $a_6 = 0$, o subdiagrama de Dynkin de E_6 corresponderá ao diagrama de Dynkin de A_5. Desta forma, todas as raízes positivas de A_5 pertencem ao conjunto de raízes positivas de E_6. Isto é, $\{\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_4,\ \alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_5\}$ são raízes positivas de E_6.

Por fim, se tomarmos $a_i \neq 0, 1 \leq i \leq 6.$, teremos as seguintes raízes positivas em E_6: $\{\beta_1 = \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6, \beta_2 = \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6, \beta_3 = \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6, \beta_4 = \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6, \beta_5 = \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6, \beta_6 = \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6, \beta_7 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6\}$.

Juntando todas as raízes resultantes e excluindo repetições, obtemos o sistema de raízes positivas de E_6 dado por: $\Delta_+(E_6) = \{\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_6,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_6,\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+$

$\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_3+\alpha_6,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_4,\ \alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_5,\ \alpha_6\}$.

10 BASE PBW DE PALAVRAS ASSOCIATIVAS STANDARD PARA $U_q^+(E_6)$

Vimos na seção 6 que dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, cada raiz simples α_i está associada a uma variável quântica x_i e cada raiz positiva β_i está associada a um gerador PBW da álgebra de Hopf $U_q^+(\mathfrak{g})$ sobre $\mathbb{K}G$. Nesta seção, associaremos as raízes positivas de E_6, dadas na seção anterior, a geradores PBW de $U_q^+(E_6)$, utilizando a Proposição 6.3. Faremos estas associações em ordem crescente do comprimento das palavras.

Pela Proposição 6.3, dada uma raiz positiva β, que não seja uma raiz simples e olhamos para o conjunto das possíveis somas de raízes positivas $\delta_1+\delta_2$ que resultam em β. Para cada par δ_1,δ_2 associamos a uma palavra associativa e finalmente escolhemos a menor entre todas palavras associadas. Por exemplo, seja $\beta=\alpha_1+\alpha_2$. Temos duas possibilidades, $\delta_1=\alpha_1$ e $\delta_2=\alpha_2$ ou $\delta_1=\alpha_2$ e $\delta_2=\alpha_1$, porém pela segunda opção teríamos que $l_{\delta_1}=x_2<x_1=l_{\delta_2}$, o que vai contra o método utilizado. Desta forma, teremos que $l_{\delta_1}=x_1$ e $l_{\delta_2}=x_2$ e assim $l_\beta=l_{\delta_1}l_{\delta_2}=x_1x_2$. Note que, para todo caso em que $\beta=\alpha_i+\alpha_j$, onde α_i e α_j são raízes simples com $i>j$, temos que $l_\beta=l_{\delta_1}l_{\delta_2}=x_ix_j$.

Seja $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, então $\delta_1=\alpha_1$ e $\delta_2=\alpha_2+\alpha_3$ ou $\delta_1=\alpha_1+\alpha_2$ e $\delta_2=\alpha_3$, pois $\alpha_1+\alpha_3$ não está no conjunto de raízes positivas. Assim, em ambos os casos $l_\beta=l_{\delta_1}l_{\delta_2}=x_1x_2x_3$. Em geral, se $\beta=\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_3}$, com $i_1<i_2<i_3$, então $\delta_1=\alpha_{i_1}$ e $\delta_2=\alpha_{i_2}+\alpha_{i_3}$ ou $\delta_1=\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}$ e $\delta_2=\alpha_{i_3}$, e $l_\beta=l_{\delta_1}l_{\delta_2}=x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$ para todas as raízes desta forma com $(i_1,i_2,i_3)\neq(3,4,6)$. Para $\beta=\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6$, teremos $\delta_1=\alpha_3+\alpha_4$ e $\delta_2=\alpha_6$ de onde $l_{\delta_1}l_{\delta_2}=x_3x_4x_6$ ou $\delta_1=\alpha_3+\alpha_6$ e $\delta_2=\alpha_4$ fornecendo $l_{\delta_1}l_{\delta_2}=x_3x_6x_4$. Note que, $x_3x_6x_4<x_3x_4x_6$, assim $l_\beta=$ *mín*$\{x_3x_4x_6,\ x_3x_6x_4\}=x_3x_6x_4$.

Para $\beta=\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_3}+\alpha_{i_4}$, temos que $l_\beta=x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}$, exceto para $(i_1,i_2,i_3,i_4)=(2,3,4,6)$ e $(i_1,i_2,i_3,i_4)=(3,4,5,6)$. Se $\beta=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6$, então $l_\beta=$ *mín*$\{x_2x_3x_6x_4,\ x_2x_3x_4x_6\}=x_2x_3x_6x_4$. E se $\beta=\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$, então $l_\beta=$ *mín*$\{x_3x_4x_5x_6,\ x_3x_6x_4x_5\}=x_3x_6x_4x_5$.

Para os casos em que as palavras associativas associadas às raízes positivas possuem comprimento 5 temos as seguintes palavras l_β obtidas das análises de possibilidades de decomposição $\beta=\alpha_1+\alpha_2$: se $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$ temos $l_\beta=x_1x_2x_3x_4x_5$, se $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6$ então $l_\beta=$ *mín*$\{x_1x_2x_3x_6x_4,\ x_1x_2x_3x_4x_6\}=x_1x_2x_3x_6x_4$, se $\beta=\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6$ obtemos $l_\beta=$ *mín*$\{x_2x_3^2x_6x_4,\ x_2x_3x_6x_3x_4,\ x_2x_3x_4x_3x_6,\ x_2x_3x_6x_4x_3\}=x_2x_3x_6x_4x_3$ e, finalmente, se $\beta=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ temos a palavra $l_\beta=$ *mín*$\{x_2x_3x_6x_4x_5,\ x_2x_3x_4x_5x_6\}=x_2x_3x_6x_4x_5$.

Para as raízes positivas de comprimento 6, se $\beta=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6$ temos $l_\beta=$ *mín*$\{x_1x_2x_3x_6x_3x_4,\ x_1x_2x_3x_4x_3x_6,\ x_1x_2x_3^2x_6x_4,\ x_1x_2x_3x_6x_4x_3\}=x_1x_2x_3x_6x_4x_3$, se $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ então $l_\beta=$ *mín*$\{x_1x_2x_3x_6x_4x_5,\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6\}=x_1x_2x_3x_6x_4x_5$, se $\beta=\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ obtemos $l_\beta=$ *mín*$\{x_2x_3^2x_6x_4x_5, x_2x_3x_4x_5x_3x_6, x_2x_3x_6x_3x_4x_5, x_2x_3x_6x_4x_3x_5,$

$x_2x_3x_6x_4x_5x_3\} = x_2x_3x_6x_4x_5x_3$ e ainda, se $\beta = \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6$ temos $l_\beta =$ *mín*$\{x_1x_2^2x_3x_6 x_4x_3, x_1x_2x_3x_6x_4x_2x_3, x_1x_2x_3x_2x_3x_6x_4,\ x_1x_2x_3x_6x_2x_3x_4,\ x_1x_2x_3x_4x_2x_3x_6, x_1x_2x_3x_6x_4x_3x_2\} = x_1 x_2x_3x_6x_4x_3x_2$.

Se β tem comprimento 7 ou 8, temos: $\beta = \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ e $l_\beta =$ *mín*$\{x_1x_2x_3x_4x_5x_3 x_6,\ x_1x_2x_3^2x_6x_4x_5,\ x_1x_2x_3x_6x_3x_4x_5,\ x_1x_2x_3x_6x_4x_3x_5,\ x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3\} = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3,\ \beta = \alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ e $l_\beta =$ *mín*$\{x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4,\ x_2x_3x_6x_4\ x_3\ x_4x_5,\ x_2x_3x_4x_3x_6x_4x_5, x_2x_3x_4x_5 x_3x_6x_4\} = x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4,\ \beta = \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ e $l_\beta =$ *mín*$\{x_1x_2^2x_3x_6x_4x_5x_3, x_1x_2x_3 x_2x_3\ x_6x_4x_5, x_1x_2x_3x_4x_5x_2x_3x_6,\ x_1x_2x_3x_6x_2x_3x_4x_5, x_1x_2x_3x_6x_4x_3x_2x_5,\ x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_2\} = x_1 x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_2$ ou ainda $\beta = \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ e $l_\beta =$ *mín*$\{x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4,\ x_1x_2x_3 x_6\ x_4x_3x_4x_5, x_1x_2x_3x_4x_5x_3x_4x_6,\ x_1x_2x_3x_4x_3x_6x_4x_5\} = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4$.

Finalmente, para as raízes de comprimento 9, 10 e 11 temos $\beta = \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ e $l_\beta =$ *mín*$\{x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_2x_4,\ x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2,\ x_1x_2x_3x_6x_4x_3x_2x_4x_5,\ x_1x_2^2x_3x_6x_4x_5 x_3\ x_4, x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_2x_3x_4,\ x_1x_2x_3x_4x_5x_2x_3x_6x_4,\ x_1x_2x_3x_6x_4x_2x_3x_4x_5,\ x_1x_2x_3x_4x_2x_3x_6x_4x_5\} = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2, \beta = \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ e $l_\beta =$ *mín*$\{x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2x_3, x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_2x_3x_4, x_1x_2x_3x_6x_4x_3x_2x_3x_4x_5,\ x_1x_2x_3x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4,\ x_1x_2x_3x_4x_2x_3x_6x_4x_5x_3, x_1x_2x_3x_4x_5x_2x_3x_6x_4x_3\} = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2x_3$ ou $\beta = \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6$ e $l_\beta =$ *mín*$\{x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2x_3x_6, x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_2x_3x_6x_4,\ x_1x_2x_3x_6x_4x_3x_2x_3x_6x_4x_5, x_1x_2x_3x_6x_2 x_3x_6x_4x_5x_3x_4, x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_2x_3x_6x_4x_3, x_1x_2x_3x_6x_4x_2x_3\ x_6x_4x_5x_3\} = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2x_3x_6$.

Desta forma, uma base PBW para $U_q^+(E_6)$ sobre $\mathbb{K}G$ é o conjunto de palavras associativas dado abaixo:

$$\{x_1,\ x_{12},\ x_{123},\ x_{1234},\ x_{12345},\ x_{1236},\ x_{12364},\ x_{123643},\ x_{1236432},\ x_{123645},\ x_{1236453},\ x_{12364532},\ x_{12364534}, x_{123645342},\ x_{1236453423},\ x_{12364534236},\ x_2,\ x_{23},\ x_{234},\ x_{2345},\ x_{236},\ x_{2364},\ x_{23643},\ x_{23645},\ x_{236453},\ x_{2364534}, x_3,\ x_{34},\ x_{345},\ x_{36},\ x_{364},\ x_{3645},\ x_4,\ x_{45},\ x_5,\ x_6\},$$

onde $x_{ij} = x_ix_j$.

11 BASE PBW DE HIPER-LETRAS DURAS PARA $U_q^+(E_6)$

Vimos pela Observação 7.6 que utilizando o Teorema de Shirshov 4.7 nas palavras associativas standards encontradas acima, associando-as a hiper-letras, teremos que o conjunto de hiper-letras resultante será uma base PBW para $U_q^+(E_6)$ sobre $\mathbb{K}G$ de hiper-letras duras.

Dada uma palavra associativa standard $u = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, o Teorema de Shirshov nos diz que devemos escrever $[u] = [[v],[w]]$, onde $u = vw$, $[v]$ e $[w]$ são palavras não associativas standards e v é de comprimento mínimo.

Temos pela Definição 4.4, que cada x_i é uma palavra não associativa, assim, precisamos encontrar o alinhamento dos colchetes apenas para as palavras de comprimento maiores iguais a 2. Para $u = x_{i_1}x_{i_2}$, $1 \le i_1 < i_2 \le 6$, claramente $[u] = [x_{i_1}, x_{i_2}]$, já que existe apenas uma forma de escrevermos u como um produto vw, que é tomando $v = x_{i_1}$ e $w = x_{i_2}$.

Seja $u = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$, com $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6$. Teremos duas formas de escrevermos u como um produto vw, sendo $v = x_{i_1}$ e $w = x_{i_2}x_{i_3}$ ou $v = x_{i_1}x_{i_2}$ e $w = x_{i_3}$. Note que para todos os casos v e w são standards, desta forma, o primeiro alinhamento é o que v possui comprimento menor. Utilizando o alinhamento anterior, temos que $[u] = [x_{i_1}, [x_{i_2}, x_{i_3}]]$, para $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6$. Se $u = x_3x_6x_4$, teremos as mesmas duas opções para escrevermos u como um produto, sendo $v = x_3$ e $w = x_6x_4$ ou $v = x_3x_6$ e $w = x_4$. Note que na primeira possibilidade $w = x_6x_4$ não é standard, desta forma devemos tomar $v = x_3x_6$ e $w = x_4$. Assim, $[u] = [[x_3, x_6], x_4]$.

Se $u = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}$, com $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 6$, temos que $v = x_{i_1}$ e $w = x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}$ são standards, onde $u = vw$. Assim, utilizando os alinhamentos palavras de comprimento 3 dados acima, temos que $[u] = [x_{i_1}, [x_{i_2}, [x_{i_3}, x_{i_4}]]]$. Para $u = x_2x_3x_6x_4$, temos que $v = x_2$ e $w = x_3x_6x_4$ são standards, utilizando o alinhamento anterior para w temos que $[u] = [x_2, [[x_3, x_6], x_4]]$. Se $u = x_3x_6x_4x_5$, temos as seguintes possibilidades para v e w: $v = x_3$ e $w = x_6x_4x_5$, onde é possível observar que w não é standard , $v = x_3x_6$ e $w = x_4x_5$, note que aqui já possuímos v e w standards, assim podemos parar por aqui, uma vez que v possui comprimento mínimo. Então, $u = [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]$.

Para os casos em que $u = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$, isto é u possui comprimento 5, notamos que para as palavras $x_1x_2x_3x_4x_5$, $x_1x_2x_3x_6x_4$ e $x_2x_3x_6x_4x_5$ podemos tomar $v = x_{i_1}$ e $w = x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$, pois teremos que v e w serão standards em todos os casos, assim basta tomarmos o alinhamento de w dado anteriormente. Nestes casos teremos as hiper-letras $[x_1, [x_2, [x_3, [x_4, x_5]]]]$, $[x_1, [x_2, [[x_3, x_6], x_4]]]$ e $[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]]$. Se $u = x_2x_3x_6x_4x_3$, teremos as seguintes possibilidades para v e w: $v = x_2$ e $w = x_3x_6x_4x_3$, $v = x_2x_3$ e $w = x_6x_4x_3$, $v = x_2x_3x_6$ e $w = x_4x_3$ ou $v = x_2x_3x_6x_4$ e $w = x_3$. Note que, para os três primeiros casos w não é standard, desta forma tomaremos o alinhamento de acordo com o caso 4. Assim, $[u] = [[x_2, [[x_3, x_6], x_4]], x_3]$.

Para $u = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}x_{i_6}$, podemos tomar $v = x_{i_1}$ e $w = x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}x_{i_6}$, para as palavras $x_1x_2x_3x_6x_4x_5$ e $x_1x_2x_3x_6x_4x_3$, pois dessa forma teremos que v e w serão standards em ambos os casos. Assim, tomando o alinhamento de w dado anteriormente, teremos as seguintes hiper-letras $[x_1, [x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]]]$ e $[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], x_4]], x_3]]$. Se $u = x_2x_3x_6x_4x_5x_3$, teremos as seguintes possibilidades para v e w: $v = x_2$ e $w = x_3x_6x_4x_5x_3$, $v = x_2x_3$ e $w = x_6x_4x_5x_3$, $v = x_2x_3x_6$ e $w = x_4x_5x_3$, $v = x_2x_3x_6x_4$ e $w = x_5x_3$ ou $v = x_2x_3x_6x_4x_5$ e $w = x_3$. O único caso em que w é standard é o caso 5. Assim, tomando o alinhamento para v dado anteriormente, temos $[u] = [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], x_3]$.

Para as palavras de comprimento maior ou igual a 7 iremos analisar caso a caso uma vez que cada palavra possui uma forma diferente para o seu alinhamento. Seja $u = x_1x_2x_3x_6x_4x_3x_2$, temos as seguinte possibilidades para v e w: $v = x_1$ e $w = x_2x_3x_6x_4x_3x_2$, $v = x_1x_2$ e $w = x_3x_6x_4x_3x_2$, $v = x_1x_2x_3$ e $w = x_6x_4x_3x_2$, $v = x_1x_2x_3x_6$ e $w = x_4x_3x_2$, $v = x_1x_2x_3x_6x_4$ e

$w = x_3x_2$ ou $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_3$ e $w = x_2$. O único caso em que w é standard é na última possibilidade. Assim, tomando o alinhamento anterior para $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_3$, temos que $u = [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], x_4]], x_3]], x_2]$.

Para $u = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3$, temos que $v = x_1$ e $w = x_2x_3x_6x_4x_5x_3$ são standards, como v possui comprimento mínimo tomamos $u = vw$ desta forma. Assim, $u = [x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], x_3]]$. Se $u = x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4$, temos os seguintes casos para v e w standards: $v = x_2x_3x_6x_4x_5$ e $w = x_3x_4$ ou $v = x_2x_3x_6x_4x_5x_3$ e $w = x_4$. Tomando v com comprimento mínimo teremos $v = x_2x_3x_6x_4x_5$ e $w = x_3x_4$. Logo, $[u] = [[x_2, [[x_3, x_6][x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]$.

Se $u = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_2$, a única possibilidade para v e w standards é $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3$ e $w = x_2$. Desta forma temos $[u] = [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], x_3]], x_2]$. Para $u = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3 x_4$, temos que o caso em v e w são palavras standards com v com comprimento mínimo é $v = x_1$ e $w = x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4$. Tomando ainda o alinhamento anterior obtido para w, temos que $[u] = [x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]]$.

Se $[u] = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2$, a possibilidade para v e w standard é $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4$ e $w = x_2$. Desta forma temos que $[u] = [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]], x_2]$. Para a palavra $u = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2x_3$, temos $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4$ e $w = x_2x_3$ ou $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4 x_2$ e $w = x_3$. O caso em que v e w são standards e v possui comprimento mínimo está representado na primeira possibilidade. Assim, utilizando os alinhamentos de colchete para v e w encontrados anteriormente, temos que $[u] = [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]], [x_2, x_3]]$. Por fim, se $u = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2x_3x_6$, temos as seguintes possibilidades para v e w standards: $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4$ e $w = x_2x_3x_6$, $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2$ e $w = x_3x_6$ ou $v = x_1x_2x_3x_6x_4x_5x_3x_4x_2x_3$ e $w = x_6$. Logo, para que v tenha comprimento mínimo tomaremos o terceiro caso e $[u] = [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]], [x_2, [x_3, x_6]]]$.

Com isto, concluímos nosso objetivo com o resultado a seguir.

Teorema 11.1. *O conjunto a seguir é uma base PBW de hiper-letras duras para $U_q^+(E_6)$ sobre $\mathbb{K}G$*

$$
\begin{aligned}
&\{x_1;\ [x_1, x_2];\ [x_1, [x_2, x_3]];\ [x_1, [x_2, [x_3, x_4]]];\ [x_1, [x_2, [x_3, [x_4, x_5]]]];\ [x_1, [x_2, [x_3, x_6]]];\\
&[x_1, [x_2, [[x_3, x_6], x_4]]];\ [x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], x_4]], x_3]];\ [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], x_4]], x_3]], x_2];\\
&[x_1, [x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]]];\ [x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], x_3]];\ [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], x_3]], x_2];\\
&[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]];\ [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]], x_2];\\
&[[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]], [x_2, x_3]];\ [[x_1, [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], [x_3, x_4]]], [x_2, [x_3, x_6]]];\\
&x_2;\ [x_2, x_3];\ [x_2, [x_3, x_4]];\ [x_2, [x_3, [x_4, x_5]]];\ [x_2, [x_3, x_6]];\ [x_2, [[x_3, x_6], x_4]];\ [[x_2, [[x_3, x_6], x_4]], x_3];\\
&[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]];\ [[x_2, [[x_3, x_6], [x_4, x_5]]], x_3];\ [[x_2, [[x_3, x_6][x_4, x_5]]], [x_3, x_4]];\ x_3;\ [x_3, x_4];\\
&[x_3, [x_4, x_5]];\ [x_3, x_6];\ [[x_3, x_6], x_4];\ [[x_3, x_6], [x_4, x_5]];\ x_4;\ [x_4, x_5];\ x_5;\ x_6\}.
\end{aligned}
$$

12 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os grupos quânticos de tipo $U_q^+(\mathfrak{g})$ são exemplos extremamente importantes e conhecer sua estrutura é um problema de grande interesse na teoria de classificação de álgebras de Hopf. Conhecer a base PBW de um grupo quântico permite o estudo de diversas características destes conjuntos, como por exemplo, obter de maneira simples suas subálgebras coideais à direita. O estudo de subálgebras coideais à direita é um problema de grande interesse, como pode ser visto no survey de Letzter (2002). Como aplicação do Teorema 11.1 apresentamos subálgebras coideais à direita, por meio de um método desenvolvido por Kharchenko (2008) que obtém subálgebras coideais à direita como subálgebras diferenciais calculando as derivadas torcidas dos geradores PBW. A subálgebra $A = \mathbb{K} < x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 >$ de $U_q^+(E_6)$ possui um cálculo diferencial dado por

$$\partial_i(x_j) = \delta_i^j, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u) \cdot v + p(u, x_i)u \cdot \partial_i(v), \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Com isso podemos calcular as derivadas torcidas dos geradores PBW e obtemos, por exemplo

$$\partial_4(x_4) = 1, \quad \partial_i(x_4) = 0 \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, 3, 5, 6\},$$

$$\partial_3([x_3, x_4]) = (1 - q^{-1})x_4, \quad \partial_i([x_3, x_4]) = 0 \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, 4, 5, 6\},$$

$$\partial_2([x_2, [x_3, x_4]]) = (1 - q^{-1})[x_3, x_4], \quad \partial_i([x_2, [x_3, x_4]]) = 0 \quad \text{para} \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\partial_1([x_1, [x_2, [x_3, x_4]]]) = (1-q^{-1})[x_2, [x_3, x_4]], \quad \partial_i([x_1, [x_2, [x_3, x_4]]]) = 0 \quad \text{para} \quad i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Assim, os subconjuntos de geradores PBW dados por $\{x_4\}$, $\{[x_3, x_4],\ x_4\}$, $\{[x_2, [x_3, x_4]],\ [x_3, x_4],\ x_4\}$, $\{[x_1, [x_2, [x_3, x_4]]],\ [x_2, [x_3, x_4]],\ [x_3, x_4],\ x_4\}$ são, cada um, base PBW de uma subálgebra coideal à direita dado que, em cada subconjunto, todas as derivadas torcidas de todos seus elementos são múltiplos escalares de elementos do próprio conjunto, ou seja, são subálgebras diferenciais. Calculando todas as derivadas de todos geradores PBW e procedendo de maneira análoga ao artigo de Pogorelsky (2009) podemos obter todas as subálgebras coideais à direita de $U_q^+(E_6)$.

REFERÊNCIAS

ANDRUSKIEWITSCH, Nicolás; ANGIONO, Iván. On finite dimensional Nichols algebras of diagonal type. **Bulletin of Mathematical Sciences**, v. 7, p. 353–573, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s13373-017-0113-x.

ANGIONO, Iván. A presentation by generators and relations of Nichols algebras of diagonal type and convex orders on root systems. **Journal of the European Mathematical Society**, v. 17, n. 10, p. 2643–2671, 2015. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1008.4144.

ANGIONO, Iván. Nichols algebras with standard braiding. **Algebra & Number Theory**, v. 3, n. 1, p. 35–106, 2009. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.0804.0816.

HUMPHREYS, James E. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 9. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-6398-2. Acesso em: 20 maio 2025.

KAC, Victor G. **Infinite-Dimensional Lie Algebras**. [S.l.]: Cambridge university press, 2012. v. 9. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511626234.

KHARCHENKO, Vladislav. A combinatorial approach to quantification of Lie algebras. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 203, n. 1, p. 191–233, 2002. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0002149.

KHARCHENKO, Vladislav. A quantum analog of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem. **Algebra and Logic, Springer**, v. 38, n. 4, p. 259–276, 1999. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02671731.

KHARCHENKO, Vladislav. An algebra of skew primitive elements. **Algebra and Logic, Springer**, v. 37, n. 2, p. 101–126, 1998. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02671596.

KHARCHENKO, Vladislav. PBW-bases of coideal subalgebras and a freeness theorem. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 360, p. 5121–5143, 2008. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/pdf/20161460.pdf. Acesso em: 20 maio 2025.

KHARCHENKO, Vladislav. **Quantum Lie theory. Universidad Nacional Autónoma do México.** [S.l.]: Springer, 2015. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-22704-7. Acesso em: 20 maio 2025.

LETZTER, Gail. Coideal subalgebras and quantum symmetric pairs. **MSRI Publications**, v. 43, p. 117–165, 2002. Disponível em: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0103228. Acesso em: 20 maio 2025.

POGORELSKY, Bárbara. Right coideal subalgebras of the quantum Borel algebra of type G_2. **Journal of Algebra**, v. 322, p. 2335–2354, 2009. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869309003895. Acesso em: 20 maio 2025.

SHIRSHOV, A.I. **On Free Lie Rings**. [S.l.]: Mat. Sb., 1958. v. 45, p. 113–226. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7643-8858-4_8. Acesso em: 20 maio 2025.

SOBRE OS AUTORES

Ma. Vitória Gomes
https://orcid.org/0009-0005-5407-3891
http://lattes.cnpq.br/7567292488227577
Contato: viitoriagomes1998@gmail.com
Contribuição autoral: Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Investigação, Metodologia, Validação e Visualização.

Dra. Bárbara Pogorelsky
https://orcid.org/0000-0001-8674-9941
http://lattes.cnpq.br/5257746725187169
Contato: barbarapogo@gmail.com
Contribuição autoral: Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Supervisão, Validação e Visualização.