HIPÉRBOLE, INVERSÃO GEOMÉTRICA E UM PROBLEMA DE CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULO

HYPERBOLE, GEOMETRIC INVERTION AND A TRIANGLE CONSTRUCTION PROBLEM

HIPÉRBOLA, INVERSIÓN GEOMÉTRICA Y PROBLEMA DE CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

Dulce Mary Almeida[1], Júlio César Costa[1]

[1] Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Data de submissão: 19 jul. 2024. Data de aprovação: 21 fev. 2025. Financiamento: os autores declaram não haver. Como citar: ALMEIDA, Dulce Mary; COSTA, Júlio César. Hipérbole, inversão geométrica e um problema de construção de triângulo. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 11, p. e302, 31 maio 2025. https://doi.org/10.35819/remat2025v11id7374.

Resumo: A inversão geométrica é uma importante transformação que permite converter problemas aparentemente complicados em problemas análogos, mas com soluções mais simples. No artigo apresentamos a definição da inversão geométrica, a caracterização do que ocorre com retas e circunferências quando submetidas a uma inversão e a propriedade de preservação de ângulos dessa transformação. O objetivo do trabalho é a aplicação da inversão geométrica na resolução do problema de construção com régua e compasso dos pontos de intersecção de uma reta com uma hipérbole e na solução do seguinte Problema de Regiomontanus: Determinar um triângulo dada a diferença entre dois lados, a altura relativa ao terceiro lado e a diferença entre os segmentos em que a altura divide o terceiro lado. A solução original desse problema é feita apenas para um caso particular específico, de maneira algébrica, via a determinação da raiz de uma equação quadrática e, difere substancialmente da solução geométrica apresentada neste artigo que contempla o caso geral, aborda o problema usando uma linguagem moderna e faz uso de uma hipérbole e da inversão geométrica em sua solução.
Palavras-chave: inversão geométrica; hipérbole; Problema de Regiomontanus.

Abstract: Geometric inversion is an important transformation that allows to convert apparently complicated problems into analogous ones, but with simpler solutions. In the article we present the definition of geometric inversion, the characterization of what happens with straight lines and circles when submitted to an inversion and the angle-preserving property of this transformation. The aim of the work is the application of geometric inversion in solving the problem of constructing with ruler and compasses the intersection points of a straight line with a hyperbola and in solving the following Regiomontanus's Problem: to determine a triangle given the difference between two sides, the height relative to the third side and the difference between the segments in which the height divides the third side. The original solution of this problem is made only for a specific particular case, in an algebraic way, via the determination of the root of a quadratic equation and, differs substantially from the geometric solution presented in this article which contemplates the general case, approaches the problem using a modern language and makes use of a hyperbola and geometric inversion in its solution.
Keywords: geometric inversion; hyperbola; Regiomontanus's problem.

Resumen: La inversión geométrica es una transformación importante que permite convertir problemas aparentemente complicados en problemas análogos, pero con soluciones más simples. En el artículo presentamos la definición de inversión geométrica, la caracterización de lo que sucede con las rectas y

circunferencias cuando se someten a una inversión y la propiedad de preservación de los ángulos en esta transformación. El objetivo del trabajo es aplicar la inversión geométrica en la resolución del problema de construir, con regla y compás, los puntos de intersección de una recta con una hipérbola, así como en la resolución del siguiente Problema de Regiomontanus: determinar un triángulo dada la diferencia entre dos lados, la altura relativa al tercer lado y la diferencia entre los segmentos en los que la altura divide dicho lado. La solución original de este problema se realiza sólo para un caso particular particular, de forma algebraica, mediante la determinación de la raíz de una ecuación cuadrática. Esta solución difiere sustancialmente de la solución geométrica presentada en este artículo, la cual contempla el caso general, se aproxima al problema utilizando un lenguaje moderno y hace uso de una hipérbola y de la inversión geométrica en su solución.
Palabras clave: inversión geométrica; hipérbola; problema de Regiomontanus.

1 INTRODUÇÃO

A inversão geométrica tem sido utilizada como uma ferramenta fundamental na resolução de problemas de geometria. Ela possui uma série de propriedades interessantes, como a preservação de tangências, a inversão de pontos no infinito e a preservação de ângulos entre os elementos transformados. Devido as suas propriedades, a inversão geométrica permite simplificar e transformar problemas complexos em situações mais simples, facilitando a compreensão e a resolução dos mesmos. É uma transformação de grande importância no estudo da Geometria Hiperbólica Plana, especificamente, as isometrias do modelo do semiplano superior para o espaço hiperbólico são constituídas de composições das inversões ordinárias em retas e das inversões em círculos (veja Rocha (1990) para mais detalhes). O plano hiperbólico, junto com o plano euclidiano e as esferas mergulhadas em R^3, constituem todos os exemplos de superfícies de dimensão dois simplesmente conexas de curvatura seccional constante. Sua importância no estudo de Geometria Diferencial é inestimável.

Diante da relevância do tema, este artigo[3] tem como objetivo explorar os principais aspectos da inversão geométrica, particularmente estabecendo algumas de suas propriedades, introduzindo o leitor ao estudo do tema de forma motivacional por meio da apresentação de duas aplicações no contexto da geometria plana, especificamente na construção com régua e compasso dos pontos de intersecção de uma reta com uma hipérbole e na solução do seguinte problema de construção de um triângulo devido a Johann Müller (1436–1476), mais conhecido como Regiomontanus, enunciado 23 do Livro II de sua obra *De Triangulis Omnimodis* (Regiomontanus, 1967, p. 127-128): Determinar um triângulo dada a diferença entre dois lados, a altura relativa ao terceiro lado e a diferença entre os segmentos em que a altura divide o terceiro lado.

De acordo com Eves (2011), na obra *De Triangulis Omnimodis*, Regiomontanus revela particular interesse na determinação de um triângulo, satisfeitas três condições dadas, como por exemplo, 23 do Livro II. A demonstração apresentada por ele aplica álgebra. Segundo Boyer

[3]Este artigo é parte da dissertação de mestrado defendida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT UFU, organizada em formato multipaper, orientada pela primeira autora e defendida pelo segundo autor.

(1974) e Eves (2011) a álgebra é retórica, achando-se uma parte incógnita da figura como raiz de uma equação quadrática e essa raiz pode ser construída por métodos familiares de *Os Elementos de Euclides*. Embora seus métodos possam ser considerados gerais, ele atribuía nas demonstrações valores numéricos específicos às partes dadas. No caso específico os valores considerados na demonstração são 3, 10 e 12, assumidos segundo a ordem do enunciado (veja demonstração em Regiomontanus (1967, p. 127-128)). Embora essa demonstração possa ser adaptada para o caso geral, nosso objetivo é apresentar uma solução geométrica, utilizando o método das construções geométricas (via régua e compasso) de forma a utilizar 23 como uma aplicação da inversão geométrica, exibindo uma abordagem muito diferente da solução particular algébrica apresentada em Regiomontanus (1967).

A denominação Problema de Regiomontanus para se referir a 23 do Livro II se encontra em Spira (2004) e Eves (2011). E, a ideia dessa solução geométrica foi extraída de Spira (2004), cujo objetivo do texto é muito mais amplo e, nessa parte específica, muitas das afirmações são deixadas como exercícios ou carecem de mais detalhamento para uma maior entendimento do texto.

Esperamos que este artigo embasado em sólida fundamentação teórica e complementado com algumas ilustrações, contribua para um melhor entendimento dos aspectos matemáticos teóricos, aplicados e geométricos da inversão em circunferência, facilite a compreensão do enunciado do Problema de Regiomontanus, bem como de sua solução de um ponto de vista geométrico muito diferente da solução original, fazendo uso dos pontos de intersecção de uma hipérbole com uma reta os quais emergem como possibilidades de aplicações da inversão em uma circunferência, e seja uma referência para todos os estudantes que pretendam aprofundar seus estudos nesse tema.

2 INVERSÃO GEOMÉTRICA: DEFINIÇÃO, PROPRIEDADES E CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Iniciamos a seção com a definição de inverso de um ponto em relação a uma circunferência.

Definição 2.1 (Inverso de um ponto (Spira, 2004, p. 7)) *Sejam $\mathscr{C}$ a circunferência em $\mathbb{R}^2$ de centro O e raio r e P um ponto em $\mathbb{R}^2$ distinto do ponto O. O inverso do ponto P relativo à circunferência $\mathscr{C}$ é o ponto $\widetilde{P} \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz as seguintes condições:*

i) $\widetilde{P}$ *pertence à semirreta com origem em O e passando pelo ponto P.*

ii) O produto da distância de O a P, $d(O,P)$, pela distância de O a $\widetilde{P}$, $d(O,\widetilde{P})$, é igual ao quadrado do raio da circunferência $\mathscr{C}$, isto é, $d(O,P)\cdot d(O,\widetilde{P}) = r^2$.

É importante observar que se $P \in \mathscr{C}$ então P coincide com $\widetilde{P}$. Também, é importante destacar que essa definição não faz sentido quando aplicada ao centro O da circunferência $\mathscr{C}$, mas podemos estender o conceito de inverso de um ponto em relação à $\mathscr{C}$ para o ponto O observando que a condição $d(O,P)\cdot d(O,\widetilde{P}) = r^2$ implica em $d(O,P)\to 0$ se, e somente se $d(O,\widetilde{P})\to\infty$. Assim, se queremos definir o inverso do ponto O, este inverso deve estar infinitamente longe de O, ou seja, fora do plano. Postulamos então a existência de um ponto ideal, que denotamos por ∞, tal que $\widetilde{O}=\infty$ e, observando também que $d(O,P)\to\infty$ se, e somente se, $d(O,\widetilde{P})\to 0$, devemos também postular $\widetilde{\infty}=O$. O plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ ao qual se adicionou o ∞, $\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$, será denotado por $\mathbf{E}_\infty$ e denominado o plano inversivo.

Segue, então, a definição da transformação de inversão relativa a uma circunferência.

Definição 2.2 (Inversão geométrica (Spira, 2004, p. 8)) *Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência em $\mathbb{R}^2$ de centro O e raio r. A transformação $i_{\mathscr{C}}\colon\mathbf{E}_\infty\to\mathbf{E}_\infty$ que leva qualquer $P\in\mathbf{E}_\infty$ em seu inverso com relação à $\mathscr{C}$ é dita a inversão com respeito à $\mathscr{C}$. O ponto O é dito o centro ou polo de inversão, $\mathscr{C}$ a circunferência de inversão e r a potência de inversão.*

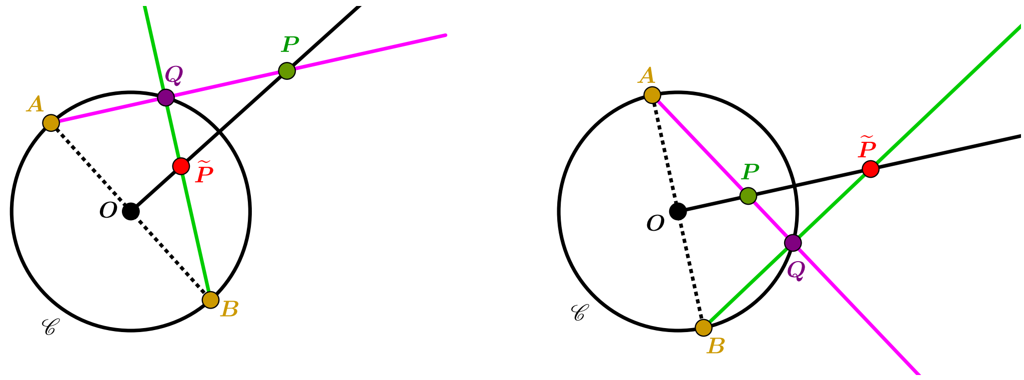
Dado uma circunferência $\mathscr{C}$ em $\mathbb{R}^2$ de centro O e raio r e um ponto $P\in\mathbb{R}^2$, $P\neq O$, $P\notin\mathscr{C}$, vamos descrever um procedimento para a construção geométrica (via régua e compasso) do inverso de P relativo à $\mathscr{C}$.

Construção geométrica (com régua e compasso) do inverso de P

1. Trace a semirreta $\overrightarrow{OP}$;
2. Trace o diâmetro $\overline{AB}$ da circunferência $\mathscr{C}$, perpendicular à $\overrightarrow{OP}$;
3. Trace a semirreta $\overrightarrow{AP}$;
4. Construa o ponto Q distinto de A, ponto de intersecção de $\overrightarrow{AP}$ com a circunferência $\mathscr{C}$;
5. Trace a semirreta $\overrightarrow{BQ}$;
6. Construa o ponto $\tilde{P}$, ponto de intersecção de $\overrightarrow{BQ}$ com $\overrightarrow{OP}$.

Afirmação: O ponto $\widetilde{P}$, assim construído, é o inverso do ponto P relativo à $\mathscr{C}$, independente se P é exterior ou interior à $\mathscr{C}$.

Figura 1 – Construção do inverso de um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ relativo à circunferência $\mathscr{C}$ com $P \notin \mathscr{C}$



Fonte: Elaboração dos autores.

Justificativa: Note que os triângulos $Q\tilde{P}P$ e $O\tilde{P}B$ são triângulos retângulos e semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo, uma vez que:

a. $\angle Q\tilde{P}P \cong \angle O\tilde{P}B$;

b. $m(\angle \tilde{P}QP) = m(\angle \tilde{P}OP) = 90°$.

Note também que os triângulos OAP e $Q\tilde{P}P$ são triângulos retângulos e semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo, uma vez que:

c. $m(\angle AOP) = m(\angle \tilde{P}QP) = 90°$;

d. $\angle APO \cong \angle \tilde{P}PQ$.

Com isso, tem-se:

$$\frac{d(O,P)}{d(O,A)} = \frac{d(O,B)}{d(O,\widetilde{P})} \Rightarrow d(O,P)\cdot d(O,\widetilde{P}) = d(O,A)\cdot d(O,B) \Rightarrow d(O,P)\cdot d(O,\widetilde{P}) = r^2.$$

Portanto, temos que $\widetilde{P}$ é o inverso de P.

Propriedades da inversão geométrica

A seguir vamos enunciar algumas propriedades da inversão geométrica que serão de utilidade neste artigo. Demonstrações dessas propriedades são encontradas em Spira (2004). Nas cinco proposições que seguem, considere a circunferência de inversão $\mathscr{C}$ em $\mathbb{R}^2$ de centro O e raio r.

Proposição 2.3 (Inversão de uma reta que não passa por O) *Se α é uma reta em $\mathbb{R}^2$ tal que $O \notin \alpha$, então $i_{\mathscr{C}}(\alpha \cup \infty)$ é a circunferência que tem o segmento $O\widetilde{P}$ como diâmetro, sendo P o ponto de intersecção de α com a reta perpendicular à α que passa pelo ponto O e $\widetilde{P} = i_{\mathscr{C}}(P)$.*

Proposição 2.4 (Inversão de uma reta que passa por O) *Se α é uma reta em $\mathbb{R}^2$, $O \in \alpha$ e $\widetilde{\alpha} = \alpha \cup \{\infty\}$, então $i_{\mathscr{C}}(\widetilde{\alpha}) = \widetilde{\alpha}$.*

Proposição 2.5 (Inversão de uma circunferência que não passa por O) *Se $\mathscr{D}$ é uma circunferência tal que $O \notin \mathscr{D}$ então, $i_{\mathscr{C}}(\mathscr{D})$ é a circunferência, que também não passa por O, cujo diâmetro é o segmento $\widetilde{N}\widetilde{M}$ sendo $\overline{MN}$ o diâmetro da circunferência $\mathscr{D}$ contido na reta que passa por O, $i_{\mathscr{C}}(M) = \widetilde{M}$, $i_{\mathscr{C}}(N) = \widetilde{N}$, M entre O e N.*

Proposição 2.6 (Inversão de uma circunferência que passa por O) *Se $\mathscr{D}$ é uma circunferência em $\mathbb{R}^2$ tal que $O \in \mathscr{D}$, então $i_{\mathscr{C}}(\mathscr{D}) = \alpha \cup \{\infty\}$ sendo α a reta perpendicular a $\overline{OP}$ passando por $i_{\mathscr{C}}(P)$ onde P é o ponto em $\mathscr{D}$ diametralmente oposto ao ponto O.*

Proposição 2.7 (Ângulo entre as inversas de duas retas concorrentes) *Sejam m e n duas retas concorrentes em P diferente de O. Então, $i_{\mathscr{C}}(m) = \widetilde{m}$ e $i_{\mathscr{C}}(n) = \widetilde{n}$ se interceptam em $i_{\mathscr{C}}(P) = \widetilde{P}$ e o ângulo entre $\widetilde{m}$ e $\widetilde{n}$ em $\widetilde{P}$ tem a mesma medida que o ângulo entre as retas m e n.*

3 DUAS DEFINIÇÕES DE HIPÉRBOLE E UMA CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Começamos lembrando a definição usual da cônica hipérbole que aparece nos livros de Geometria Analítica.

Definição 3.1 (Hipérbole dados os focos (Delgado; Frensel; Crissaf, 2017, p. 122)) *Uma hipérbole $\mathscr{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.*

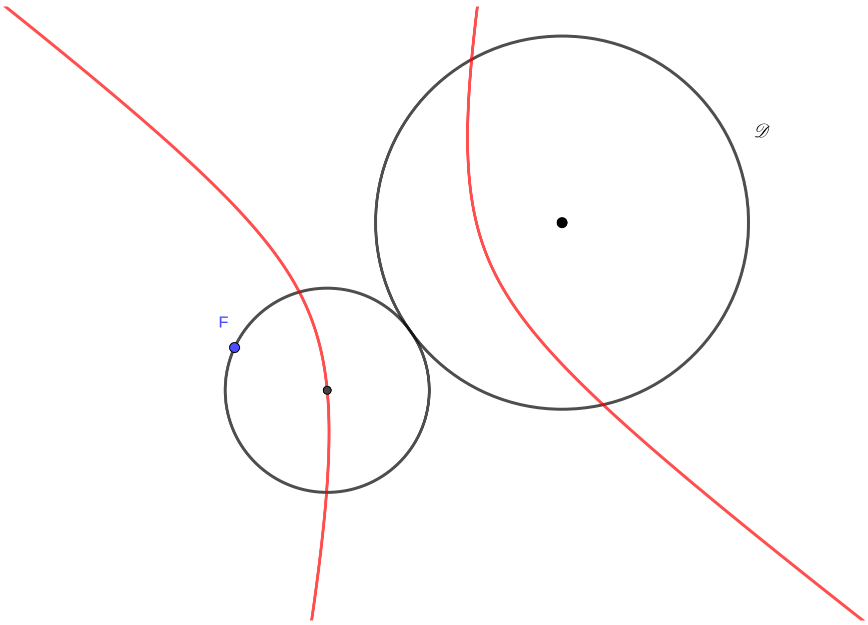
$\mathscr{H} = \{P||d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$, $0 < a < c$, $d(F_1, F_2) = 2c$.

Para o nosso trabalho, vamos utilizar a definição equivalente que se encontra em Spira (2004).

Definição 3.2 (Hipérbole dados uma circunferência e um ponto exterior a ela (Spira, 2004, p. 20)) *Sejam $\mathscr{D}$ uma circunferência e F um ponto exterior à $\mathscr{D}$. Uma hipérbole $\mathscr{H} = (F, \mathscr{D})$ é o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F e são tangentes à $\mathscr{D}$.*

Vamos mostrar agora que a Definição 3.1 e a Definição 3.2 são equivalentes, tomando $F_1 = F$, $F_2 = O$ (centro da circunferência $\mathscr{D}$) e $2a = r$ (raio de $\mathscr{D}$).

Figura 2 – Hipérbole com os dados da Definição 3.2



Fonte: Elaboração dos autores.

De fato, de acordo com a Definição 3.2, P é o centro de uma circunferência $\mathscr{C}$ de raio s tangente (exteriormente ou interiormente) à circunferência $\mathscr{D}$ de raio r. E isso ocorre se, e somente se,

i) $d(O, P) = r + s$ ou $d(O, P) = |r - s|$.
   Além disso, como $\mathscr{C}$ passa por F, devemos ter:

ii) $d(P, F) = s$.
   Também, a hipótese de F ser exterior à $\mathscr{D}$ impõe, no caso de $\mathscr{C}$ ser tangente interiormente à $\mathscr{D}$, a condição:

iii) $s > r$.

Assim, usando i), ii) e iii), temos: P é o centro de uma circunferência que passa por F e é tangente à $\mathscr{D}$, sendo F exterior à $\mathscr{D}$ se, e somente se, $d(O, P) = r + d(P, F)$ ou $d(O, P) = d(P, F) - r$ se, e somente se, $|d(O, P) - d(P, F)| = r$; ou seja, a Definição 3.1 e a Definição 3.2 são equivalentes.

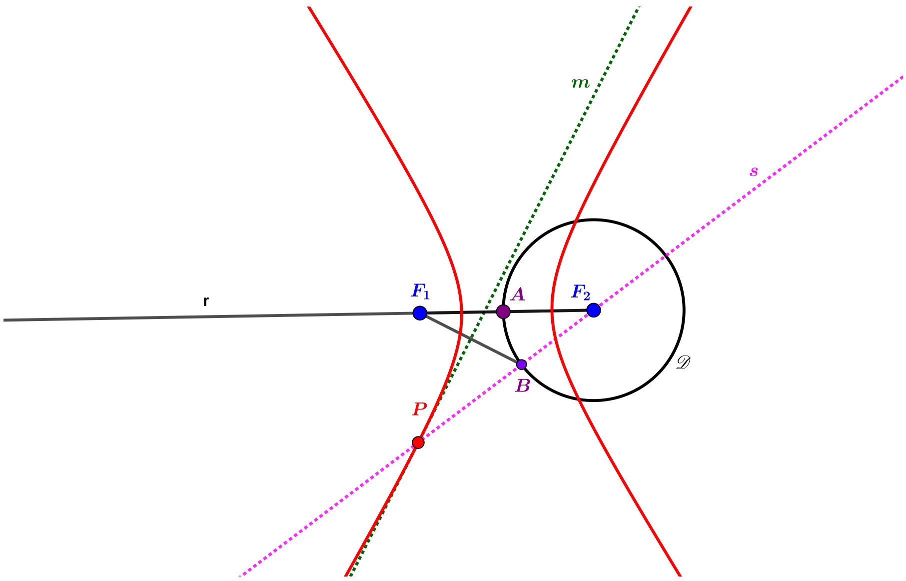
A seguir, apresentaremos a construção de uma hipérbole que se encontra em Delgado, Frensel e Crissaf (2017) e pode ser implementada no GeoGebra utilizando o recurso lugar geométrico.

Construção no GeoGebra: Hipérbole de Focos F_1 e F_2

1. Escolha dois pontos F_1 e F_2 e trace a semirreta r de origem F_2 passando por F_1;
2. Escolha um ponto A na semirreta r entre F_1 e F_2;
3. Trace a circunferência $\mathscr{D}$ de centro F_2 que passa pelo ponto A;
4. Escolha um ponto B que pertença à circunferência $\mathscr{D}$ e que seja diferente de A;
5. Trace a reta s que passa por F_2 e B;
6. Trace a mediatriz m do segmento BF_1;
7. Determine o ponto P de intersecção da reta s com a mediatriz m;
8. Construa o lugar geométrico do ponto P, quando o ponto B move-se ao longo da circunferência $\mathscr{D}$.

Afirmação: O ponto P descreve a hipérbole de focos F_1 e F_2 com comprimento do eixo focal igual ao raio de $\mathscr{D}$, quando o ponto B se move ao longo da circunferência $\mathscr{D}$.

Figura 3 – Hipérbole de focos F_1 e F_2



Fonte: Elaboração dos autores.

Justificativa: Da construção realizada, o ponto P pertence à mediatriz do segmento BF_1 e, portanto, $d(P, B) = d(P, F_1)$. Sendo $2a$ o raio da circunferência $\mathscr{D}$, segue que $|d(P, F_2) - d(P, F_1)| = |d(P, B) \pm d(B, F_2) - d(P, F_1)| = | \pm d(B, F_2)| = | \pm 2a| = 2a$, uma vez que F_2, B e P são colineares e F_1 é exterior à $\mathscr{D}$. Logo, P pertence à hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo focal de comprimento $2a$.

Reciprocamente, da equivalência entre a Definição 3.1 e a Definição 3.2 de hipérbole, o ponto P pertence à hipérbole de focos F_1 e F_2 com comprimento focal igual ao raio $2a$ se, e somente se, P é o centro de uma circunferência que passa por F_1 tangente à circunferência $\mathscr{D}$ de centro F_2 e raio $2a$. Denotando por B o ponto de tangência, segue que: se P pertence à hipérbole $\mathscr{H} = (F_1, \mathscr{D})$, então P, B e F_2 são colineares e $d(P, F_1) = d(P, B)$; logo, P é o ponto de intersecção da reta s determinada por F_2 e B com a mediatriz m do segmento BF_1.

4 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS PONTOS DE INTERSECÇÃO DE UMA HIPÉRBOLE COM UMA RETA

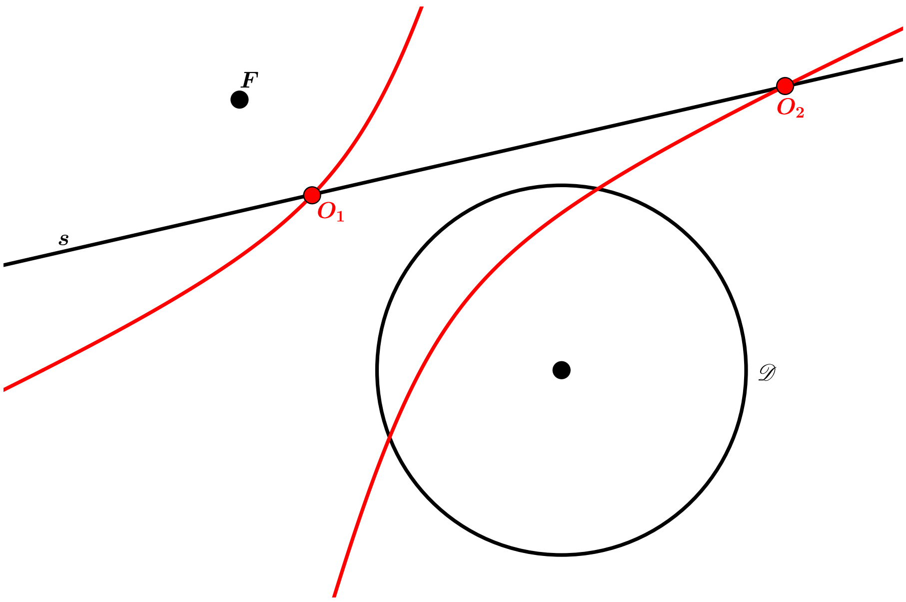
O objetivo agora é apresentar a solução de um belo problema devido à Johann Müller Regiomontanus (1436–1476) extraído de Regiomontanus (1967).

Antes porém, precisamos construir os dois pontos de intersecção de uma reta s com uma hipérbole $\mathscr{H} = (F, \mathscr{D})$. É claro que a existência desses dois pontos de intersecção impõe algumas condições restritivas aos elementos dados s, F e $\mathscr{D}$. Em linguagem de circunferências, temos de solucionar o seguinte problema de construção geométrica:

Problema I: Construção geométrica dos pontos de intersecção de uma hipérbole com uma reta

Dados uma reta s, uma circunferência $\mathscr{D}$, um ponto F exterior à $\mathscr{D}$ tal que $F \notin s$, construir (com régua e compasso), caso existam, os dois pontos de intersecção O_1 e O_2 da hipérbole $\mathscr{H} = (F, \mathscr{D})$ com a reta s, um em cada ramo da hipérbole.

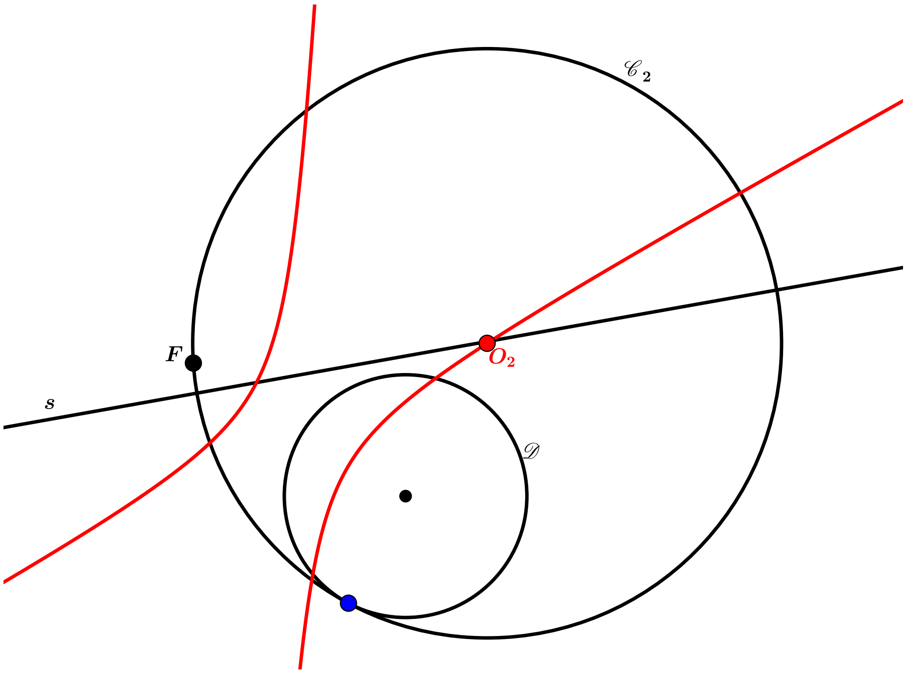
Figura 4 – Visualização dos dados e das soluções do Problema I



Fonte: Elaboração dos autores.

Solução: Usando a Definição 3.2 de hipérbole, deduzimos que os pontos O_1 e O_2, caso existam, são os pontos em s que são centros das circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ que passam por F e são tangentes à $\mathscr{D}$, digamos $\mathscr{C}_1$ tangente exteriormente e $\mathscr{C}_2$ tangente interiormente.

Figura 5 – Visualização das soluções do Problema I no contexto da Definição 3.2 de hipérbole



Fonte: Elaboração dos autores.

Utilizando a inversão geométrica, apresentamos na sequência os passos da construção que solucionam o Problema I.

1. Construa uma circunferência de inversão $\mathscr{A}$ com centro em F.

2. Construa $\widetilde{s}$, a inversa da reta s em relação a $\mathscr{A}$. É claro, da Proposição 2.3, que $\widetilde{s}$ é uma circunferência que passa por F;

3. Construa $\widetilde{\mathscr{D}}$, a inversa da circunferência $\mathscr{D}$ em relação a $\mathscr{A}$. A Proposição 2.5 afirma que $\widetilde{\mathscr{D}}$ é uma circunferência que não passa por F. E, é claro que $\widetilde{\mathscr{D}} \cap \widetilde{s} = \varnothing$, pois $\mathscr{D} \cap s = \varnothing$;

4. Construa as duas retas u e t que passam pelo centro de $\widetilde{s}$ e são tangentes à $\widetilde{\mathscr{D}}$ (aqui precisamos impor a condição restritiva: centro de $\widetilde{s}$ exterior à $\widetilde{\mathscr{D}}$);

5. Construa as respectivas inversas $\widetilde{u}$ e $\widetilde{t}$ de u e t relativas a $\mathscr{A}$. A Proposição 2.3 garante que $\widetilde{u}$ e $\widetilde{t}$ são circunferências que passam por F;

6. Construa os centros O_1 e O_2 de $\widetilde{u}$ e $\widetilde{t}$, respectivamente.

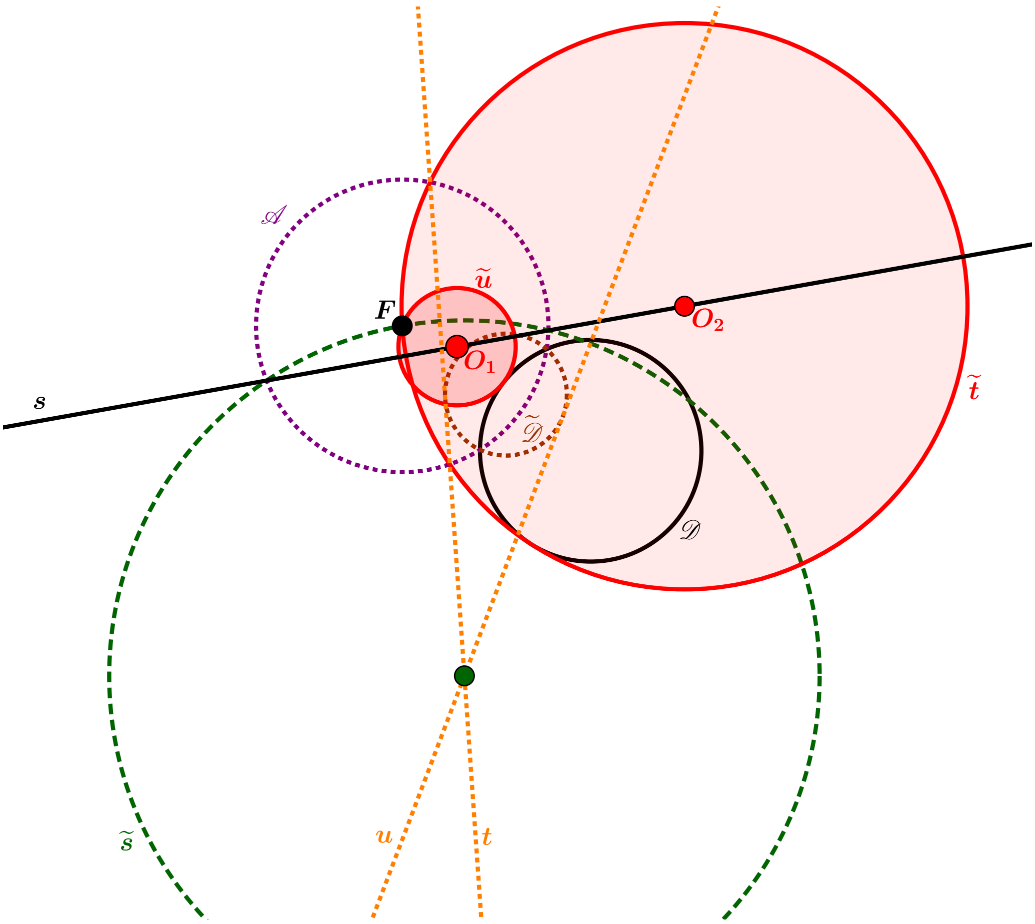
Afirmação: O_1 e O_2 são as soluções do Problema I.

Justificativa: Do passo 5), $\widetilde{u}$ e $\widetilde{t}$ são circunferências que passam por F. Do passo 4) u e t são tangentes à $\widetilde{\mathscr{D}}$ e isso implica que $\widetilde{u}$ e $\widetilde{t}$ são tangentes à $\mathscr{D}$, pois a condição de tangência é preservada pela inversão. Segue então, da Definição 3.2 de hipérbole, que os respectivos centros O_1 e O_2 de $\widetilde{u}$ e $\widetilde{t}$ pertencem à hipérbole $\mathscr{H} = (F, \mathscr{D})$.

Além disso, como u e t são ortogonais à $\widetilde{s}$ pois passam pelo centro da circunferência $\widetilde{s}$ segue que $\widetilde{u}$ e $\widetilde{t}$ são ortogonais à s e, portanto, seus respectivos centros O_1 e O_2 pertencem à s.

Conclusão: O_1 e O_2 são os dois pontos de intersecção da hipérbole $\mathscr{H} = (F, \mathscr{D})$ com a reta s.

Figura 6 – Solução do Problema I via inversão geométrica



Fonte: Elaboração dos autores.

5 UM RESULTADO DE GEOMETRIA PLANA

O problema de Regiomontanus que vamos apresentar consiste em fazer o trajeto no sentido inverso do seguinte resultado de Geometria Plana.

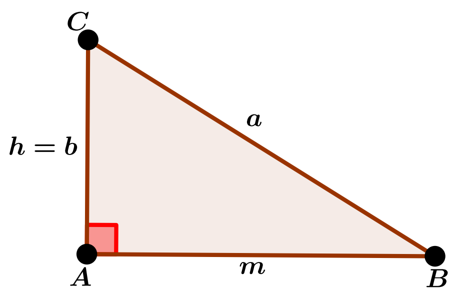
Proposição 5.1 *Considere um triângulo ABC com $d(B,C) = a$ e $d(A,C) = b$, em que supomos $a > b$. Sejam: H o pé da perpendicular traçada de C à reta que passa por A e B, $d(C,H) = h$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, $d(B,H) = m$, $d(A,H) = n$ se o $\angle BAC$ é agudo, $d(A,H) = 0$ se o $\angle BAC$ é reto e $d(A,H) = -n$ se o $\angle BAC$ é obtuso. Então, $m > n$ e $a - b < m - n$.*

Demonstração: Temos três situações a considerar:

1. O ângulo $\angle BAC$ é reto;
2. O ângulo $\angle BAC$ é agudo;
3. O ângulo $\angle BAC$ é obtuso.

- Supondo a situação 1 (Figura 7),

Figura 7 – Visualização dos dados da Proposição 5.1 para um triângulo ABC retângulo em A

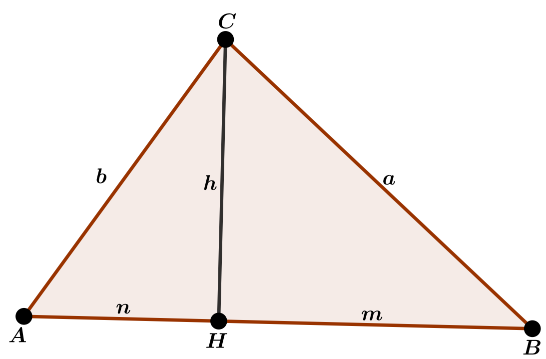


Fonte: Elaboração dos autores.

tem-se $b = h$, $n = 0$ e, então, $m > 0\,(m > n)$. E a desigualdade triangular junto com $m > 0$ diz que $a < b + m \Leftrightarrow a - b < m\,(m = m - 0 = m - n)$.

- Supondo a situação 2 (Figura 8),

Figura 8 – Visualização dos dados da Proposição 5.1 para um triângulo ABC acutângulo em A



Fonte: Elaboração dos autores.

e usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ACH e HCB, tem-se:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + m^2 \\ b^2 = h^2 + n^2. \end{cases}$$

Do sistema acima, obtém-se:

$$a^2 - b^2 = m^2 - n^2. \tag{1}$$

Por outro lado,

$$a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2 > 0. \tag{2}$$

De (1) e (2) segue que $m^2 - n^2 > 0 \Rightarrow m > n$, visto que $m > 0$ e $n > 0$.

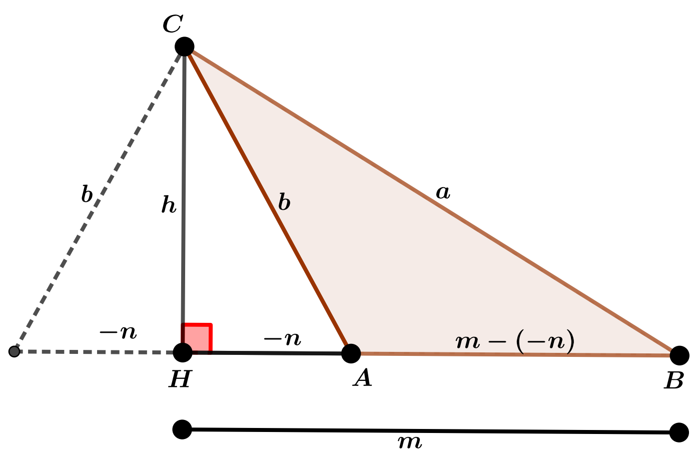
Também, lembrando que o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que o comprimento de seus catetos, tem-se:

$$a > m, b > n \Rightarrow a + b > m + n. \tag{3}$$

Assim, de (1) e (3) segue que: $(a-b)(a+b) = (m+n)(m-n) \Rightarrow (m+n)(m-n) > (a-b)(m+n) \Rightarrow m - n > a - b$. E isso finaliza a demonstração.

- Supondo a situação 3 (Figura 9),

Figura 9 – Visualização dos dados da Proposição 5.1 para um triângulo ABC obtusângulo em A



Fonte: Elaboração dos autores.

tem-se $m > 0 > n$ (pois, por hipótese, m é positivo e n é negativo). E a desigualdade triangular nos diz que $a < b + (m+n) \Leftrightarrow a - b < m + n$. Além disso, $n < 0$ e $m > 0$ $\Rightarrow m + n < m - n$. Segue dessas duas desigualdades que $a - b < m - n$.

6 PROBLEMA DE REGIOMONTANUS

Enunciado do problema: Dados três números reais positivo x, y, z, com $x < y$, construir, com régua e compasso, um triângulo ABC como na Proposição 5.1, tal que $x = a - b$, $y = m - n$ e $z = h$. Mais ainda, se $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} = z$ o triângulo ABC tem ângulo reto em $\hat{A}$ (como na situação 1), se $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} < z$ o triângulo ABC tem ângulo agudo em $\hat{A}$ (como na situação 2), e se $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} > z$ o triângulo ABC tem ângulo obtuso em $\hat{A}$ (como na situação 3).

Solução: Passos da construção.

1. Construa um segmento $\overline{FB}$ de comprimento y;
2. Construa uma reta r paralela ao segmento $\overline{FB}$ e à distância z da reta suporte s que contém $\overline{FB}$;
3. Construa a circunferência $\mathscr{D}$ de centro B e raio x;
4. Construa o ponto C de intersecção da hipérbole $\mathscr{H} = (F, \mathscr{D})$ com a reta r, conforme construção descrita na solução do Problema I, de tal forma que C seja o centro em r da circunferência tangente exteriormente à $\mathscr{D}$;
5. Denote por H o pé da perpendicular traçada de C à reta s;
6. Construa a circunferência $\mathscr{L}$ de centro C e raio $\overline{CF}$; Denote por A o outro ponto de intersecção de s com $\mathscr{L}$.

Afirmação: O triângulo ABC satisfaz as condições estabelecidas.

Justificativa: Precisamos verificar que:

a. $x = a - b = d(B, C) - d(A, C)$;

b. $y = m$ se $\hat{A}$ é reto; $y = m - n = d(B, H) - d(A, H)$ se $\hat{A}$ é agudo; e $y = m - n = d(B, H) + d(A, H)$ se $\hat{A}$ é obtuso.

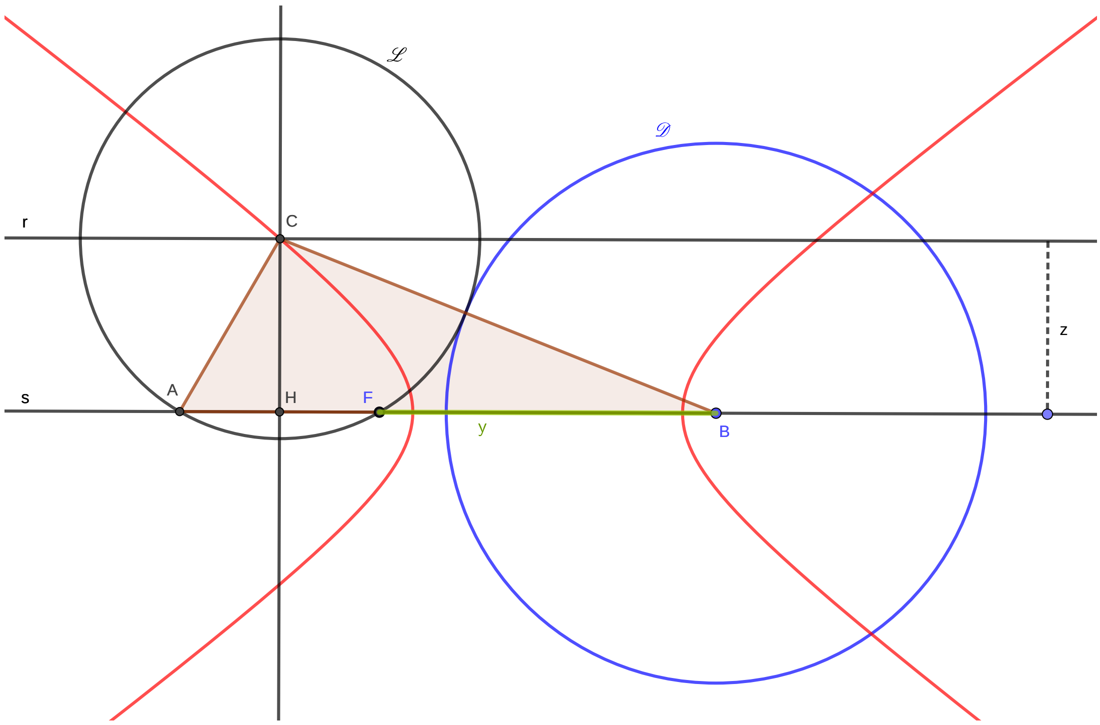
Da construção realizada, $C \in \mathscr{H} = (F, \mathscr{D})$ e, então, $d(B, C) - d(F, C) = x = a - b$. Além disso, o ponto A foi construído satisfazendo $d(A, C) = d(C, F)$. Portanto, temos que a expressão que se encontra em a. se verifica. Também da construção feita, temos $d(A, H) = d(H, F)$, $d(B, F) = y$ e então:

1. Se $H = F = A$, um dos focos da hipérbole $\mathscr{H}$, têm-se $d(A, H) = n = 0$, $y = m = d(B, H)$ e $z = b = d(C, F) = \dfrac{y^2 - x^2}{2x} = z$, pois $C \in \mathscr{H}$ e a projeção ortogonal de C sobre a reta

focal é F. Neste caso, o ângulo $\angle BAC$ é reto visto que $b = z = \dfrac{y^2 - x^2}{2x} \Leftrightarrow x^2 + 2xb - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-b)^2 - y^2 = z^2 \Leftrightarrow a^2 - y^2 = z^2$.

2. Se F está entre B e H, tem-se $d(B,H) - d(A,H) = d(B,F) + d(F,H) - d(A,H) = d(B,F)$, $d(A,H) = n$ (com $n > 0$), $d(B,H) = m$. Neste caso, o triângulo ABC construído é acutângulo em A e satisfaz $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} < z$ pois, utilizando o Teorema de Pitágoras nos triângulos CAH e CHB, segue que: $a^2 - m^2 = b^2 - n^2 \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{m-n} = \dfrac{m+n}{a+b} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{y+2n}{x+2b} \Leftrightarrow x^2 + 2xb = y^2 + 2yn \Leftrightarrow \dfrac{y^2 - x^2}{2x} = b - \dfrac{y}{x}n < z$, uma vez que $n > 0$, $y > x$ e vale a desigualdade triangular $b < z + n$.

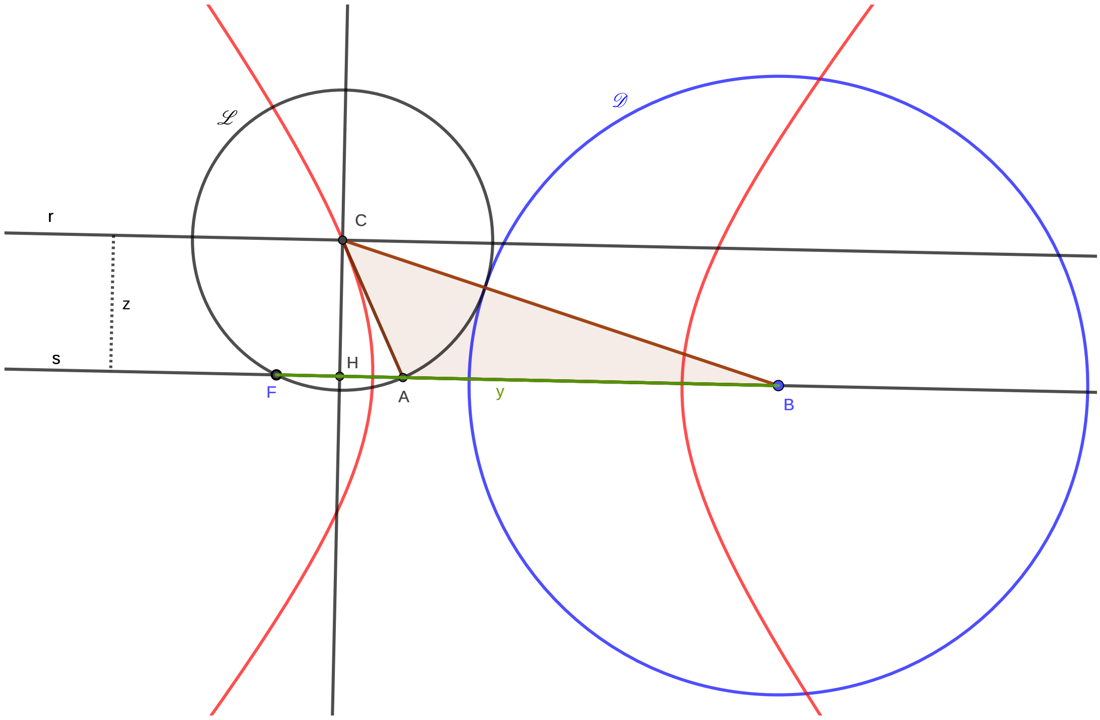
Figura 10 – Construção da solução do problema de Regiomontanus se $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} < z$



Fonte: Elaboração dos autores.

3. Se A está entre H e B, tem-se $d(B,H) + d(A,H) = d(B,H) + d(H,F) = d(B,F)$, $d(A,H) = -n$ (com $n > 0$), $d(B,H) = m$. Neste caso, o triângulo ABC construído é obtusângulo em A e satisfaz $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} > z$, pois, novamente utilizando o Teorema de Pitágoras nos triângulos CAH e CHB, segue, de forma análoga ao caso 2), que $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} = b - \dfrac{y}{x}n > z$, visto que $n < 0$, $y > x$ e vale a desigualdade triangular $z < b - n$.

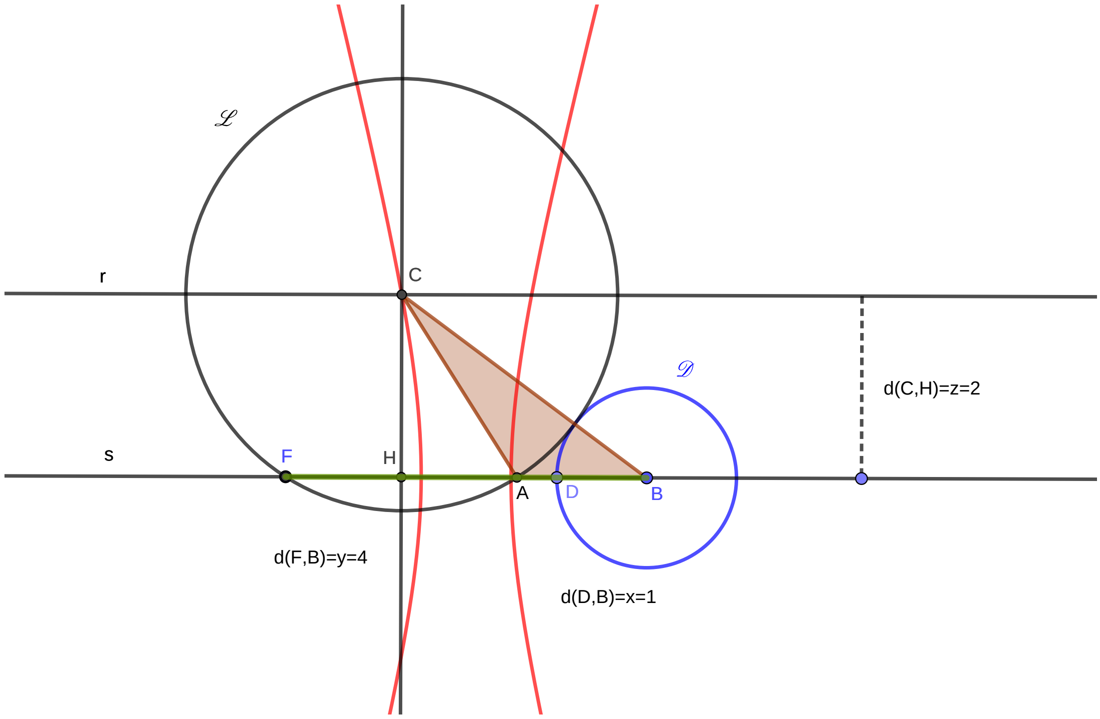
Figura 11 – Construção da solução do problema de Regiomontanus se $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} > z$



Fonte: Elaboração dos autores.

Um exemplo. Considere o seguinte caso particular do Problema de Regiomontanus: $x = 1$, $y = 4$ e $z = 2$. Esses dados satisfazem $\dfrac{y^2 - x^2}{2x} = \dfrac{15}{2} > z$, portanto o triângulo ABC que soluciona o problema é obtusângulo em A (como na situação 3). Veja o triângulo solução na Figura 12. Neste caso específico, fazendo os cálculos, obtém-se: $m = 2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{31}{15}}$, $-n = 2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{31}{15}}$, $a = \dfrac{1}{2} + 2\sqrt{\dfrac{31}{15}}$ e $b = -\dfrac{1}{2} + 2\sqrt{\dfrac{31}{15}}$.

Figura 12 – Construção da solução do problema de Regiomontanus se $x = 1$, $y = 4$ e $z = 2$



Fonte: Elaboração dos autores.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Usando a inversão geométrica e uma hipérbole apresentamos, neste artigo, uma solução geométrica do Problema de Regiomontanus, Teorema 23 do Livro II (Regiomontanus, 1967, p. 127-128), que difere substancialmente da solução original. Outras possibilidades de aplicações da inversão geométrica estão presentes nas soluções dos seguintes problemas clássicos de Geometria Euclidiana Plana: Problema de Apolônio, Teorema de Ptolomeu, Propriedade de tangência da Circunferência de Feuerbach relativa a um triângulo com as quatro circunferências tritangentes a esse triângulo, Fórmula de Euler que estabelece a relação entre os raios das circunferências inscrita e circunscrita de um triângulo.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CRISSAF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

REGIOMONTANUS, Johann Müller. **Regiomontanus on triangles**. Tradução: Barnabas Hughes. Wisconsin: University of Wisconsin, 1967.

ROCHA, L. F. C. **Introdução à Geometria Hiperbólica Plana**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1990.

SPIRA, Michel. Como transformar retas em círculos e vice-versa: a inversão e construções geométricas. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., 2004, Salvador. **Anais** [...]. Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2004. p. 1-46. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M52.pdf. Acesso em: 28 maio 2025.

SOBRE OS AUTORES

Dra. Dulce Mary Almeida
https://orcid.org/0000-0001-8783-8233
http://lattes.cnpq.br/5063159136737596
Contato: dulce.almeida@ufu.br
Contribuição autoral: administração do projeto; análise formal; conceituação; escrita – revisão e edição; metodologia; supervisão; validação.

Me. Júlio César Costa
https://orcid.org/0009-0007-5754-5369
http://lattes.cnpq.br/8889644351293541
Contato: julio.costa04@ufu.br
Contribuição autoral: escrita – primeira redação; investigação; visualização.