

Construção de fractais no GeoGebra: uma aplicação da Álgebra Linear

Construction of fractals in GeoGebra: an application of Linear Algebra

Construcción de fractales en el GeoGebra: una aplicación del Álgebra Lineal

Cecilia Orellana Castro¹

Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), Faculdade de Ciências Exatas,
Santana do Araguaia, PA, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-2758-964X>,  <http://lattes.cnpq.br/8477529939391767>
Manolo Rodriguez Heredia²

Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), Faculdade de Ciências Exatas,
Santana do Araguaia, PA, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-0412-4628>,  <http://lattes.cnpq.br/1808469870030714>
Ruan Lion Costa de Souza³

Universidade Federal do Tocantins (UFT), Programa de Pós-graduação em Educação, Palmas, TO,
Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-5355-8599>,  <http://lattes.cnpq.br/3997845484830358>

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar uma galeria de fractais gerados no GeoGebra usando o conceito de semelhança, próprio da Álgebra Linear, o qual consiste em uma composição de transformações como a rotação, o deslocamento e a homotetia. São apresentadas construções iterativas classificadas em: fractais pela Fronteira, por Remoção, do tipo Dürer e do tipo Árvore. São usadas as metodologias exploratória e explicativa, pois busca-se investigar e descobrir, por meio de exemplos visuais e iterativos, como as semelhanças junto com o *software* GeoGebra, reproduzem fractais. Como principal contribuição deste trabalho apresentamos quadros com os parâmetros matemáticos necessários no algoritmo de construção para reproduzir vinte e uma animações que podem ser usadas em sala de aula como uma aplicação de Álgebra Linear ou por qualquer leitor que aprecie a beleza da matemática.

Palavras-chave: *software* educativo; construção iterativa e dinâmica; Álgebra Linear.

Abstract: The aim of this paper is to present a gallery of fractals generated in GeoGebra using the concept

¹**Currículo sucinto:** Graduada em Engenharia Matemática pela Universidad Mayor de San Simon, mestre em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Pós-doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Professora da Universidade do Sul e Sudeste do Pará. **Contribuição de autoria:** administração do projeto, análise formal, conceituação, escrita – primeira redação, escrita – revisão e edição, investigação, metodologia, recursos, software, validação e visualização. **Contato:** ceciliaoc@unifesspa.edu.br.

²**Currículo sucinto:** Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Pós-doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Professor da Universidade do Sul e Sudeste do Pará. **Contribuição de autoria:** análise formal, conceituação, escrita – revisão e edição, investigação e software. **Contato:** manolorh@unifesspa.edu.br.

³**Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, mestrando em Educação pela Universidade Federal do Tocantins, licenciando em Pedagogia pela Universidade Pitágoras Unopar, licenciando em Letras Português–Inglês pelo Centro Universitário UniFael. Professor de Educação Básica Municipal com atuação nos anos finais do Ensino Fundamental. Assistente Administrativo da Secretaria Municipal de Educação de Santana do Araguaia, Pará. **Contribuição de autoria:** escrita – primeira redação, validação e visualização. **Contato:** ruan.lion@mail.uft.edu.br.



of similarity, inherent to Linear Algebra, which consists of a composition of transformations such as a rotation, a translation and an homothety. Iterative constructions classified as fractals by Border, by Removal, of the Dürer type, and of the Tree type are presented. Exploratory and explanatory methodologies are used because the aim is to investigate and discover through visual and iterative examples, how the similarities along with the GeoGebra software, reproduce fractals. As the main contribution of this work, we present tables with the mathematical parameters required in the construction algorithm to reproduce twenty-one animations that can be used in the classroom as an application of Linear Algebra or by any curious reader who appreciates the beauty of mathematics.

Keywords: educational software; iterative and dynamic construction; Linear Algebra.

Resumen: El objetivo de este trabajo es presentar una galería de fractales en el GeoGebra utilizando conceptos de Álgebra Lineal, como rotación, translación y homotecia. Se presentan construcciones iterativas clasificadas en cuatro categorías: fractales por Frontera, por Remoción, Tipo Dürer y Tipo Árbol. Se emplean las metodologías exploratoria y explicativa para investigar y descubrir mediante ejemplos visuales e interactivos, cómo las transformaciones del Álgebra Lineal y el GeoGebra, reproducen fractales. La contribución principal de este trabajo es la presentación de cuadros con parámetros matemáticos necesarios para que el algoritmo de construcción reproduzca veintiuna animaciones. Estas pueden ser utilizadas en el aula como aplicación de Álgebra Lineal o por lectores interesados en la belleza de la matemática.

Palabras clave: software educacional; construcción dinámica e iterativa; Algebra Lineal.

Data de submissão: 12 de junho de 2024.

Data de aprovação: 27 de outubro de 2024.

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar aplicações práticas de conceitos de Álgebra Linear, mais especificamente, uma das vinte e uma propostas no livro Álgebra Linear com Aplicações (Anton; Rorres, 2012). Utilizamos o ambiente do *software* GeoGebra e seus comandos Sequência, Lista, Homotetia, Transladar, Girar e Controle Deslizante para criar animações de fractais. O processo de construção é explicado passo a passo, com foco nos conceitos matemáticos subjacentes, visando auxiliar professores do Ensino Superior em sua prática docente.

Apresentamos a construção de fractais usando funções iterativas, abordando quatro categorias: fractais pela Fronteira, por Remoção, do tipo Dürer e do tipo Árvore. Nessas abordagens



dinâmicas, acessíveis através de *links* externos para páginas do GeoGebra, os leitores podem alterar os passos de construção dos fractais e apreciar a auto-semelhança que os caracteriza.

No caso dos fractais do tipo Dürer, o leitor pode escolher polígonos de três a doze lados, observando que, à medida que o número de lados aumenta, o fractal mantém sua forma característica. Também introduzimos o conceito de fractais do tipo Árvore, incluindo a Árvore Pitagórica e um fractal tipo Árvore aplicável a qualquer tipo de triângulo, contribuindo assim, com uma abordagem original.

Na Fundamentação Teórica apresentamos alguns trabalhos com essa temática, assim como conceitos de Álgebra Linear relevantes nesta atividade. Na seção Metodologia descrevemos como são usadas as metodologias exploratória e explicativa nesta proposta. Na seção de Resultados e Discussões descrevemos o Algoritmo 1 e um exemplo de como usá-lo com os parâmetros descritos nos quadros para construir os fractais; o exemplo usado é o fractal *a curva de Koch*. Também apresentamos uma galeria de vinte e uma construções juntamente com os *links* externos para a plataforma GeoGebra. Finalmente, expomos as conclusões deste trabalho.

2 Fundamentação Teórica

O *software* GeoGebra tem sido utilizado em pesquisas relacionadas a fractais; veja por exemplo o trabalho de Friske e Mathias (2015) onde são construídos os fractais do tipo Dürer de maneira simples e de fácil compreensão. Pereira e Borges (2017) realizam uma categorização de trabalhos acadêmicos brasileiros em periódicos *online*, desde 2007 até 2016, que tinham os fractais como objeto de estudo, resultando em cinco categorias, sendo a primeira delas o ensino de geometrias não euclidianas por meio de *softwares* educacionais. Nessa categoria, são apresentados cinco trabalhos que utilizam o GeoGebra como ferramenta que enaltece o ensino e a aprendizagem por meio de geometria dinâmica, pois proporciona ao discente vantagens como: melhor visualização, construção e manipulação de figuras de forma mais precisa e rápida, maior facilidade na generalização de fórmulas e conceitos, entre outros.

Em trabalhos mais recentes, como por exemplo em Barbosa e Silva (2019), os autores exploraram o *pensamento computacional* em estudantes de matemática que criaram fractais por meio desse *software*. Já em Santos e Coutinho, foi realizado um mapeamento sobre o estado da arte para compreender como a Geometria Fractal está sendo inserida no ensino de matemática. Esse trabalho destaca nove artigos, apresentando qual fractal é explorado em cada um deles (veja o Quadro



1). Observamos que o Triângulo de Sierpinsky é o fractal mais explorado e que nenhum desses artigos apresenta uma quantidade significativa de construções que se compare com a proposta deste trabalho.

Quadro 1 – Relação de fractais e os respectivos trabalhos

Fractais	Trabalhos
Árvore Pitagórica	Rezende <i>et al.</i> (2018a)
Cartão Fractal Degraus Centrais	Fadin e Tortola (2019)
Conjunto de Cantor	Paula e Souza (2017) e Ferreira e Julio (2019)
Curva de Koch	Paula e Souza (2017)
Esponja de Menger	Paixão, Araújo e Nascimento (2019)
Flocos de Neve	Ferreira e Julio (2019)
Hexágono de Dürer	Rezende <i>et al.</i> (2018b) e Moran e Rezende (2020)
Tapete de Sierpinski	Araújo e Marins (2019)
Triângulo de Sierpinski	Paula e Souza (2017), Ferreira e Julio (2019), Barbosa e Silva (2019) e Paixão, Araújo e Nascimento (2019)

Fonte: Adaptado de Santos e Coutinho (2022, p. 12567).

Exploramos a construção de vinte e um fractais usando o conceitos de Álgebra Linear. Iniciamos apresentando a classificação desses fractais e, posteriormente, alguns conceitos matemáticos que serão usados no GeoGebra para a construção dos mesmos. Segundo Barbosa (2007) e Rabay (2013), os fractais por funções iteradas se classificam como segue. **Fractais pela Fronteira:** são definidos pela substituição de uma parte específica pelo seu gerador, resultando em um aumento do seu comprimento. Exemplos conhecidos incluem a curva de Peano, a curva de Koch e a curva do Dragão ou de Herter-Heighway. **Fractais por Remoção:** nesse tipo de fractal, partes do objeto são removidas de forma iterativa, conforme o próprio nome sugere. Alguns exemplos notáveis são o Conjunto de Cantor, o Triângulo de Sierpinski, o Tapete de Sierpinski, a Esponja de Menger e a Pirâmide de Sierpinski. **Fractais do Tipo Dürer:** são construídos com base em polígonos regulares e, a cada iteração, polígonos menores com o mesmo número de lados são adicionados a cada vértice do polígono. **Fractais do Tipo Árvore:** são gerados por funções iterativas semelhantes a ramificações de árvores. A sua construção parte de um segmento vertical ou um quadrado (que será o tronco), e a partir deles teremos ângulos de bifurcação onde o tronco se ramificará gerando, a partir de um fator de homotetia, novos galhos.



A seguir, apresentamos alguns conceitos e teoremas matemáticos necessários para a construção dos fractais que podem ser encontrados em Anton e Rorres (2012).

Definição 2.1. (Homotetia em \mathbb{R}^2). Considere $s \in \mathbb{R}$, o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \mapsto s(x, y)$ é chamado homotetia de razão s . Em particular, se $0 < s < 1$, T é uma contração, se $s > 1$, T é uma dilatação.

Definição 2.2. (Rotação em \mathbb{R}^2). Seja $\theta \in \mathbb{R}$, o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por: $(x, y) \mapsto (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$, é chamado rotação de ângulo θ .

Definição 2.3. (Translação em \mathbb{R}^2). Dado $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, a aplicação afim $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $(x, y) \mapsto (x, y) + (c, d)$, é uma translação na direção do vetor (c, d) .

A transformação que resulta da composição de uma homotetia, uma rotação e uma translação é chamada semelhança. Assim, temos a seguinte definição.

Definição 2.4. (Semelhança em \mathbb{R}^2). Uma semelhança com fator de escala $s \in \mathbb{R}$, é uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $(x, y) \mapsto s(x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) + (c, d)$.

As semelhanças que usamos neste trabalho, são as semelhanças contrativas, isto é, consideramos $0 < s < 1$.

Definição 2.5. (Conjuntos congruentes). Dois conjuntos são ditos congruentes se pudermos fazê-los coincidir exatamente ao sobrepor usando translações, rotações e reflexões.

Definição 2.6. (Conjunto compacto em \mathbb{R}^n). Um conjunto $M \in \mathbb{R}^n$ é dito compacto se é fechado e limitado.

Definição 2.7. (Conjunto autossimilar). Um conjunto compacto M é dito autossimilar se pode ser descrito da forma:

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p,$$

onde M_1, M_2, \dots, M_p são conjuntos não sobrepostos, cada um dos quais é congruente a uma contração de M pelo mesmo fator s .

Teorema 2.8. Se T_1, T_2, \dots, T_k são semelhanças contrativas da mesma razão, então existe um único conjunto não vazio compacto U do plano euclidiano tal que:

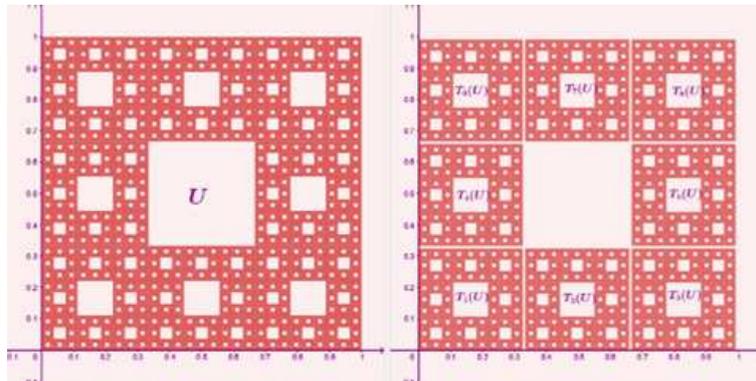
$$U = T_1(U) \cup T_2(U) \cup T_3(U) \cup \dots \cup T_k(U).$$

Além disso, se os conjuntos $T_i(U)$ são não sobrepostos, para $i = 1, 2, \dots, k$, então U é autossimilar.



Na Figura 1, observamos um conjunto autossimilar U que resulta da união não sobreposta de 8 imagens de semelhanças T_i , $i = 1, \dots, 8$, sendo o fator de contração $s = \frac{1}{3}$ e o ângulo de rotação $\theta = 0$, para todas as semelhanças.

Figura 1 – Conjunto autossimilar $U = T_1(U) \cup \dots \cup T_8(U)$



Fonte: Elaborada pelos autores, 2024

3 Metodologia

Esta pesquisa quanto aos objetivos é exploratória pois pretende-se investigar e descobrir, por meio de exemplos visuais e iterativos, como as transformações lineares e afins, junto com o *software* GeoGebra, reproduzem fractais.

Podemos também classificar esta pesquisa como sendo explicativa usando o método experimental pois Andrade (2010, p. 113) afirma que “o que caracteriza a pesquisa experimental é a manipulação e o controle das variáveis, com o objetivo de identificar qual a variável independente que determina a causa da variável dependente ou do fenômeno em estudo”. Para cada fractal apresentado neste trabalho, explicaremos detalhadamente o processo de construção descrevendo os parâmetros matemáticos necessários, as transformações aplicadas e como iterar essas transformações no GeoGebra para obter o fractal desejado.

4 Resultados e Discussões

Este trabalho tem como principal contribuição fornecer os parâmetros necessários que serão utilizados no Algoritmo 1 implementado no *software* GeoGebra para gerar vinte e um fractais por funções iteradas. Embora existam outros algoritmos, como o Algoritmo de Monte Carlo, neste traba-



Isto usamos somente o algoritmo apresentado a seguir, que é o foco deste trabalho e está disponível em Anton e Rorres (2012, p. 635).

Algoritmo 1: Algoritmo que gera fractais iterativos com semelhanças contrativas

Entrada: Semelhanças contrativas T_i com fatores de contração s_i ; ângulo de rotação θ_i ; vetores de deslocamento de coordenadas (c_i, d_i) , para $i = 1, \dots, k$.
Número de iterações: m .

Saída: U_m tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} U_m = U$, sendo U o fractal desejado.

1 início

2 Escolha um conjunto não vazio, fechado e limitado U_0 no plano \mathbb{R}^2 ;

3 $j = 0$

4 enquanto $j < m$ **faça**

5 Calcule $U_{j+1} = T_1(U_j) \cup T_2(U_j) \cup \dots \cup T_k(U_j)$

6 $j = j + 1$

Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 635).

4.1 Construindo o fractal: Curva de Koch

Para entender como usar o Algoritmo 1 com as ferramentas matemáticas e computacionais do GeoGebra, consideremos o exemplo do fractal **Curva de Koch**. Os parâmetros usados para a construção deste fractal encontram-se no Quadro 2.

De acordo com a Definição 2.4 e os dados do Quadro 2, observamos que para construir a Curva de Koch são necessárias quatro semelhanças T_1, T_2, T_3 e T_4 , definidas por:

$$T_1(x, y) = \frac{1}{3} (x \cos 0^\circ - y \sin 0^\circ, x \sin 0^\circ + y \cos 0^\circ) + (0, 0),$$

$$T_2(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{6} (x \cos 63,4^\circ - y \sin 63,4^\circ, x \sin 63,4^\circ + y \cos 63,4^\circ) + (1, 0),$$

$$T_3(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{6} (x \cos 63,4^\circ + y \sin 63,4^\circ, -x \sin 63,4^\circ + y \cos 63,4^\circ) + \left(\frac{3}{2}, 1\right),$$

$$T_4(x, y) = \frac{1}{3} (x \cos 0^\circ - y \sin 0^\circ, x \sin 0^\circ + y \cos 0^\circ) + (2, 0).$$

Todos os dados de **Entrada** do Algoritmo 1 são dados no Quadro 2, com exceção do “Número de iterações: m ”. Fazendo testes computacionais escolhemos $m = 5$, pois para valores maiores o fractal gerado apresenta mudanças imperceptíveis. Embora teoricamente os fractais sejam gerados de maneira infinita, os recursos de memória e processador do computador são finitos.



Quadro 2 – Parâmetros para reproduzir fractais pela Fronteira

Fractal	Nº de semelhanças	Fator de Contração	Ângulos de rotação	Vetores de deslocamento
Curva de Koch	4	$s_1 = s_4 = \frac{1}{3}$ $s_2 = s_3 = \frac{\sqrt{5}}{6}$	$\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 63,4^\circ$ $\theta_3 = -\theta_2, \theta_4 = 0^\circ$	$v_1 = (0, 0), v_2 = (1, 0)$ $v_3 = (3/2, 1), v_4 = (2, 0)$
Curva de Peano	9	$s_i = \frac{1}{3}$ para $i = 1, \dots, 9$	$\theta_i = 0^\circ$ para $i = 1, 3, 5, 6, 8$ $\theta_j = 90^\circ$ para $j = 2, 4$ $\theta_k = -90^\circ$ para $k = 7, 9$	$v_1 = (0, 0), v_3 = (1, 1)$ $v_i = (1, 0)$ para $i = 2, 5, 7$ $v_j = (2, 0)$ para $j = 4, 6, 9$ $v_8 = (1, -1)$
Curva do Dragão	2	$s_1 = s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\theta_1 = -45^\circ, \theta_2 = 225^\circ$	$v_1 = (0, 0), v_2 = (4, 0)$

Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Na linha 2 do Algoritmo 1, U_0 é um segmento de reta com pontos extremos $A = (0, 0)$ e $B = (3, 0)$. O comando que gera U_0 é: *Segmento(A, B)* (veja a Figura 2). Por motivos estéticos, os nomes dos pontos A e B são apagados e U_0 fica de cor vermelha. O comprimento é 3 apenas por simplicidade, pois precisaremos dividir esse segmento em três partes iguais nos seguintes passos.

Quando $j = 0$, entramos pela primeira vez na condição **enquanto** da linha 4 do Algoritmo 1. Para obter $U_1 = T_1(U_0) \cup T_2(U_0) \cup T_3(U_0) \cup T_4(U_0)$ realizamos o seguinte trabalho no GeoGebra: definimos os vetores $v_1 = (0, 0), v_2 = (1, 0), v_3 = (3/2, 1)$ e $v_4 = (2, 0)$, e com eles criamos a lista $LV = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Definimos os ângulos de rotação $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 63,4^\circ, \theta_3 = -63,4^\circ$ e $\theta_4 = 0^\circ$, e com eles criamos uma lista chamada $LA = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$. Definimos os fatores de contração $s_1 = 1/3, s_2 = s_3 = \sqrt{5}/6$ e $s_4 = 1/3$, com eles criamos uma lista chamada $LH = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$.

Para construir uma semelhança no GeoGebra usamos os comandos: *Transladar*, *Homotetia* e *Girar*, para aplicar um deslocamento, uma homotetia e uma rotação, respectivamente. Ora, como se trata de quatro semelhanças a serem aplicadas em U_0 , em lugar de fazer separadamente, usamos o comando *Sequência*, o qual varia de um até quatro, isto é, o número de semelhanças necessárias para construir a Curva de Koch. O comando *Sequência* do GeoGebra tem a seguinte estrutura:

Sequência(*<Expressão>*, *<Variável >*, *<Valor Inicial >*, *<Valor Final >*, *<Incremento>*)



Assim, U_1 é obtido digitando a seguinte instrução no Campo de Entrada do GeoGebra:

$$U_1 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Girar}(\text{Homotetia}(U_0, LH(i)), LA(i)), LV(i)), i, 1, 4, 1). \quad (1)$$

Na Figura 3, podemos observar como ficou U_1 na Janela de visualização do GeoGebra.

Na linha 6 do Algoritmo 1, $j = 0 + 1 = 1$, como a condição $j < m$ é satisfeita, entramos novamente no ciclo **enquanto**. U_2 é obtido com a instrução no Campo de Entrada do GeoGebra:

$$U_2 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Girar}(\text{Homotetia}(U_1, LH(i)), LA(i)), LV(i)), i, 1, 4, 1), \quad (2)$$

onde U_1 é dado na instrução (1). A Figura 4, representa U_2 na Janela de visualização do GeoGebra. Voltando à linha 6 do Algoritmo 1, $j = 1 + 1 = 2$, como a condição $j < m$ ainda é satisfeita, entramos novamente no ciclo **enquanto**. U_3 é obtido digitando a seguinte instrução no Campo de Entrada do GeoGebra:

$$U_3 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Girar}(\text{Homotetia}(U_2, LH(i)), LA(i)), LV(i)), i, 1, 4, 1), \quad (3)$$

onde U_2 é dado na instrução (2). Na Figura 5, apresentamos U_3 . Novamente, voltando à linha 6 do Algoritmo 1, $j = 2 + 1 = 3$, como a condição $j < m$ ainda é satisfeita, entramos novamente no ciclo **enquanto**. U_4 é obtido digitando a seguinte instrução no Campo de Entrada do GeoGebra:

$$U_4 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Girar}(\text{Homotetia}(U_3, LH(i)), LA(i)), LV(i)), i, 1, 4, 1), \quad (4)$$

onde U_3 é dado na instrução (3). Na Figura 6, apresentamos U_4 na Janela de visualização.

Finalmente, voltando à linha 6 do Algoritmo 1, observamos que para $j = 3 + 1 = 4$, a condição $j < m = 5$ é satisfeita, entramos no ciclo **enquanto** por última vez. U_5 é obtido com:

$$U_5 = \text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Girar}(\text{Homotetia}(U_4, LH(i)), LA(i)), LV(i)), i, 1, 4, 1), \quad (5)$$

onde U_4 é obtido por (4). Na Figura 7, apresentamos U_5 na Janela de visualização.

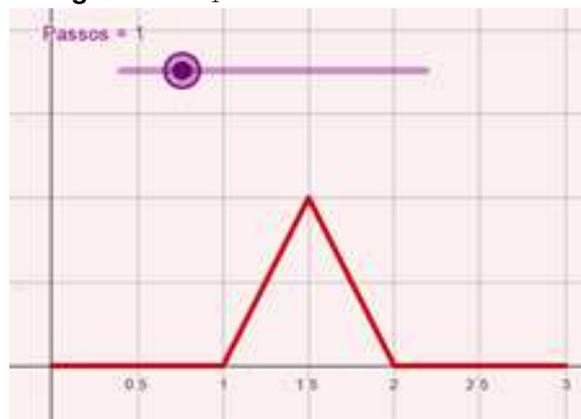


Figura 2 – U_0 do Fractal a Curva de Koch



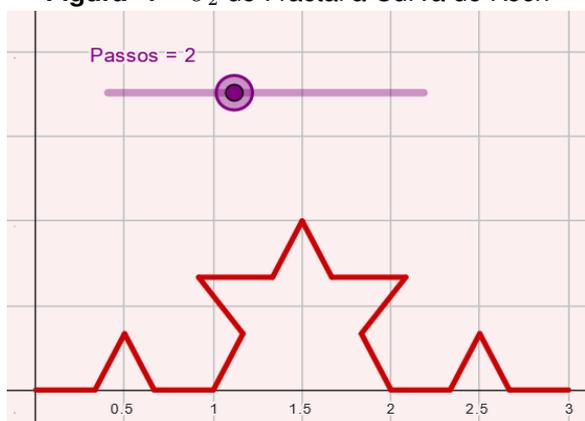
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 3 – U_1 do Fractal a Curva de Koch



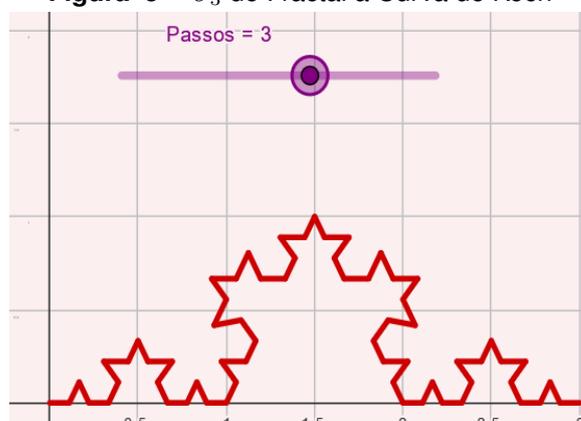
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 4 – U_2 do Fractal a Curva de Koch



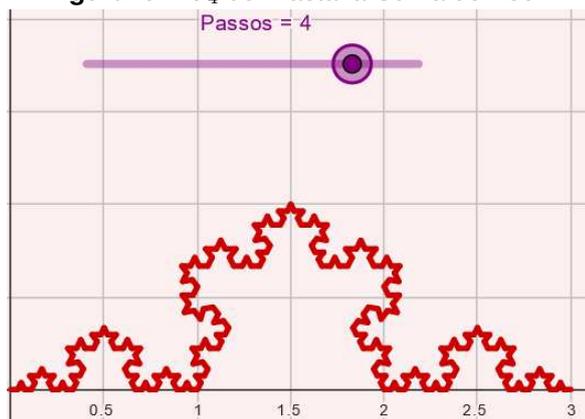
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 5 – U_3 do Fractal a Curva de Koch



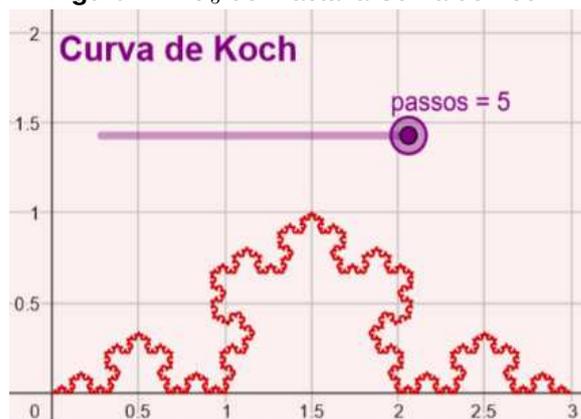
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 6 – U_4 do Fractal a Curva de Koch



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 7 – U_5 do Fractal a Curva de Koch



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

A construção do fractal pode ser repetida diversas vezes, no entanto, as mudanças são imperceptíveis devido ao tamanho reduzido dos segmentos. Utilizamos o comando Controle deslizante



que chamamos de “Passos”, para exibir cada figura U_{j+1} , com $j = 0, \dots, 4$. Isso permite uma construção progressiva e controlada do fractal.

Ressaltamos que no Quadro 2, além de apresentar a Curva de Koch, também apresentamos os parâmetros para construir a curva de Peano e a curva do Dragão; esses três fractais são classificados pelo **Tipo Fronteira**.

No Quadro 3, apresentamos os parâmetros que permitem a construção dos fractais do **Tipo Dürer** para qualquer polígono regular de n lados. No enlace externo do GeoGebra Fractais do Tipo Dürer, trabalhamos com polígonos regulares com $n = 3, \dots, 12$, visto que para $n \geq 13$, o processador do computador teve muitas dificuldades para gerar a construção do fractal. O usuário tem a opção de digitar o número de lados do polígono, assim como acompanhar a construção desde dez fractais (pois n varia de três até doze), usando o Controle deslizante chamado de “Passos”.

Quadro 3 – Parâmetros para reproduzir fractais do tipo Dürer para polígonos de n lados

Fractal	Nº de semelhanças	Fator de Contração	Ângulos de rotação	Vetores de deslocamento
Tipo Dürer	n	$s_i = \frac{1}{r}$ para todo $i = 1, \dots, n$ sendo $r = 1 + \frac{\sin\left(\frac{360^\circ}{n} \cdot \frac{2j+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$ onde $j = \lfloor n, 4 \rfloor$	$\theta_i = 0^\circ$ para todo $i = 1, \dots, n$	$v_i = (c_i, d_i)$, onde $c_i = (1 - s) \cos\left(\frac{360^\circ i}{n}\right)$ $d_i = (1 - s) \sin\left(\frac{360^\circ i}{n}\right)$ para todo $i = 1, \dots, n$

Fonte: Elaboração dos autores (2024).

No Quadro 4, apresentamos os parâmetros para a construção de alguns fractais do **Tipo Árvore**. O primeiro deles é chamado de **Árvore Simples**, pois o caule e os galhos são segmentos de reta. O fator de contração s , isto é, a proporcionalidade entre dois galhos consecutivos, pode ser escolhida pelo usuário, assim como ele também pode decidir qual será a abertura entre dois galhos no mesmo nível (veja o ângulo β tanto no Quadro 4 como na construção deste fractal no GeoGebra). Destacamos também que os ângulos usados nas semelhanças, dependem do ângulo β .

O segundo fractal do Quadro 4 é o fractal **Árvore Pitagórica**, os fatores de contração s_1 e s_2 , dependem dos comprimentos dos catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo inicial (veja a Figura



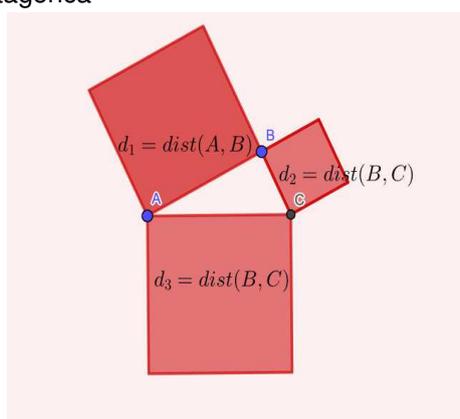
8). Observe também, no Quadro 4, que tanto os comprimentos d_1, d_2, d_3 , os ângulos θ_1 e θ_2 e os vetores de deslocamento v_1 e v_2 estão dados em termos dos vértices do triângulo inicial.

Quadro 4 – Parâmetros para reproduzir os fractais do Tipo Árvore

Fractal	Nº de sem.	Fator de contração	Ângulos de rotação	Vetores de deslocamento
Árvore Simples	2	$0 < s < 1$	$\theta_1 = -\frac{\beta}{2}, \theta_2 = \frac{\beta}{2}$ onde β é o ângulo formado por galhos do mesmo nível	$v_1 = (0, h), v_2 = (0, h)$ sendo h a altura do galho inicial escolhido
Árvore Pitagórica	2	$s_1 = \frac{d_1}{d_3}, s_2 = \frac{d_2}{d_3}$ ver a Figura 8	$\theta_1 = -\widehat{BCA}$ $\theta_2 = \widehat{CAB}$ ver a Figura 8	$v_1 = \overrightarrow{AE}, v_2 = \overrightarrow{AJ}$ ver a Figura 8
Árvore gerada a partir de um triângulo arbitrário	2	$s_1 = \frac{d_1}{d_3}, s_2 = \frac{d_2}{d_3}$ ver a Figura 9	$\theta_1 = -\widehat{BCA}$ $\theta_2 = \widehat{CAB}$ ver a Figura 9	$v_1 = \overrightarrow{AE}, v_2 = \overrightarrow{AJ}$ ver a Figura 9

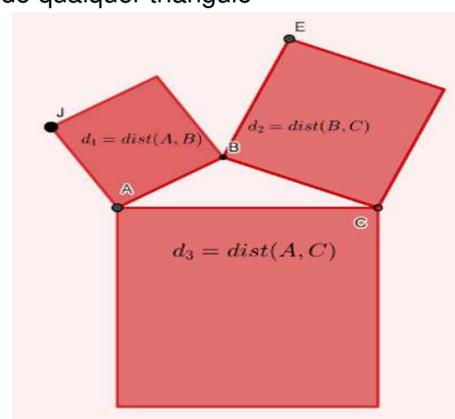
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 8 – Distâncias d_1, d_2, d_3 usadas na construção do fractal Árvore Pitagórica



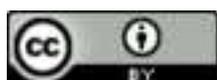
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 9 – Distâncias d_1, d_2, d_3 usadas na construção do fractal Árvore a partir de qualquer triângulo



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

O terceiro fractal, chamado de Árvore gerada a partir de um triângulo arbitrário, é uma construção original com o intuito de generalizar o fractal Árvore Pitagórica. Percebemos na construção



dos parâmetros do fractal Árvore Pitagórica que não foi usado o fato do triângulo ser retângulo, logo, como pode se ver no Quadro 4 e na Figura 9, os parâmetros para a construção são obtidos da mesma maneira.

No Quadro 5, apresentamos cinco fractais do **Tipo Remoção**. O primeiro deles, o Conjunto de Cantor, que é desenvolvido a partir de um segmento inicial de comprimento um, dividido em três partes iguais e removendo a parte do meio. No plano, são desenvolvidos o triângulo e o tapete de Sierpinsky, já no espaço, são desenvolvidos os fractais Tetraedro de Sierpinsky e Esponja de Menger. Ressaltamos que em todos eles, os ângulos de rotação são todos nulos.



Quadro 5 – Parâmetros para reproduzir fractais do Tipo Remoção

Fractal	Nº de sem.	Fator de Contração	Ângulos de rotação	Vetores de deslocamento
Conjunto de Cantor	2	$s_1 = \frac{1}{3}, s_2 = \frac{1}{3}$	$\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 0^\circ$	$v_1 = (0, 0), v_2 = (\frac{2}{3}, 0)$
Triângulo de Sierpinsky	3	$s_i = \frac{1}{2}$ para $i = 1, 2, 3$	$\theta_i = 0^\circ$ para $i = 1, 2, 3$	$v_1 = (0, 0)$, Os vetores v_2 e v_3 , são os pontos médios dos lados do triângulo inicial, ver a Figura 18.
Tetraedro de Sierpinski	4	$s_i = \frac{1}{2}$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$	$\theta_i = 0^\circ$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$	$v_1 = (0, 0, 0), v_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)$ $v_3 = (\frac{-9}{20}, \frac{1}{4}, 0), v_4 = (\frac{-3}{20}, \frac{13}{50}, \frac{41}{100})$
Tapete de Sierpinski	8	$s_i = \frac{1}{3}$ para todo $i = 1, \dots, 8$	$\theta_i = 0^\circ$ para todo $i = 1, \dots, 8$	$v_1 = (0, 0), v_2 = (\frac{1}{3}, 0)$ $v_3 = (\frac{2}{3}, 0), v_4 = (0, \frac{1}{3})$ $v_5 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), v_6 = (0, \frac{2}{3})$ $v_7 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), v_8 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
Esponja de Menger	20	$s_i = \frac{1}{3}$ para todo $i = 1, \dots, 20$	$\theta_i = 0^\circ$ para todo $i = 1, \dots, 20$	$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, \frac{1}{3}, 0), v_3 = (1, \frac{2}{3}, 0),$ $v_4 = (1, 0, \frac{1}{3}), v_5 = (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), v_6 = (1, 0, \frac{2}{3}),$ $v_7 = (1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), v_8 = (1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) v_9 = (\frac{2}{3}, 0, 0),$ $v_{10} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0), v_{11} = (\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$ $v_{12} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), v_{13} = (\frac{1}{3}, 0, 0),$ $v_{14} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0), v_{15} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0),$ $v_{16} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}), v_{17} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}),$ $v_{18} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}), v_{19} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}),$ $v_{20} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

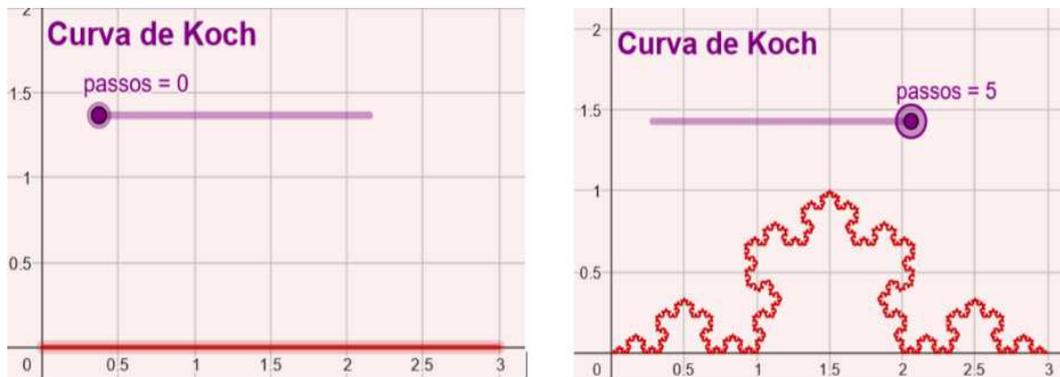
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Embora todas as construções de fractais realizadas neste trabalho possam ser acessas por meio dos hiperlinks do GeoGebra dados no Quadro 6 (seção 5), apresentamos a seguir uma galeria de imagens do estágio inicial e final de cada construção.



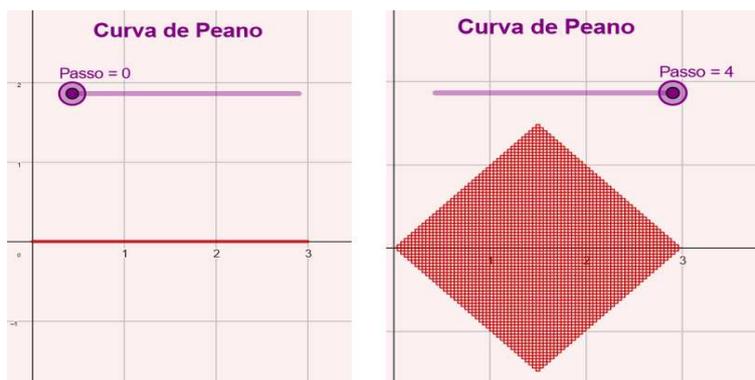
4.2 Galeria de imagens de fractais

Figura 10 – Na esquerda, o conjunto inicial U_0 da Curva de Koch no qual são aplicadas as quatro semelhanças do Quadro 2. Na direita, o fractal Curva de Koch U_5 depois de cinco iterações.



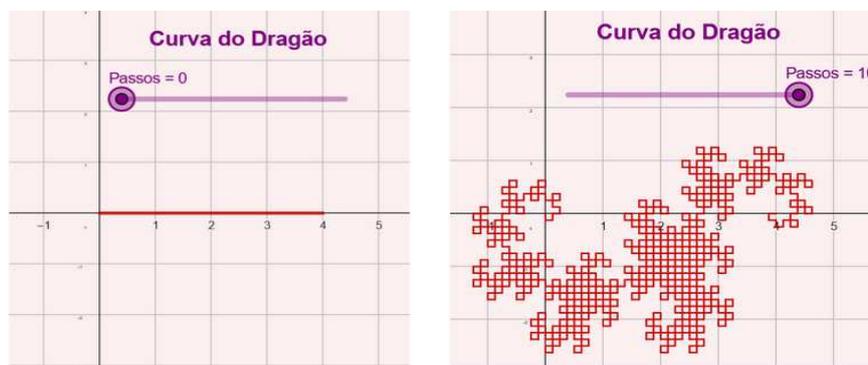
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 11 – Na esquerda, o objeto inicial U_0 da Curva de Peano no qual são aplicadas as nove semelhanças do Quadro 2. Na direita, o fractal Curva de Peano U_4 depois de quatro iterações.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

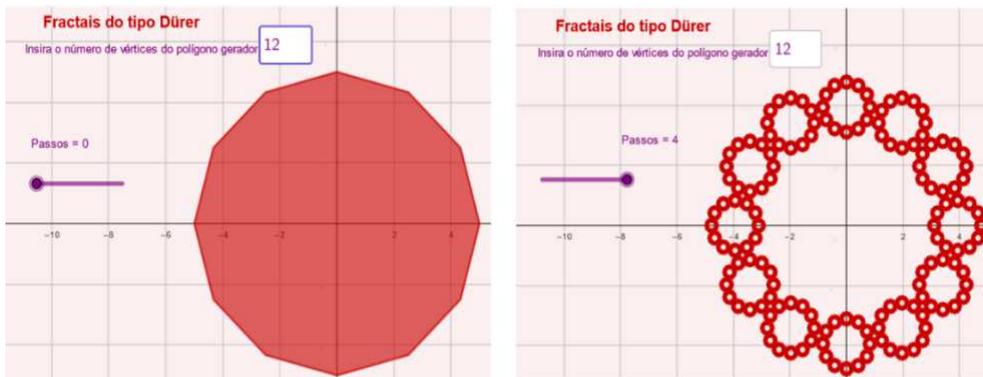
Figura 12 – Na esquerda, o conjunto inicial U_0 da Curva do Dragão no qual são aplicadas as duas semelhanças do Quadro 2. Na direita, o fractal Curva do Dragão U_{10} depois de dez iterações.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

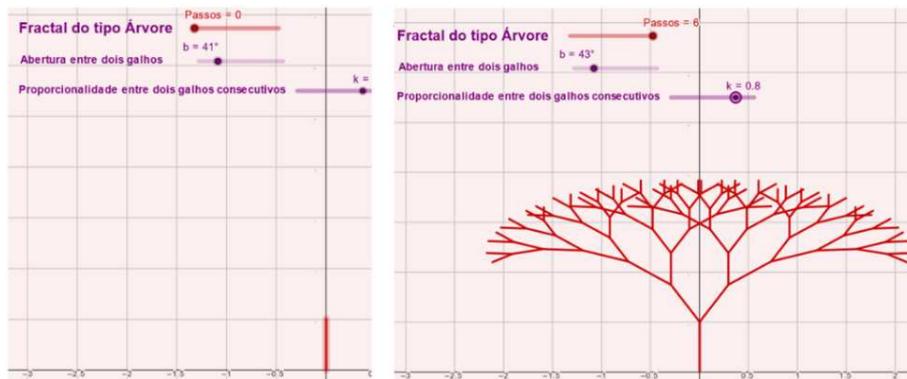


Figura 13 – Na esquerda, o polígono inicial U_0 do fractal do Tipo Dürer de doze lados, nele são aplicadas as doze semelhanças do Quadro 3. Na direita, o fractal U_4 obtido depois de quatro iterações.



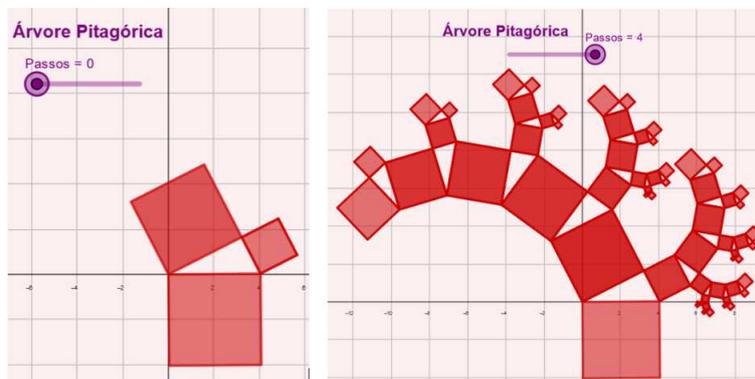
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 14 – Na esquerda, o segmento inicial U_0 do fractal Árvore Simples, nele são aplicadas as duas semelhanças do Quadro 4. Na direita, o fractal U_6 obtido depois de seis iterações.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

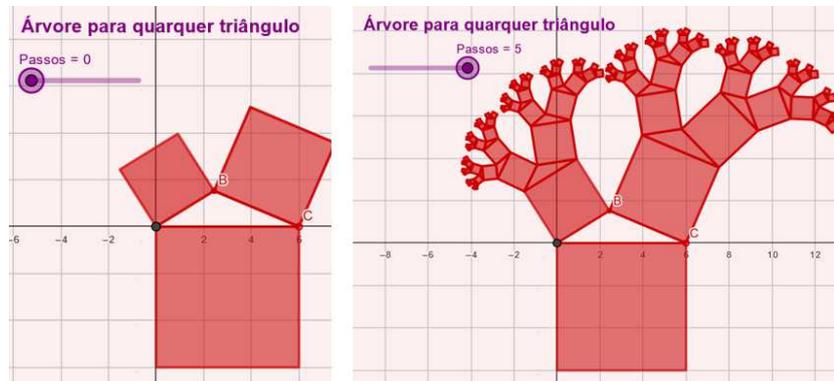
Figura 15 – Na esquerda, o conjunto inicial U_0 do fractal Árvore Pitagórica, nele são aplicadas as duas semelhanças do Quadro 4. Na direita, o fractal U_4 obtido depois de quatro iterações.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

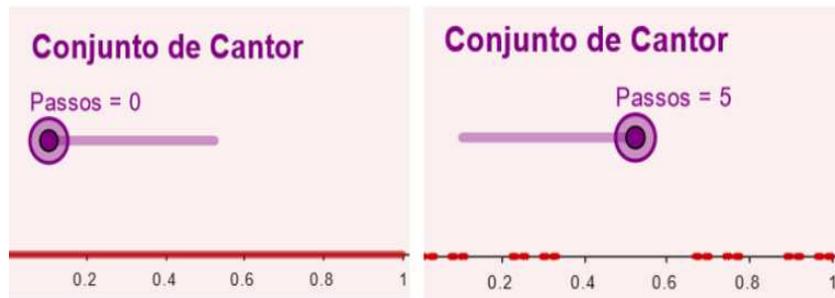


Figura 16 – Na esquerda, o conjunto inicial U_0 do fractal Árvore para qualquer tipo de triângulo, nele são aplicadas as duas semelhanças do Quadro 4. Na direita, o fractal U_5 obtido depois de cinco iterações.



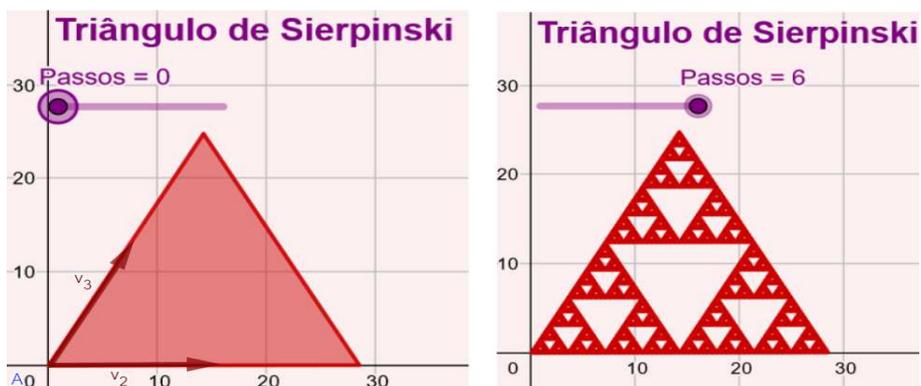
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 17 – Na esquerda, o segmento inicial U_0 do fractal Conjunto de Cantor, nele são aplicadas as duas semelhanças do Quadro 5. Na direita, o fractal U_5 obtido depois de cinco iterações.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 18 – Na esquerda, o triângulo inicial U_0 , nele são aplicadas as três semelhanças do Quadro 5. Na direita, o fractal U_6 obtido depois de seis iterações.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

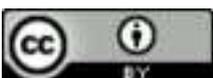
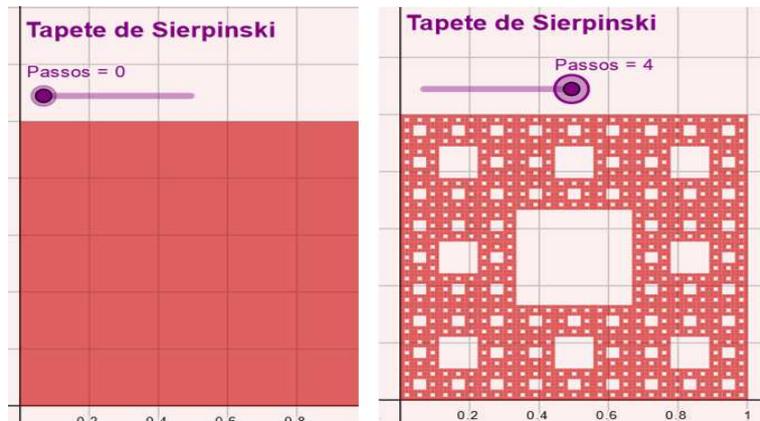


Figura 19 – Na esquerda, o quadrado inicial U_0 do fractal, nele são aplicadas as oito semelhanças do Quadro 5. Na direita, o fractal U_4 obtido depois de quatro iterações.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 20 – Na esquerda, o tetraedro inicial U_0 , nele são aplicadas as quatro semelhanças do Quadro 5. Na direita, o fractal Tetraedro de Sierpinski U_3 obtido depois de três iterações.

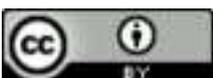


Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Figura 21 – Na esquerda, o cubo inicial U_0 , nele são aplicadas as vinte semelhanças do Quadro 5. Na direita, o fractal Esponja de Menger U_2 obtido depois de duas iterações.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).



Ressaltamos que nos fractais tridimensionais, isto é, a **Esponja de Menger** e o **Tetraedro de Sierpinski**, o número de iterações ou passos do Algoritmo 1 foram dois e três, respectivamente, devido ao fato de que o processador e a memória do computador não suportaram mais iterações.

5 Conclusões

Este trabalho de caráter experimental, apresenta os insumos, o equipamento e os produtos oriundos desta pesquisa, para serem usados e reproduzidos por estudantes, professores e entusiastas da matemática (veja o Quadro 6).

Quadro 6 – Dados desta pesquisa experimental

Insumos	Equipamento	Produtos (fractais)
Parâmetros dados nos Quadros 2, 3, 4 e 5	Algoritmo 1	Curva de Koch, Curva de Peano, Curva do Dragão, Tipo Dürer, Árvore Simples, Árvore Pitagórica, Árvore gerada a partir de um triângulo arbitrário, Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Tetraedro de Sierpinski, Esponja de Menger.

Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Usamos o fractal **Curva de Koch** como exemplo de uso do Algoritmo 1 junto com os dados do Quadro 2 (veja a subseção 4.1, onde são descritas todas as linhas do algoritmo implementado no GeoGebra). Os fractais trabalhados são categorizados em quatro tipos: **Frenteira** (Quadro 2, contendo os parâmetros de três fractais: Curva de Koch, Curva de Peano e Curva do Dragão), **Tipo Dürer** (Quadro 3, contendo os parâmetros de dez fractais com polígonos regulares de três a doze lados), **Tipo Árvore** (Quadro 4, contendo os parâmetros de três fractais: Árvore Simples, Árvore Pitagórica e Árvore gerada a partir de qualquer triângulo) e **Remoção** (Quadro 5, contendo os parâmetros de cinco fractais: Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Tetraedro de Sierpinski e Esponja de Menger).

Os resultados ou produtos de nossa pesquisa podem ser acessos por meio dos enlaces externos à plataforma GeoGebra que se encontram no Quadro 6, onde é possível manipular dina-



micamente cada etapa da construção. Também podem ser encontrados na subseção “Galeria de Fractais” (4.2). Acreditamos que este trabalho pode contribuir na compreensão dos conceitos da disciplina de Álgebra Linear, muitas vezes considerada pelos estudantes abstrata ou pouco aplicável.

Referências

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução à metodologia do trabalho científico**: elaboração de trabalhos na graduação. 10. ed. São Paulo: Atlas, 2010. 176 p.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2012. 786 p.

ARAÚJO, Francisco Geovane da Silva; MARINS, Alessandra Senes. Introduzindo a geometria fractal no Ensino Médio por meio da perspectiva de modelagem matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 6, n. 18, p. 21–34, 2019. DOI: <https://dx.doi.org/10.30938/bocehm.v6i18.2333>.

BARBOSA, Lara Martins; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da. Sobre pensamento computacional na construção de um Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Pesquisa e Debate em Educação**, Juiz de Fora, v. 9, n. 1, p. 537-559, 2019. DOI: <http://dx.doi.org/10.34019/2237-9444.2019.v9.31129>.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a geometria fractal**: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Grupo Autêntica, 2007. 160 p.

FADIN, C.; TORTOLA, E. Cartão Fractal Degraus Centrais: uma Atividade com Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá: UFMT, 2019.

FERREIRA, J. C.; JULIO, R. S. Construindo seu fractal: experiências a partir de oficinas. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá: UFMT, 2019.

FRISKE, Andréia Luisa; MATHIAS, Carmen Vieira. Fractais do tipo Dürer e GeoGebra: uma aplicação para as Transformações Lineares. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 1, n. 2, p. 32-41, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.35819/remat2015v1i2id1247>.



MORAN, Mariana; REZENDE, Veridiana. Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 8, n. 15, p. 109-127, 2020.

DOI:<https://dx.doi.org/10.5965/2357724X08152020109>.

PAIXÃO, F. L. B.; ARAÚJO, T. V.; NASCIMENTO, M. L. do. Geometria Fractal: Uma Proposta de Investigação de Conceitos Matemáticos nos Anos Finais do Ensino Fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá: UFMT, 2019.

PAULA, Clayton Eugenio Santos de; SOUZA, Tatiana Miguel Rodrigues de. Uma abordagem da geometria fractal para o Ensino Médio. **C.Q.D.: Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 10, 2017. Disponível em:

<https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/130>. Acesso em: 6 jun. 2024.

PEREIRA, T.; BORGES, F. A. A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. **Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Canoas, v. 19, n. 4, p. 563-581, 2017. Disponível em:

<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2424/2525>. Acesso em: 21 dez. 2024.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da geometria fractal**. Orientador: Manassés Xavier de Souza. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em:

<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7651>. Acesso em: 21 dez. 2024.

REZENDE, Veridiana; MORAN, Mariana; MÁRTIRES, Thais Michele; PAIXÃO, Fabricia Carvalho. O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina, v. 11, n. 2, p.

160-171, 2018. Disponível em: <https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/4616>.

Acesso em: 20 dez. 2024.

REZENDE, Veridiana; MORAN, Mariana; MÁRTIRES, Thais Michele; TRAVASSOS, Wilian. Registros de representação semiótica e sua articulação com o hexágono de Dürer nas aulas de Matemática. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**,

Pernambuco, v. 9, n. 2, p. 1-25, 2018. DOI: <https://doi.org/10.36397/emteia.v9i2.237436>.



SANTOS, R. R. de F.; COUTINHO, A. E. V. B. Geometria fractal no ensino de matemática: um mapeamento sistemático. **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, v. 8, n. 2, p. 12559-12570, 2022. DOI: <https://doi.org/10.34117/bjdv8n2-272>.

