

NÚMEROS FUZZY INTERATIVOS: OPERAÇÕES E SOLUÇÕES DE MODELOS REPARAMETRIZADOS

INTERACTIVE FUZZY NUMBERS: OPERATIONS AND SOLUTIONS OF REPARAMETERIZED MODELS

NÚMEROS DIFUSOS INTERACTIVOS: OPERACIONES Y SOLUCIONES DE MODELOS REPARAMETRIZADOS

Diogo Sampaio da Silva^[1], Roberto Antônio Cordeiro Prata^[1], Sílvia Dias de Souza^[1]

[1] Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, AM, Brasil.

Data de submissão: 26 jul. 2024. **Data de aprovação:** 19 maio 2025. **Financiamento:** O primeiro autor recebeu bolsa de mestrado da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). **Como citar:** SILVA, Diogo Sampaio da; PRATA, Roberto Antônio Cordeiro; SOUZA, Sílvia Dias de. Números fuzzy interativos: operações e soluções de modelos reparametrizados. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 11, p. e303, 29 jun. 2025. <https://doi.org/10.35819/remat2024v11id7387>.



Este artigo está licenciado sob uma licença *Creative Commons Attribution 4.0 International License*.

Resumo: Na literatura, encontramos vários artigos que estudam o crescimento de microrganismos no leite, modelos gerais preditivos de crescimento desses seres, e crescimento das Salmonellas, tais como o modelo logístico modificado e o modelo de Gompertz modificado. Os parâmetros presentes em todos os modelos matemáticos sofrem alterações quando testados empiricamente, devido a fatores do meio em que são cultivadas, como a temperatura. Apresentamos neste estudo um modelo fuzzy de crescimento desses microrganismos que contempla as incertezas inerentes aos parâmetros, proveniente das constantes alterações de seus valores, também estudamos a interatividade e a correlação fuzzy entre parâmetros, objetivando destacar a dependência entre os valores e verificar o quanto alterações de um influenciam os valores do outro, indicando como isso pode afetar biologicamente o comportamento populacional. Investigamos algumas propriedades e casos particulares interessantes das operações entre números fuzzy interativos. Obtivemos baixos índices de interatividade entre os parâmetros fuzzy do modelo indicado.

Palavras-chave: microrganismos; números fuzzy interativos; princípio de extensão de Zadeh; biomatemática.

Abstract: In the literature, we can find several articles that study the growth of microorganisms in milk, general predictive models for the growth of these organisms and the growth of Salmonella, such as the modified logistic model and the modified Gompertz model. The parameters present in all the mathematical models change, when tested empirically, due to factors in the environment in which they are grown, such as temperature. In this study, we present a fuzzy model for the growth of these microorganisms that takes into account the uncertainties inherent in the parameters, resulting from the constant changes in their values. We also study the interactivity and fuzzy correlation between parameters, aiming to highlight the dependence between the values and verifying how much changes in one influence the values of the other, indicating how this can biologically affect population behavior. We investigated some interesting properties and particular cases of operations between interactive fuzzy numbers. We obtained low levels of interactivity between the fuzzy parameters of the indicated model.

Keywords: microorganisms; interactive fuzzy numbers; Zadeh's extension principle; biomathematics.

Resumen: En la literatura, se encuentran diversos artículos que estudian el crecimiento de microorganismos en la leche, modelos generales de predicción para el crecimiento de estos, y el crecimiento de Salmonella, como el modelo logístico modificado y el modelo Gompertz modificado. Los parámetros de todos los modelos matemáticos sufren cambios cuando se prueban empíricamente, debido a factores ambientales como la temperatura. En este estudio, presentamos un modelo difuso para el crecimiento de estos microorganismos, que considera las incertidumbres inherentes a los parámetros, derivadas de los constantes cambios en sus valores. También analizamos la interactividad y la correlación difusa entre los parámetros, con el objetivo de resaltar su dependencia y evaluar en qué medida los cambios en uno influyen en los valores del otro, indicando cómo esto puede afectar biológicamente el comportamiento de la población. Investigamos algunas propiedades interesantes y casos particulares de operaciones entre números difusos interactivos. Obtuvimos bajos niveles de interactividad entre los parámetros difusos del modelo propuesto.

Palabras clave: microorganismos; números difusos interactivos; principio de extensión de Zadeh; biomatemáticas.

1 INTRODUÇÃO

No presente estudo, investigamos alguns modelos de crescimento de microrganismos representados pelo modelo logístico modificado e o modelo de Gompertz modificado. Tais modelos servem para descrever como os microrganismos se multiplicam nos alimentos. Ao analisarmos o comportamento desses seres, verificamos em seus parâmetros variações, e para contemplarmos um estudo com estas variações ou incertezas, propomos um modelo com teoria fuzzy (ver os artigos de Cecconello (2010) e de Mizukoshi (2004) para mais detalhes).

Já se encontram na literatura, por exemplo, nos artigos de Longhi et al. (2013) e Longhi et al. (2017), estudos dos modelos logístico modificado e de Gompertz modificado para microorganismos no leite, que mesmo em função do tempo, dependem ainda dos parâmetros: capacidade suporte A e taxa de crescimento específico máxima μ_{\max} , que é a duração da fase em que o organismo ainda está se adaptando ao meio, com taxa de reprodução baixa λ , chamada fase *lag*. No entanto, os parâmetros μ_{\max} e λ podem ser escritos um em função do outro.

A partir da teoria dos chamados números fuzzy, especialmente da interatividade entre números fuzzy, objetivamos ilustrar soluções que utilizam números fuzzy para acomodar possíveis desvios das soluções determinísticas tomando esses parâmetros como números fuzzy, bem como estudar as correlações entre esses, calculando seu índice de interatividade, uma forma de quantificar quanto as alterações em um parâmetro implicam alterações no outro.

A Matemática Fuzzy é uma área recente em Matemática, surgida na segunda metade do século XX, com o trabalho de Zadeh (1965). A ideia inicial trata-se de expandir a noção de conjunto, permeada pela dicotomia entre pertencimento e não pertencimento. Assim, como uma forma de tratar formalmente de proposições e quantidades incertas, surge a noção de conjunto fuzzy. Um conjunto fuzzy é uma generalização de um conjunto clássico, ou crisp, em que esse conjunto possui graus de pertencimento contínuos, modelando situações reais onde não temos um critério exato delimitando uma classe de objetos, além dos casos clássicos de pertencimento

e não pertencimento, como comentam Barros, Bassanezi e Lodwick (2017). Assim, um conjunto fuzzy é dado por uma função da forma:

$$\varphi_A : U \rightarrow [0, 1], \quad (1)$$

sendo o domínio um conjunto universo e a imagem pela função grau de pertinência, de forma que 0 indica não pertencimento, 1 indica pertencimento e os valores entre 0 e 1 indicam graus de pertencimento, de modo que quanto mais próxima de 1 é a imagem, maior é o grau de pertencimento.

Mais especialmente, a noção de número fuzzy surge para generalizar a noção de número real, de forma semelhante. E, aplicando o Princípio da Extensão de Zadeh, obtemos as operações entre números fuzzy, usando intervalos fechados de números reais, como fazem Barros e Bassanezi (2010). No entanto, podemos ainda obter tais operações a partir de distribuições de possibilidades, conceito explorado por Carlsson, Fullér e Majlender (2004). Mesmo quando tratamos de apenas uma entre as operações, a literatura já propõe diferentes formas de definir, por exemplo, diferenças entre números fuzzy, como: tradicional, via distribuições, de Hukuhara, generalizada de Hukuhara, generalizada e CIA, sendo essas apresentadas e discutidas por Barros, Pedro e Gomes (2015).

A partir da distribuição de possibilidades conjunta de dois números fuzzy, investigamos os chamados números fuzzy interativos, que podem ser descritos como aqueles cujos valores são dados dependentemente um do outro, conceito explorado por Fullér e Majlender (2004).

Já possuímos na literatura estudos sobre como somar números fuzzy interativos, em especial os completamente correlacionados, em particular trabalhados por Coroianu e Fullér (2013a), bem como estudos sobre a multiplicação de números fuzzy interativos, também trabalhados por Coroianu e Fullér (2013b). Visamos, então, complementar tal estudo para um campo mais geral, por meio de um caso específico, mas ainda abrangente, de números fuzzy interativos: os números fuzzy f -correlacionados.

A ferramenta principal é o princípio de extensão para números fuzzy interativos, dado do seguinte modo:

$$f_C(A_1, \dots, A_n)(y) = \sup_{y=f(x_1, \dots, x_n)} C(x_1, \dots, x_n), \quad (2)$$

em que C é uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições de possibilidades marginais, A_1, \dots, A_n números fuzzy, e f uma função contínua do espaço euclidiano n dimensional na reta real.

A noção de números fuzzy f -correlacionados é uma generalização da noção de números fuzzy linearmente correlacionados, mas agora por meio de uma função monótona injetiva ao invés de uma função linear. Um caso particular que Cabral, Prata e Barros (2013) destacaram como interessante é aquele em que a função f de correlação é hiperbólica. Adiante, mostramos

que esse é o caso dos parâmetros fuzzy estudados neste trabalho.

O objetivo deste trabalho é exemplificar como a Matemática Fuzzy pode modelar eventos biológicos, neste caso, o crescimento de micro-organismos no leite. Nossa metodologia consiste em estimar incertezas do modelo por meio de um parâmetro, podendo ser replicada em diferentes soluções de modelos biológicos. Por exemplo, os números fuzzy f -correlacionados já foram utilizados para modelagem do HIV em indivíduos em tratamento por Cabral, Prata e Barros (2015). Obtemos nossas soluções fuzzy a partir das operações aritméticas entre os números fuzzy, nomeadamente: adição, subtração, multiplicação, divisão, exponenciação e logaritmação. Visamos estudar em especial essas operações com números fuzzy f -correlacionados, e também como essas se relacionam.

Assim, fazemos um estudo da solução fuzzy desses modelos via princípio de extensão de Zadeh. Tais tipos de soluções são estudadas no livro de Barros, Bassanezi e Lodwick (2017) e introduzidas por Zadeh (1965), bem como as soluções fuzzy interativas dos modelos a uma temperatura de 30° C. Usamos também o conceito de índice de interatividade, que é uma forma de medir o quanto cada valor da população depende de outro em instantes distintos. Por fim, calculamos o índice de interatividade com os parâmetros fuzzy dos modelos estudados, analisando o quanto mudanças no valor de um parâmetro acarretam em mudanças no valor de outro, ou seja, se pequenos desvios no valor de um parâmetro causam pequenos ou grandes desvios no valor de outro.

Na seção 2, investigamos as operações de números fuzzy interativos, e na seção 3, mostramos a solução dos modelos modificados, assim como o gráficos determinísticos das suas respectivas soluções. Já na seção 4, encontramos as soluções fuzzy para os modelos, e na seção 5, introduzimos a medida de interatividade entre números fuzzy e calculamos seu valor para os parâmetros da solução obtida.

2 SOBRE OPERAÇÕES DE NÚMEROS FUZZY INTERATIVOS

Começamos definindo importantes conceitos para explicar o que são números fuzzy interativos e como operar com eles. Em termos simples, dois números fuzzy são interativos quando, conhecendo um deles, ou mais especificamente, conhecendo seus α -níveis, conhecemos o outro.

Particularmente, nos interessam os números fuzzy f -correlacionados, um caso especial de números fuzzy interativos em que os α -níveis de um são a imagem dos α -níveis de outro por meio de uma função injetiva, monótona e contínua, pois este é o caso dos parâmetros que desejamos estudar. Investigamos ainda algumas funções particulares que geram classes interessantes de números fuzzy f -correlacionados, bem como operações entre esses.

Iniciamos apresentando algumas definições e resultados já estabelecidos na literatura em Matemática Fuzzy. Após isso, como nossos modelos estudados possuem leis de associação

que são combinações de operações entre números fuzzy f -correlacionados, estudamos as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, exponenciação e logaritmação.

Definição 2.1 (Distribuição de possibilidade) *Uma distribuição de possibilidade sobre $\Omega \neq \emptyset$ é uma função $\varphi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz $\sup_{\omega \in \Omega} \varphi(\omega) = 1$.*

Definição 2.2 (Distribuição de possibilidade conjunta) *Sejam A e B números fuzzy e $C \in F_C(\mathbb{R}^2)$, então φ_C é uma distribuição de possibilidade conjunta de A e B se:*

$$\max_{y \in \mathbb{R}} \varphi_C(x, y) = \varphi_A(x) \text{ e } \max_{x \in \mathbb{R}} \varphi_C(x, y) = \varphi_B(y).$$

Além disso, φ_A e φ_B são chamadas distribuições marginais de C .

Lema 2.3 (Carlsson; Fullér; Majlender, 2004, p. 536) *Sejam A_1, \dots, A_n números fuzzy, seja C a sua distribuição de possibilidade conjunta, e seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então,*

$$[f_C(A_1, \dots, A_n)]^\alpha = f([C]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração 1 *Para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ obtemos:*

$$\begin{aligned} [f_C(A_1, \dots, A_n)]^\alpha &= \overline{\left\{ y \in \mathbb{R}; \sup_{y=f(x)} C(x) > \alpha \right\}} \\ &= \overline{\{y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}; y = f(x), C(x) > \alpha\}} \\ &= \overline{\{f(x) \in \mathbb{R}; C(x) > \alpha\}} \\ &= f\left(\overline{\{x \in \mathbb{R}^n; C(x) > \alpha\}}\right) \\ &= f([C]^\alpha) \end{aligned}$$

Isto conclui nossa prova.

Definição 2.4 *Os números fuzzy A e B são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta C satisfaz a relação*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \varphi_C(x, y) = \min \{\varphi_A(x), \varphi_B(y)\}.$$

Caso contrário, são ditos interativos.

Se $A, B \in F(\mathbb{R})$ são não interativos, então a função de pertinência conjunta é dada por $A \times B$. Nesse caso, mudanças na função de pertinência de A não alterarão a segunda distribuição de

possibilidade marginal e vice-versa. Desse modo, temos a igualdade $[B]^\alpha = [A_1]^\alpha \times [A_2]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$. Consequentemente, $A, B \in F(\mathbb{R})$ são ditos interativos caso não possam tomar seus valores independentemente um do outro.

Definição 2.5 (Números fuzzy completamente correlacionados) *Dois números fuzzy A e B são declarados completamente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tais que sua distribuição de possibilidade conjunta, sendo $\chi_{qx+r=y}(x, y)$ a função característica da reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; qx + r = y\}$, é definida por:*

$$\varphi_C(x, y) = \varphi_A(x)\chi_{qx+r=y}(x, y) = \varphi_B(y)\chi_{qx+r=y}(x, y).$$

A noção de números fuzzy f -correlacionados é uma generalização da noção de números fuzzy linearmente correlacionados, mas agora por meio de uma função monótona injetiva ao invés de uma função linear, introduzida por Cabral, Prata e Barros (2015). Para os nossos propósitos, um caso particular interessante é o caso em que a função f de correlação é hiperbólica, pois os parâmetros λ e μ_{\max} que estudamos são relacionados por uma função hiperbólica, como apresentado na seção 4.

Definição 2.6 (Números fuzzy f -correlacionados) *Tome $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow Y$ sendo uma função monótona injetiva. Dois números fuzzy A e B são correlacionados segundo a função f ou f -correlacionados se sua distribuição de possibilidade conjunta J é dada por*

$$\begin{aligned} \varphi_J(x, y) &= \varphi_A(x)\chi_{y=f(x)}(x, y) \\ &= \varphi_B(y)\chi_{y=f(x)}(x, y), \end{aligned}$$

em que $\chi_{y=f(x)}(x, y)$ é a função característica do gráfico de f , ou ainda, de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$.

Exemplo 2.7 (Números fuzzy hiperbolicamente interativos) *Considere f sendo uma função hiperbólica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{q}{x} + r, x \neq 0$. Dois números fuzzy A e B são hiperbolicamente interativos se existem $q, r \in \mathbb{R}, q \neq 0$, tais que sua distribuição de possibilidade conjunta J é dada por*

$$\begin{aligned} \varphi_J(x, y) &= \varphi_A(x)\chi_{\frac{q}{x}+r=y}(x, y) \\ &= \varphi_B(y)\chi_{\frac{q}{x}+r=y}(x, y), \end{aligned}$$

em que $\chi_{\frac{q}{x}+r=y}(x, y)$ é a função característica do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{q}{x} + r = y\}$. Nesse caso, $[B]^\alpha = \left\{ \frac{q}{x} + r; x \in [A]^\alpha \right\}, 0 \notin [A]^\alpha$.

Exemplo 2.8 (Operações para números fuzzy hiperbolicamente interativos) As quatro operações aritméticas de números fuzzy hiperbolicamente interativos, para todo $\alpha \in [0, 1]$, são dadas por:

- $[B +_f A]^\alpha = \left\{ \left(\frac{q + x^2}{x} + r \right) \in \mathbb{R}; x \in [A]^\alpha \right\}, 0 \in [A]^0;$
- $[B -_f A]^\alpha = \left\{ \left(\frac{q - x^2}{x} + r \right) \in \mathbb{R}; x \in [A]^\alpha \right\}, 0 \in [A]^0;$
- $[B \cdot_f A]^\alpha = \{(q + xr) \in \mathbb{R}; x \in [A]^\alpha\}, 0 \in [A]^0;$
- $[B \div_f A]^\alpha = \left\{ \left(\frac{q + xr}{x^2} \right) \in \mathbb{R}; x \in [A]^\alpha \right\}, 0 \in [A]^0.$

De modo geral, dados A e B , números fuzzy f -correlacionados, temos $[B]^\alpha = f([A]^\alpha)$. Além disso, para as operações de adição e multiplicação, já sabemos que $[B +_f A] = \{x + f(x); x \in [A]^\alpha\}$ e $[B \cdot_f A] = \{xf(x); x \in [A]^\alpha\}$.

2.1 ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

Deduzimos que para uma função linear $f(x) = qx + r$, temos $[B +_f A] = \{x + qx + r; x \in [A]^\alpha\} = (q + 1)[A]^\alpha + r$ e $[B \cdot_f A] = \{x(qx + r); x \in [A]^\alpha\} = q([A]^\alpha)^2 + r[A]^\alpha$.

Podemos também deduzir que para uma função hiperbólica $f(x) = \frac{q}{x} + r$, vale $[B +_f A] = \left\{ x + \frac{q}{x} + r; x \in [A]^\alpha \right\} = q \left[\frac{1}{A} \right]^\alpha + [A]^\alpha + r$ e $[B \cdot_f A] = \left\{ x \left(\frac{q}{x} + r \right); x \in [A]^\alpha \right\} = q + r[A]^\alpha$.

2.2 EXPONENCIAÇÃO

Primeiro observamos que, dado um número fuzzy A , para todo $\alpha \in [0, 1]$, $[A]^\alpha = [a_1, a_2]$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, podemos definir e^A de modo que $[e^A]^\alpha = [e^{a_1}, e^{a_2}]$. Vejamos que, de fato, e^A é um número fuzzy.

Claramente, para todo $\alpha \in [0, 1]$, $[e^A]^\alpha$ é não vazio. Além disso, para todo $\alpha \in [0, 1]$, $[e^A]^\alpha$ é um intervalo fechado. Sendo $[e^A]^0$ o fecho topológico de $\text{supp } A$, temos que como $[e^A]^0$ é um intervalo fechado, então é um conjunto limitado; logo seu subconjunto, $\text{supp } A$ é também limitado.

Outra função operação que podemos definir é dada pela exponenciação $g(x, y) = e^{x+y}$.

Assim, para as funções apresentadas teremos os seguintes resultados:

Para uma função linear $f(x) = qx + r$, teremos as igualdades $e^{[B +_f A]} = \{e^{x+qx+r}; x \in [A]^\alpha\} = \{e^{(q+1)x+r}; x \in [A]^\alpha\} = [e^{(q+1)a_1+r}, e^{(q+1)a_2+r}]$.

Para uma função hiperbólica $f(x) = \frac{q}{x} + r$, valem as relações $e^{[B +_f A]} = \{e^{x+\frac{q}{x}+r}; x \in [A]^\alpha\} = [e^{a_1+\frac{q}{a_1}+r}, e^{a_2+\frac{q}{a_2}+r}]$.

Agora, tomaremos ainda outro caso de exponenciação, dado por $g(x, y) = e^{xy}$.

Para uma função linear $f(x) = qx + r$, teremos as igualdades $e^{[B \cdot_f A]} = \{e^{x(qx+r)}; x \in [A]^\alpha\} = \{e^{qx^2+rx}; x \in [A]^\alpha\} = [e^{q(a_1)^2+ra_1}, e^{q(a_2)^2+ra_2}]$.

Para uma função hiperbólica $f(x) = \frac{q}{x} + r$, valem as relações $e^{[B \cdot_f A]} = \{e^{x(\frac{q}{x}+r)}; x \in [A]^\alpha\} = \{e^{q+rx}; x \in [A]^\alpha\} = [e^{q+ra_1}, e^{q+ra_2}]$.

2.3 LOGARITMAÇÃO

Outra função operação que podemos definir é a logaritmação, dada por $g(x, y) = \ln(x + y)$.

Assim, para as funções apresentadas teremos os seguintes resultados:

Para uma função linear $f(x) = qx + r$, obtemos $\ln[B +_f A] = \{\ln(x + qx + r); x \in [A]^\alpha\} = \{\ln((q + 1)x + r); x \in [A]^\alpha\} = [\ln(q + 1)a_1 + r, \ln(q + 1)a_2 + r]$.

Para uma função hiperbólica $f(x) = \frac{q}{x} + r$, vale $\ln[B +_f A] = \{\ln x + \frac{q}{x} + r; x \in [A]^\alpha\} = \left[\ln\left(a_1 + \frac{q}{a_1} + r\right), \ln\left(a_2 + \frac{q}{a_2} + r\right) \right]$.

Agora, tomaremos ainda outro caso de logaritmação, dado por $g(x, y) = \ln(xy)$.

Para uma função linear $f(x) = qx + r$, obtemos $\ln[B \cdot_f A] = \{\ln(x(qx + r)); x \in [A]^\alpha\} = \{\ln(qx^2 + rx); x \in [A]^\alpha\} = [\ln(q(a_1)^2 + ra_1), \ln(q(a_2)^2 + ra_2)]$.

Para uma função hiperbólica $f(x) = \frac{q}{x} + r$, vale $\ln[B \cdot_f A] = \left\{ \ln\left(x\left(\frac{q}{x} + r\right)\right); x \in [A]^\alpha \right\} = \{\ln(q + rx); x \in [A]^\alpha\} = [\ln(q + ra_1), \ln(q + ra_2)]$.

Por fim, estudamos modelos de crescimento populacional nos quais o emprego dos números fuzzy hiperbolicamente correlacionados surge naturalmente como aplicação do estudo apresentado.

3 MODELOS MODIFICADOS

Apresentamos nesta seção os modelos de crescimento populacional estudados, bem como os parâmetros que estudamos, todos já estabelecidos na literatura. Na seção seguinte, a partir das ferramentas da Matemática Fuzzy apresentadas, vemos como aprimorar esses modelos, tomando os parâmetros como números fuzzy, e estudamos como alterações em um valor implicam em alterações em outro valor.

A seguir, apresentamos os modelos logístico modificado e de Gompertz modificado que serão denotados, respectivamente, por LMZ e GOM. Depois, apresentamos suas soluções determinísticas, para posteriormente compararmos com suas soluções fuzzy.

3.1 EQUAÇÕES DOS MODELOS

3.1.1 MODELO LOGÍSTICO MODIFICADO

$$LMZ : \begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \mu_{\max} \left(\frac{4}{A} \right) \left[1 - \left(\frac{Y(t)}{A} \right) \right] Y(t) \\ Y(0) = \frac{A}{1 + \exp \left[\lambda \mu_{\max} \left(\frac{4}{A} \right) + 2 \right]} \end{cases} \quad (3)$$

3.1.2 MODELO DE GOMPERTZ MODIFICADO

$$GOM : \begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \mu_{\max} \left(\frac{e}{A} \right) \left[\ln \left(\frac{A}{Y(t)} \right) \right] Y(t) \\ Y(0) = A \exp \left\{ - \exp \left[\frac{\lambda \mu_{\max} e}{A} + 1 \right] \right\} \end{cases} \quad (4)$$

Tanto em LMZ quanto em GOM, temos que A é a capacidade suporte, μ_{\max} é a taxa de crescimento específico máxima e λ é a duração da fase *lag*, isto é, a fase em que o organismo ainda está se adaptando ao meio, com taxa de reprodução baixa.

3.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

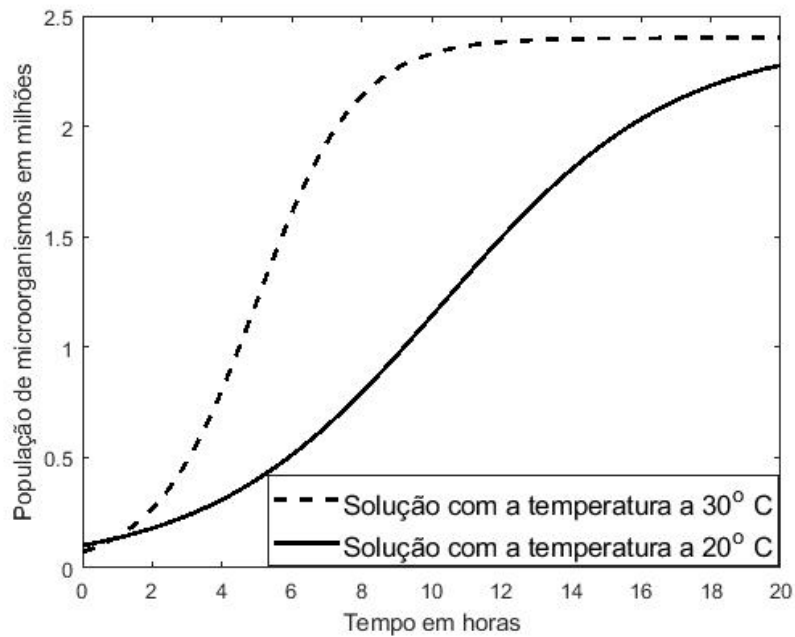
Apresentamos agora as soluções analíticas dos modelos apresentados (Longhi et al., 2013, 2017).

3.2.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO MODELO LOGÍSTICO MODIFICADO

$$Y(t) = \frac{A}{\exp \left[-\mu_{\max} \left(\frac{4}{A} \right) t \right] \left(\exp \left[\lambda \mu_{\max} \left(\frac{4}{A} \right) + 2 \right] \right) + 1} = \frac{A}{\exp \left[\mu_{\max} \left(\frac{4}{A} \right) (\lambda - t) + 2 \right] + 1} \quad (5)$$

O gráfico da solução, para as temperaturas de 20° C e de 30° C, é mostrado na Figura 1 e os valores dos parâmetros que geram os gráficos presentes nas Figuras 1 e 2, bem como todos os dados obtidos empiricamente que são analisados neste estudo, são apresentados por Longhi et al. (2013) e Longhi et al. (2017), dispensando a necessidade de outra verificação dos modelos. Optamos por focar nas soluções para a temperatura de 30° C.

Figura 1 – Solução determinística de LMZ para as temperaturas de 20° C e 30° C



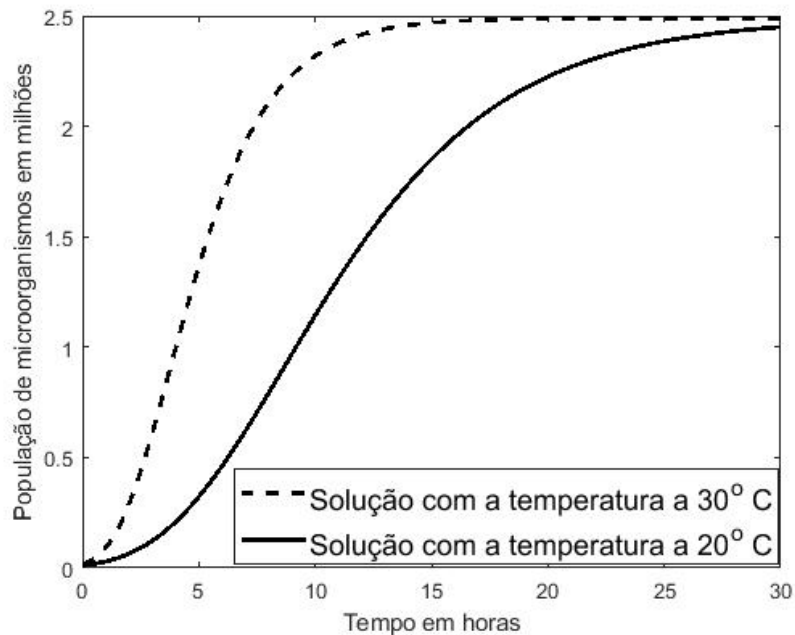
Fonte: Elaboração dos autores.

3.2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO MODELO DE GOMPERTZ MODIFICADO

$$Y(t) = A \exp \left\{ - \exp \left[\left(\mu_{\max} \frac{e}{A} \right) + (\lambda - t) + 1 \right] \right\} \quad (6)$$

De maneira análoga ao modelo logístico modificado, geramos a solução analítica do modelo de Gompertz modificado, usando o *software* Matlab 2019 b.

Figura 2 – Solução determinística de GOM para as temperaturas de 20° C e 30° C



Fonte: Elaboração dos autores.

4 GRÁFICOS DAS SOLUÇÕES FUZZY DOS MODELO LOGÍSTICO MODIFICADO E MODELO DE GOMPERTZ MODIFICADO PARA O PARÂMETRO μ_{max} FUZZY

Apresentamos agora as soluções que tomam os parâmetros μ_{max} e λ como números fuzzy, para incluir previsões de possíveis desvios das soluções determinísticas em nossos modelos. Para a solução fuzzy dos modelos (1) e (2), fizemos a extensão de Zadeh da solução determinística. Neste caso, uma leitura recomendada é Barros, Pedro e Gomes (2015). Posteriormente, estudamos as relações entre os parâmetros μ_{max} e λ , mostrando como os valores de um são definidos dependentemente do outro.

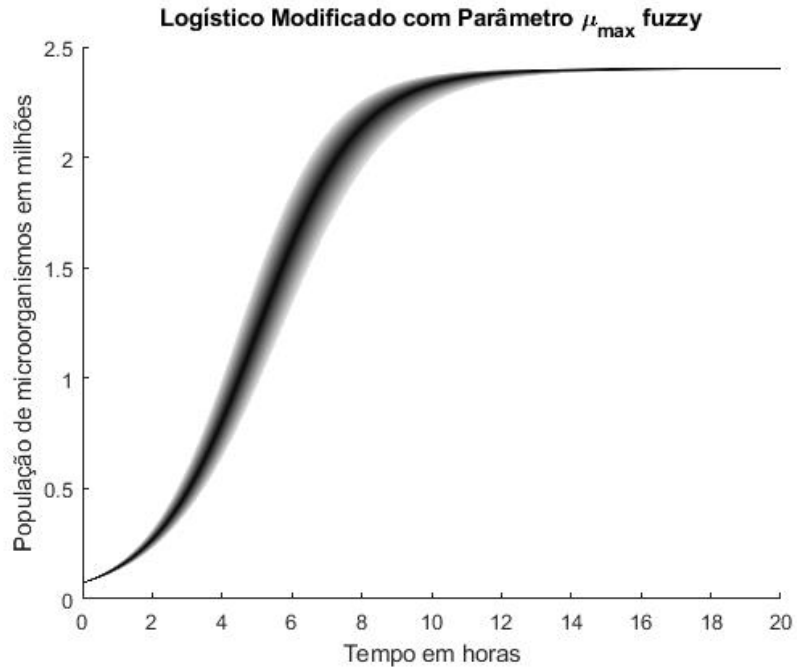
4.1 SOLUÇÃO FUZZY

As Figuras 3 e 4 a seguir mostram os gráficos das soluções fuzzy via princípio de extensão de Zadeh de (1) e (2), de LMZ e GOM para a temperatura de 30° C. Os números fuzzy triangulares têm como ponto central os valores obtidos empiricamente dos parâmetros retirados dos artigos de Longhi et al. (2013) e Longhi et al. (2017). Assim, os números fuzzy usados na temperatura de 30° C para o parâmetro μ_{max} das soluções fuzzy de GOM e LMZ são, respectivamente, (0, 351; 0, 39; 0, 428) e (0, 369; 0, 417, 0, 465).

Com isto, a partir de pequenos desvios estimados nos valores do parâmetro, isto é, a partir de possíveis variações na taxa de crescimento específico máxima do microrganismo, podemos

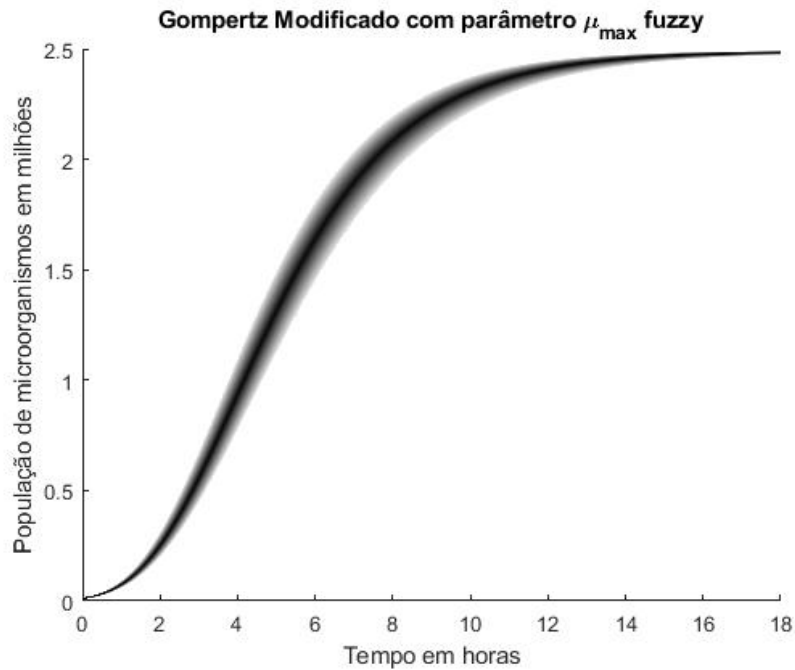
estimar possíveis desvios da solução analítica. Assim, o gradiente nos gráficos representa o grau de pertinência: onde a faixa é mais escura, há uma pertinência maior associada, sendo mais próxima da solução analítica, e um valor com maior possibilidade de ser obtido empiricamente.

Figura 3 – Solução fuzzy de LMZ para a temperatura de 30° C



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 4 – Solução fuzzy de GOM para a temperatura de 30° C



Fonte: Elaboração dos autores.

4.2 SOLUÇÃO FUZZY INTERATIVA PARA O MODELO

Introduzimos agora a solução interativa fuzzy para modelos de crescimento de microrganismos no leite, a saber, os modelos logístico modificado e Gompertz modificado, como apresentado por Longhi et al. (2013). Observamos que os parâmetros μ_{\max} e λ dos modelos LMZ e GOM podem ser relacionados da seguinte forma:

$$\lambda = t_{ifx} - \frac{y_{ifx} - y_0}{\mu_{\max}}. \quad (7)$$

Assim, ao tomarmos μ_{\max} como um número fuzzy, particularmente um número fuzzy triangular da forma $(a; u; b)$, teremos:

$$[\lambda]^\alpha = t_{ifx} - \frac{y_{ifx} - y_0}{[\mu_{\max}]^\alpha}. \quad (8)$$

Note que λ e μ_{\max} são hiberbolicamente correlacionados, conceito apresentado por Cabral e Barros (2015). E, sendo os α -níveis de um número fuzzy triangular da forma $[\mu_{\max}]^\alpha = [\alpha(u - a) + a, \alpha(u - b) + b]$, obtemos:

$$[\lambda]^\alpha = t_{ifx} - \frac{y_{ifx} - y_0}{[\alpha(u - a) + a, \alpha(u - b) + b]}. \quad (9)$$

Agora, finalmente, obtemos a distribuição de possibilidade conjunta J , noção estudada por

Carlsson, Fullér e Majlender (2005) dos números fuzzy λ e μ_{\max} :

$$\varphi_J(x, y) = \varphi_\lambda(x) \chi_{\left\{t_{ifx} - \frac{y_{ifx} - y_0}{x} = y\right\}}(x, y). \quad (10)$$

Passamos a denotar, por simplicidade, $B = t_{ifx}$ e $C = y_{ifx} - y_0$. Assim, poderemos escrever,

$$[\lambda]^\alpha = B - \frac{C}{[\mu_{\max}]^\alpha}. \quad (11)$$

Tomamos agora o modelo Logístico, porém com λ e μ_{\max} sendo números fuzzy. A sua *solução interativa fuzzy* é obtida quando usamos a igualdade anterior para trabalharmos com apenas um parâmetro.

Deste modo, a solução interativa fuzzy do modelo Logístico modificado é dada por:

$$Y(t) = \frac{A}{\exp \left[\mu_{\max} \left(\frac{4}{A} \right) \left(B - \frac{C}{\mu_{\max}} - t \right) + 2 \right] + 1}. \quad (12)$$

De forma análoga, a solução interativa fuzzy do modelo de Gompertz modificado é dada por:

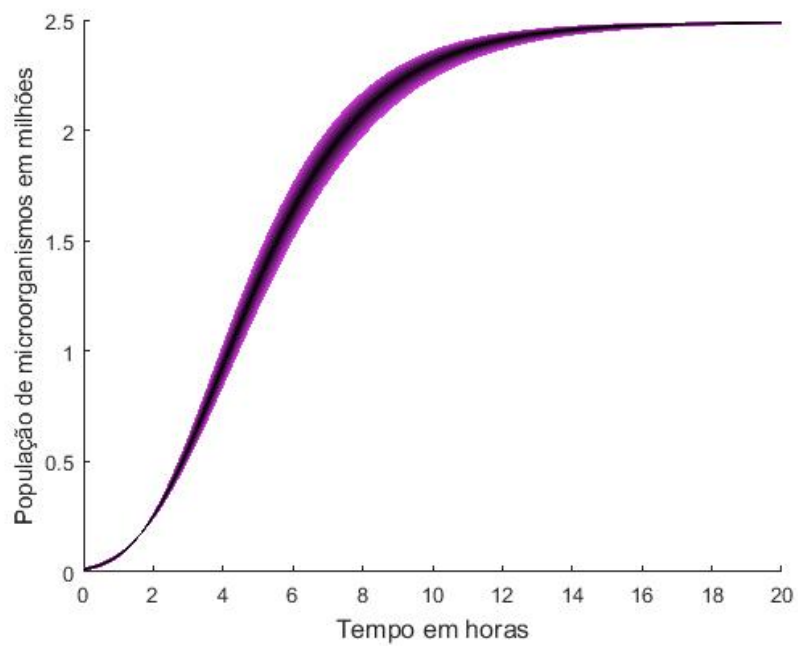
$$Y(t) = A \exp \left\{ - \exp \left[\left(\mu_{\max} \frac{e}{A} \right) + \left(B - \frac{C}{\mu_{\max}} - t \right) + 1 \right] \right\}. \quad (13)$$

Por fim, podemos escrever a solução da seguinte forma:

$$[Y(t)]_J(\mu_{\max}, \lambda)^\alpha = \{y_t(\mu, \lambda); \mu, \lambda \in [J]^\alpha\}. \quad (14)$$

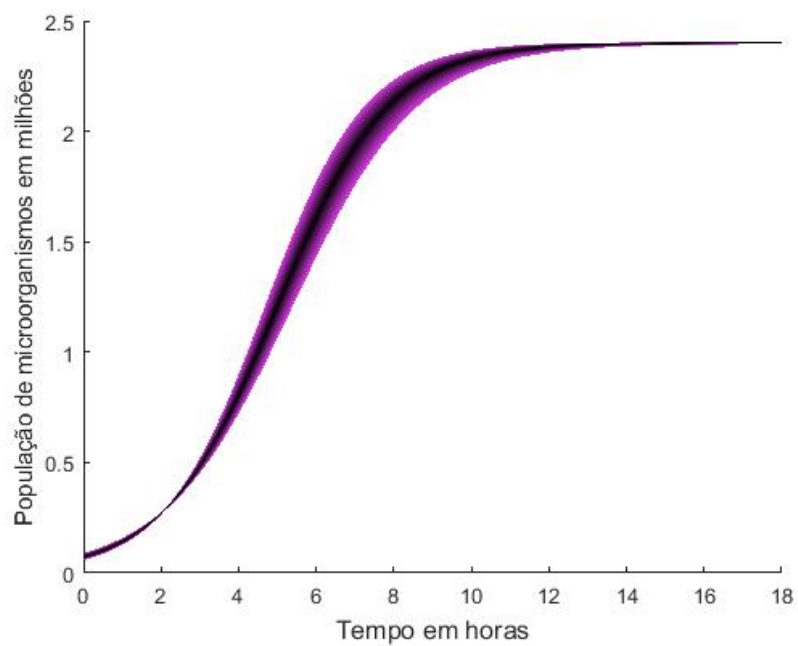
Os gráficos das Figuras 5 e 6 representam a solução interativa fuzzy para os modelos logístico modificado e de Gompertz modificado. As regiões mais destacadas indicam maior grau de pertinência, e uma possibilidade maior de obter dados empíricos nestas regiões.

Figura 5 – Gráfico da solução interativa fuzzy de GOM para 30° C



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 6 – Gráfico da solução interativa fuzzy de LMZ para 30° C



Fonte: Elaboração dos autores.

5 MEDIDA DE INTERATIVIDADE ENTRE λ E μ

Agora, utilizamos métodos estabelecidos na literatura para quantificar a dependência dos parâmetros μ_{\max} e λ nos modelos LMZ e GOM, ou seja, queremos estimar se pequenas perturbações em um dos valores causam grandes perturbações em outro, por exemplo.

Se para $\alpha \in [0, 1]$ qualquer, $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$, com A e B sendo hipercorrelacionados, então, de acordo com Carlsson, Fullér e Majlender (2005), a medida de interatividade entre os números fuzzy A e B , $q \in \mathbb{R}$ é:

$$I_\omega([A], [B]) = \pm \frac{q}{4} \int_0^1 \frac{(a_1^\alpha - a_2^\alpha)^2}{a_1^\alpha a_2^\alpha} \omega(\alpha) d\alpha. \quad (15)$$

Agora, calculamos o índice de interatividade entre os números fuzzy λ e μ_{\max} em relação aos seus α -níveis no modelo logístico modificado. Para isto consideramos o caso em que a temperatura do meio é de 30° Celsius. Para os cálculos tomamos o número fuzzy triangular $[0, 369; 0, 417; 0, 465]$ visto por Longhi et al. (2013). Assim, os seus α -níveis, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ são da forma $[0, 048\alpha + 0, 369, 0, 465 - 0, 048\alpha]$, $a_1^\alpha = 0, 048\alpha + 0, 369$ e $a_2^\alpha = 0, 465 - 0, 048\alpha$.

De acordo com Carlsson, Fullér e Majlender (2005), sabendo que $[\lambda]^\alpha = B - \frac{C}{[\mu_{\max}]^\alpha}$, e $a_1^\alpha - a_2^\alpha = 0, 096 - 0, 096\alpha$ pela seção anterior, teremos:

$$I_\omega(\mu_{\max}, \lambda) = \pm \frac{C}{4} \int_0^1 \frac{(0, 096 - 0, 096\alpha)^2}{(0, 048\alpha + 0, 369)(0, 465 - 0, 048\alpha)} \omega(\alpha) d\alpha, \quad (16)$$

Calculamos então o índice de interatividade tomando:

$$\omega(\alpha) = \frac{\alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1}}{\int_0^1 \alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1} d\alpha}. \quad (17)$$

isto é, ω tem distribuição de probabilidade β , dada por:

$$\beta(a, b) = \int_0^1 \alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1} d\alpha. \quad (18)$$

Os valores a seguir apresentados foram extraídos do artigo de Longhi et al. (2013). Então, para os valores: $y_0 = 0, 1$ e $y_{ifx} = 1, 5$, temos $C = 1, 4$, além de $A = 2, 63$ e $B = 6$. Assim,

$$[\lambda]^\alpha = 6 - \frac{1, 4}{[0, 048\alpha + 0, 369, 0, 465 - 0, 048\alpha]}. \quad (19)$$

Por fim, apresentamos a Tabela 1 com o índice de interatividade dos parâmetros λ e μ_{\max} , com alguns valores de $\beta(a, b)$. Observamos que, em geral, estes índices são consideravelmente baixos, indicando pouca interação entre os parâmetros. Isto significa que variações na taxa de

crescimento específico máximo não causam grandes desvios na duração da fase *lag*.

Tabela 1 – Verificações numéricas

$\beta(a, b)$	$\beta(2, 1)$	$\beta(3, 2)$	$\beta(4, 3)$
$I_{\omega}(\mu_{\max}, \lambda)$	0,0031081295	0,003727605	0,0000665434
$\beta(a, b)$	$\beta(3, 1)$	$\beta(4, 2)$	$\beta(5, 3)$
$I_{\omega}(\mu_{\max}, \lambda)$	0,0018620385	0,002659769	0,0031028515
$\beta(a, b)$	$\beta(5, 1)$	$\beta(10, 5)$	$\beta(1000, 50)$
$I_{\omega}(\mu_{\max}, \lambda)$	0,0008852795	2.3220410^{-7}	0,00004286485

Fonte: Elaboração dos autores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho encontramos a solução fuzzy dos modelos logístico modificado e de Gompertz modificado, contemplando, assim, as incertezas dos parâmetros μ e λ . Verificamos que estes parâmetros se relacionam, então encontramos a solução fuzzy interativa dos modelos LMZ e GOM e a medida de interatividade entre os modelos para o crescimento de microrganismos no leite. Os índices de interatividade que foram obtidos são considerados baixos, levando a poucas alterações no comportamento de um parâmetro fuzzy quando os valores do outro são alterados. Em suma, ainda que possamos relacionar incertezas nos parâmetros com as incertezas nos modelos e possamos definir um parâmetro em função do outro, na prática, há pouca interação entre os parâmetros, isto é, possíveis desvios em um parâmetro não causam desvios significativos no outro.

REFERÊNCIAS

BARROS, Laécio Carvalho de; BASSANEZI, Rodney Carlos. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas, SP: Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010.

BARROS, Laécio Carvalho de; BASSANEZI, Rodney Carlos; LODWICK, Weldon Alexander. **A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics: Theory and Applications**. [S.l.]: Springer, 2017.

BARROS, Laécio Carvalho de; PEDRO, Francielle Santo; GOMES, Luciana Takata. Diferenças entre números fuzzy. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 3, n. 1, 2015. DOI:

<https://doi.org/10.5540/03.2015.003.01.0067>.

CABRAL, Valtemir Martins; BARROS, Laécio Carvalho de. Fuzzy differential equation with completely correlated parameters. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 265, p. 86–98, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.08.007>.

CABRAL, Valtemir Martins; PRATA, Roberto Antônio Cordeiro; BARROS, Laécio Carvalho de. f-correlated fuzzy numbers applied to HIV model with protease inhibitor therapy. **Mathware & soft computing: The Magazine of the European Society for Fuzzy Logic and Technology**, v. 22, n. 1, p. 46–51, 2015. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5980356>. Acesso em: 27 jun. 2025.

CABRAL, Valtemir Martins; PRATA, Roberto Antônio Cordeiro; BARROS, Laécio Carvalho de. Operações com números fuzzy f-correlacionados. **Biomatemática**, v. 23, p. 15–32, 2013.

CARLSSON, Christer; FULLÉR, Robert; MAJLENDER, Péter. Additions of completely correlated fuzzy numbers. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (IEEE Cat. No.04CH37542), 2004, Budapest, Hungary. [S.l.]: IEEE, 2004. v. 1, p. 535–539. DOI: <https://www.doi.org/10.1109/FUZZY.2004.1375791>.

CARLSSON, Christer; FULLÉR, Robert; MAJLENDER, Péter. On possibilistic correlation. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 155, n. 3, p. 425–445, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.04.014>.

CECCONELLO, Moiseis dos Santos. **Sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy: aplicações em biomatemática**. 2010. Tese (Doutorado) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1611168>. Acesso em: 15 out. 2023.

COROIANU, Lucian; FULLÉR, Robert. On additivity of the weighted possibilistic mean operator. In: IEEE 14th INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE AND INFORMATICS (CINTI), 2013, Budapest, Hungary. [S.l.]: IEEE, 2013. P. 303–308. DOI: <https://doi.org/10.1109/CINTI.2013.6705211>.

COROIANU, Lucian; FULLÉR, Robert. On multiplication of interactive fuzzy numbers. In: IEEE 11th INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT SYSTEMS AND INFORMATICS (SISY), 2013, Subotica, Serbia. [S.l.]: IEEE, 2013. P. 181–185. DOI: <https://doi.org/10.1109/SISY.2013.6662566>.

FULLÉR, Robert; MAJLENDER, Péter. On interactive fuzzy numbers. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 143, n. 3, p. 355–369, 2004. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(03\)00180-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(03)00180-5).

LONGHI, Daniel Angelo; DALCANTON, Francieli; ARAGÃO, Gláucia Maria Falcão de; CARCIOFI, Bruno Augusto Mattar; LAURINDO, João Borges. Assessing the prediction ability of different mathematical models for the growth of *Lactobacillus plantarum* under non-isothermal conditions. **Journal of Theoretical Biology**, v. 335, p. 88–96, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2013.06.030>.


LONGHI, Daniel Angelo; DALCANTON, Francieli; ARAGÃO, Gláucia Maria Falcão de; CARCIOFI, Bruno Augusto Mattar; LAURINDO, João Borges. Microbial growth models: A general mathematical approach to obtain μ max and λ parameters from sigmoidal empirical primary models. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v. 34, n. 2, p. 369–375, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1590/0104-6632.20170342s20150533>.


MIZUKOSHI, Marina Tuyako. **Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy**. 2004. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

ZADEH, Lotfi Asker. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).

SOBRE OS AUTORES

Me. Diogo Sampaio da Silva


 <https://orcid.org/0009-0000-5597-1355>


 <http://lattes.cnpq.br/1401469043033888>

Contato: sampaiodiogo.dasilva@gmail.com

Contribuição autoral: escrita – primeira redação; escrita – revisão e edição.

Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata


 <https://orcid.org/0000-0001-7578-1014>


 <http://lattes.cnpq.br/5159150780688575>

Contato: praroberto@gmail.com

Contribuição autoral: administração do projeto; escrita – revisão e edição; supervisão.

Dra. Sílvia Dias de Souza

 <https://orcid.org/0000-0002-6862-7307>

 <http://lattes.cnpq.br/7707988407123681>

Contato: silviadss@gmail.com

Contribuição autoral: escrita – revisão e edição; software; supervisão.