



Sobre circunferências e pontos médios na geometria da ε -métrica da soma

About circles and midpoints in the geometry of the ε -metric of addition

Acerca de círculos y puntos medios en la geometría de la ε -métrica de la suma

Edwin Pedro López Bambarén ¹

Universidade Federal de Roraima (UFRR), Boa Vista, RR, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-2729-4574>,  <http://lattes.cnpq.br/2181932551587540>



Newton Mayer Solórzano Chávez²

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Foz do Iguaçu, PR, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-5492-2068>,  <http://lattes.cnpq.br/5434324704126162>

Dik Dani Lujerio Garcia³

Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo (UNASAM), Huaraz, Ancash, Perú

 <https://orcid.org/0000-0002-5360-8189>,  <http://lattes.cnpq.br/1821896152899041>

<https://bit.ly/ctivitaeconcytec>

Resumo: Neste trabalho, os autores perturbam a métrica da soma adicionando uma aplicação linear que depende de um parâmetro de perturbação ε , com $0 \leq \varepsilon < 1$. Esta nova forma de medir distâncias no plano cartesiano é chamada de ε -métrica da soma. Mostra-se que a ε -métrica da soma é não-negativa e satisfaz a desigualdade triangular, porém ela não é simétrica. Dessa forma, se introduz uma nova geometria não euclidiana. Define-se e classifica-se tanto as circunferências e os pontos médios nessa nova geometria. Obtêm-se dois tipos de circunferências e mais de um ponto que podem ser chamados de pontos médios. Exemplos, gráficos e interpretações geométricas são apresentados para uma melhor compreensão do trabalho.

Palavras-chave: ε -métrica da soma; métrica Randers; ponto médio; circunferência.

Abstract: In this work, the authors perturb the metric of addition by adding a linear map that depends on a perturbation parameter ε , with $0 \leq \varepsilon < 1$. This new way of measuring distances in the Cartesian plane is called the ε -metric of addition. It is shown that the ε -metric of addition is non-negative and satisfies the triangle inequality, but it is not symmetric. Thus, a new non-Euclidean geometry is introduced. Both circles and midpoints are defined and classified in this new geometry. Two types of circles and more than one point that can be called a midpoint are obtained. Examples, graphs, and geometric interpretations are presented for a better

¹**Currículo sucinto:** Possui doutorado em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Atualmente é professor Adjunto da Universidade Federal de Roraima (UFRR). **Contribuição de autoria:** Administração do projeto, análise formal, conceituação, escrita – primeira redação, escrita – revisão e edição, investigação. **Contato:** edwin.lopez@ufrr.br.

²**Currículo sucinto:** Possui doutorado em Matemática pela Universidade de Brasília (UNB). Atualmente é professor Adjunto da Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA). **Contribuição de autoria:** Análise formal, conceituação, escrita – revisão e edição, investigação, metodologia. **Contato:** nmayer159@gmail.com.

³**Currículo sucinto:** Possui grau de Maestria em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Atualmente é docente ordinário da Facultad de Ciencias da UNASAM e estudante de Doutorado em Matemática na Universidad Nacional de Trujillo. **Contribuição de autoria:** Análise formal, conceituação, escrita – revisão e edição, investigação, metodologia. **Contato:** dlujerio@unasam.edu.pe.



understanding.

Keywords: ε -metric of addition; Randers metric; midpoint; circle.

Resumen: En este trabajo, los autores perturban la métrica de la suma añadiendo una aplicación lineal que depende de un parámetro de perturbación ε , con $0 \leq \varepsilon < 1$. Esta nueva forma de medir distancias en el plano cartesiano se denomina métrica ε -suma. Se demuestra que la métrica ε -suma es no negativa y satisface la desigualdad triangular, sin embargo, no es simétrica. De esta manera, se introduce una nueva geometría no euclidiana. Se definen y clasifican tanto las circunferencias como los puntos medios en esta nueva geometría. Se obtienen dos tipos de circunferencias y más de un punto que pueden ser llamados puntos medios. Se presentan ejemplos, gráficos e interpretaciones geométricas para una mejor comprensión del trabajo.

Palabras clave: ε -métrica de la suma; métrica Randers; punto médio; circunferencia.

Data de submissão: 31 de maio de 2024.

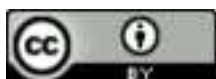
Data de aprovação: 10 de outubro de 2024.

1 Introdução

Modelos concretos de geometria não euclidiana são estudados para uma compreensão mais aprofundada do nosso ambiente e das diversas manifestações físicas presentes nele. Diversos modelos de geometria não euclidiana são frequentemente empregados no estudo de fenômenos físicos devido à sua capacidade de representar realidades que a geometria euclidiana não pode descrever adequadamente.

Um exemplo notável é a geometria Randers, utilizada para modelar o tempo de viagem de um barco em um cenário onde há uma correnteza ou vento presente. Esse modelo é particularmente útil em aplicações náuticas e meteorológicas, oferecendo uma forma mais precisa de prever rotas e tempos de viagem (ver Shen (2003)).

Outro modelo importante é a métrica da soma, também conhecida como métrica do táxi ou métrica de Manhattan. Esse modelo é utilizado para descrever o percurso de um táxi em uma metrópole, onde o movimento se dá predominantemente em linhas retas ao longo de uma grade de ruas perpendiculares. A métrica de Manhattan é assim chamada devido à disposição das ruas na cidade de Nova York (ver Krause (2012) e So (2002)). Devido à sua simplicidade e eficiência computacional, a métrica da soma substitui frequentemente a métrica euclidiana em certas aplicações. Isso ocorre porque a métrica da soma não envolve cálculos de quadrados ou raízes quadradas, tornando os cálculos mais rápidos e menos intensivos para os computadores.



Além disso, a métrica da soma encontra aplicação em diversas áreas da ciência da computação e otimização, em que a simplicidade dos cálculos é crucial. Por exemplo, em problemas de roteamento e logística, nos quais a eficiência computacional pode resultar em economias significativas de tempo e recursos (ver, por exemplo, Cruz (2022)).

Inspirados pelas distâncias Randers bidimensionais da forma $d_E(P, Q) + \varepsilon\pi_2(P - Q)$, onde d_E é a métrica Euclidiana, $|\varepsilon| < 1$ e π_2 é a projeção na segunda coordenada, este trabalho considera uma métrica análoga utilizando a métrica da soma. Especificamente, considera-se uma métrica da forma $d_S(P, Q) + \varepsilon\pi_2(P - Q)$, onde d_S é a métrica da soma. Esta métrica é denominada ε -métrica da soma (ver Definição 5).

Demonstramos que a ε -métrica da soma satisfaz três das quatro propriedades fundamentais que definem uma métrica: identidade, não-negatividade e desigualdade triangular (ver Definição 2.1). No entanto, ela não cumpre o requisito da simetria.

Além disso, desenvolvemos as equações associadas a diversos elementos geométricos sob esta nova métrica. Especificamente, obtivemos as equações da circunferência e dos pontos médios utilizando a ε -métrica da soma. Essas equações diferem das suas contrapartes na geometria euclidiana, revelando novas propriedades geométricas interessantes que emergem ao incorporar o termo $\varepsilon\pi_2(P - Q)$.

Essa abordagem não só amplia a compreensão da própria geometria Euclidiana e suas propriedades, mas também oferece novas ferramentas para modelar problemas em que variações não euclidianas da distância são mais adequadas.

2 Preliminares

Nesta seção daremos algumas definições e propriedades que nos servirão como base nas seguintes seções, e podem ser encontrados em diversas bibliografias sobre espaços métricos e geometria Euclidiana e não euclidiana como Krause (2012), Lima (2011), Shen (2003) e So (2002).



2.1 Espaços métricos

Definição 2.1 (Lima, 2011, p. 1). *Uma métrica num conjunto não vazio M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $\xi, \eta, \zeta \in M$:*

$$(D_1) \quad d(\xi, \xi) = 0,$$

$$(D_2) \quad \text{Se } \xi \neq \eta \text{ então } d(\xi, \eta) > 0,$$

$$(D_3) \quad d(\xi, \eta) = d(\eta, \xi),$$

$$(D_4) \quad d(\xi, \eta) \leq d(\xi, \zeta) + d(\zeta, \eta) \text{ (desigualdade triangular).}$$

Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M .

Exemplo 2.2 (Lima, 2011, p. 2). *A métrica “zero-um”. Qualquer conjunto M não-vazio pode tornar-se um espaço métrico. Basta definir a métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.*

Exemplo 2.3 (Lima, 2011, p. 2). *A reta, ou seja, o conjunto \mathbb{R} dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $a, b \in \mathbb{R}$ é dada por $d(a, b) = |a - b|$. Essa é a chamada “métrica usual” da reta.*

A seguir, adotaremos a notação

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \quad \dots$$

para nos referir a pontos de \mathbb{R}^2 .

Exemplo 2.4 (Lima, 2011, p. 3). *Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em \mathbb{R}^2 . Dados ξ e η , escrevemos:*

$$d_E(\xi, \eta) = \sqrt{(\eta_1 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \xi_2)^2}, \tag{1}$$

$$d_S(\xi, \eta) = |\eta_1 - \xi_1| + |\eta_2 - \xi_2| \quad \text{e} \tag{2}$$

$$d_M(\xi, \eta) = \max \{ |\eta_1 - \xi_1|, |\eta_2 - \xi_2| \}. \tag{3}$$

d_E, d_S e d_M são chamadas, respectivamente, métrica Euclidiana, da soma e do máximo.



A métrica da soma é conhecida também como a métrica do Taxi (taxicab metric) ou métrica de Manhattan. Por outro lado, a métrica do máximo é conhecida como a métrica de Chebyshev ou métrica do Tabuleiro de Xadrez.

Observação 2.5 (Lima, 2011, p. 4). *Sejam d_E , d_S e d_M as métricas definidas no Exemplo 2.4. Quaisquer que sejam $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$, tem-se:*

$$d_M(\xi, \eta) \leq d_E(\xi, \eta) \leq d_S(\xi, \eta) \leq 2 \cdot d_M(\xi, \eta). \tag{4}$$

Em particular a métrica euclidiana é acotada pela métrica da soma e vice-versa, pois

$$d_E(\xi, \eta) \leq d_S(\xi, \eta) \leq 2 \cdot d_E(\xi, \eta)$$

$$\frac{1}{2}d_S(\xi, \eta) \leq d_E(\xi, \eta) \leq d_S(P, Q).$$

Definição 2.6. *Seja d uma métrica qualquer em \mathbb{R}^2 . Dizemos que uma métrica d é invariante por translações, se para qualquer translação $\mathcal{T}_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathcal{T}_p(x) = x + p$, onde $p \in \mathbb{R}^2$, se tenha*

$$d(\mathcal{T}_p(\xi), \mathcal{T}_p(\eta)) = d(\xi, \eta),$$

para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$.

Definição 2.7. *Seja d uma métrica qualquer em \mathbb{R}^2 . Dize-se que uma métrica d é invariante por rotações, se para qualquer rotação $\mathcal{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por*

$$\mathcal{R}_\theta(\xi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \xi,$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$, se tenha

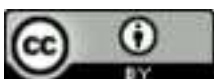
$$d(\mathcal{R}_\theta(\xi), \mathcal{R}_\theta(\eta)) = d(\xi, \eta),$$

para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$.

Observação 2.8. *Sabe-se que d_S e d_M são invariantes por translações, mas não por rotações.*

2.2 Métricas Randers

Uma métrica Randers definida sobre uma variedade diferenciável M é definida por $F = \alpha + \beta$, onde α é uma métrica Riemanniana sobre M e β é uma 1-forma definida sobre M com $\|\beta\|_\alpha < 1$. Maiores detalhes sobre métricas Randers consultar Cheng e Shen (2012). A seguir damos um exemplo de uma métrica Randers definida sobre $M = \mathbb{R}^2$.



Exemplo 2.9. A função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \varepsilon y_2,$$

onde ε é uma constante com $|\varepsilon| < 1$, é um dos exemplos mais simples de métrica Randers. Essa métrica Randers, que também pode ser chamado de norma Randers, induz a seguinte distância Randers $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(\xi, \eta) = d_E(\xi, \eta) + \varepsilon \pi_2(\eta - \xi),$$

onde d_E é a distância Euclidiana usual e π_2 é a projeção na segunda coordenada.

As métricas Randers foram estudadas primeiramente pelo físico G. Randers em 1941 desde o ponto de vista da relatividade geral (Randers, 1941). Tempo depois esses tipos de métricas foram usadas na teoria do microscópico eletrônico por R. S. Ingarden em 1957, quem os nomeou de métricas Randers pela primeira vez. Em Bao, Robles e Shen (2004), os autores descreveram o problema de navegação de Zermelo em variedades Riemannianas e demonstraram que o caminho com menor tempo de viagem é a geodésica de métricas Randers. Reciprocamente, eles demonstraram construtivamente que toda métrica Randers surge como solução do problema de navegação de Zermelo em alguma variedade Riemanniana sob a influência de um vento apropriado. Veja a Proposição 1.1 na Seção 1.3 em Bao, Robles e Shen (2004). As chamadas métricas Randers induzem uma distância Randers, a qual pode ser interpretada como tempo de viagem ótimo do problema de navegação relacionado a essa métrica Randers. Alguns resultados básicos sobre geometria Randers no plano podem ser encontrados em Chávez *et al.* (2021) e Chávez *et al.* (2024).

O Exemplo 2.9 e a Observação 2.5 nos motivam a estudar a métrica da soma perturbada adicionando uma aplicação linear.

3 A ε -métrica da soma

Definição 3.1. Sejam $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \varepsilon < 1$, d_S a métrica da soma e a função $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\pi_2(x_1, x_2) = x_2$. A função $d_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_\varepsilon(\xi, \eta) = d_S(\xi, \eta) + \varepsilon \pi_2(\eta - \xi) \tag{5}$$

é chamada ε -métrica da soma.



Observação 3.2. A ε -métrica da soma não é simétrica. Já que, tomando $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ com $\pi_2(\xi - \eta) \neq 0$, temos

$$d_\varepsilon(\xi, \eta) = d_S(\xi, \eta) + \varepsilon\pi_2(\eta - \xi) \neq d_S(\eta, \xi) - \varepsilon\pi_2(\eta - \xi) = d_\varepsilon(\eta, \xi).$$

Proposição 3.3. A ε -métrica da soma satisfaz as seguintes propriedades

- (1) $d_\varepsilon(\xi, \xi) = 0$,
- (2) Se $\xi \neq \eta$, então $d_\varepsilon(\xi, \eta) > 0$,
- (3) $d_\varepsilon(\xi, \eta) \leq d_\varepsilon(\xi, \zeta) + d_\varepsilon(\zeta, \eta)$.

Prova.

(1) Da propriedade (D_1) da métrica da soma d_S , tem-se

$$d_\varepsilon(\xi, \xi) = d_S(\xi, \xi) + \varepsilon\pi_2(\xi - \xi) = 0.$$

(2) Sejam $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ pontos distintos em \mathbb{R}^2 . Se $\pi_2(\eta - \xi) = 0$, então pela positividade de d_S , tem-se

$$d_\varepsilon(\xi, \eta) = d_S(\xi, \eta) > 0.$$

Por outro lado, usando $\pi_2(\eta - \xi) \neq 0$, e a identidade $|x| = \text{sgn}(x) \cdot x$, onde sgn é a função sinal definida por

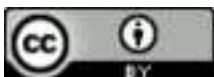
$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

tem-se

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\xi, \eta) &= d_S(\xi, \eta) + \varepsilon\pi_2(\eta - \xi) \geq |\eta_2 - \xi_2| + \varepsilon(\eta_2 - \xi_2) \\ &= (1 + \varepsilon \text{sgn}(\eta_2 - \xi_2))|\eta_2 - \xi_2| > 0. \end{aligned}$$

(3) Pela propriedade (D_4) da métrica da soma, temos

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\xi, \eta) &= d_S(\xi, \eta) + \varepsilon\pi_2(\eta - \zeta + \zeta - \xi) \\ &\leq d_S(\xi, \zeta) + d_S(\zeta, \eta) + \varepsilon\pi_2(\eta - \zeta) + \varepsilon\pi_2(\zeta - \xi) \\ &= d_\varepsilon(\xi, \zeta) + d_\varepsilon(\zeta, \eta). \end{aligned}$$



Proposição 3.4. *A ε -métrica da soma é invariante por translações.*

Prova. *Sejam os pontos ξ, η em \mathbb{R}^2 e seja a translação $T_p(x) = x + p$, com $p \in \mathbb{R}^2$. Então, pela Observação 2.8, temos*

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(T_p(\xi), T_p(\eta)) &= d_\varepsilon(\xi + p, \eta + p) = d_S(\xi + p, \eta + p) + \varepsilon\pi_2((\eta + p) - (\xi + p)) \\ &= d_S(\xi, \eta) + \varepsilon\pi_2(\eta - \xi) = d_\varepsilon(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Observação 3.5. *A ε -métrica da soma não é invariante por rotações. Basta mostrar que*

$$d_\varepsilon\left(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}, 0)\right) \neq d_\varepsilon\left((0, 0), (\sqrt{2}, 0)\right).$$

De fato,

$$d_\varepsilon\left(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}, 0)\right) = d_\varepsilon((0, 0), (1, 1)) = 2 + \varepsilon,$$

e

$$d_\varepsilon((0, 0), (\sqrt{2}, 0)) = \sqrt{2}.$$

4 A circunferência

A seguir, são caracterizados todos os pontos do plano tais que a distância a um ponto dado é uma constante. Como a ε -métrica da soma definida em (5) é não simétrica, consideramos duas interpretações de circunferências.

Definição 4.1. *Dados c um ponto em \mathbb{R}^2 e r um número real positivo, define-se a circunferência de centro c e raio r , como sendo o conjunto formado por todos os pontos $x \in \mathbb{R}^2$ tais que satisfazem uma das propriedades:*

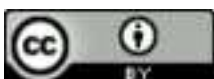
$$C_1: d_\varepsilon(c, x) = r;$$

$$C_2: d_\varepsilon(x, c) = r.$$

O conjunto de pontos verificando a propriedade (C_k) é chamado circunferência tipo k , onde $k = 1, 2$; denotaremos esse conjunto por $C_k[c; r]$.

Pela definição da ε -métrica da soma em (5) tem-se,

$$x \in C_k[c; r] \iff d_S(x, c) + (-1)^{k-1}\varepsilon\pi_2(x - c) = r.$$



Teorema 4.2. Dados $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ em \mathbb{R} . A circunferência $C_k[c; r]$ é caracterizada pelos lados de um quadrilátero de vértices $(c_1 \pm r, c_2)$ e $(c_1, c_2 \pm \frac{r}{1 \pm (-1)^{k-1} \epsilon})$.

Prova. A prova é feita somente para o caso $C_1[c; r]$, pois a prova do caso $C_2[c; r]$ é análoga. Como d_ϵ é invariante por translação, basta considerar $c = (0, 0)$. Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, da definição de d_ϵ tem-se que $x \in C_1[(0, 0); r]$ se, e somente se,

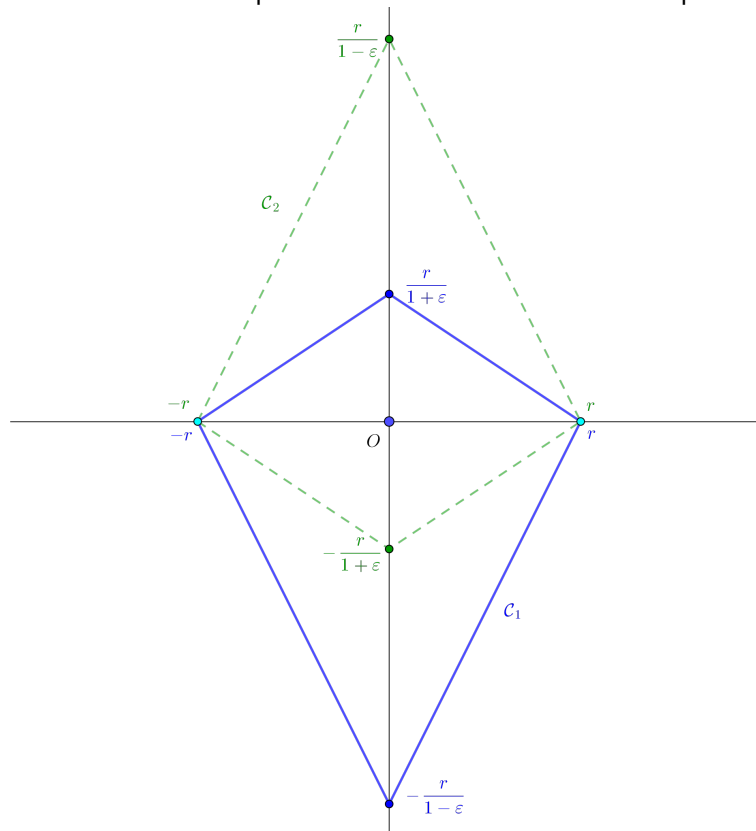
$$|x_1| + |x_2| + \epsilon x_2 = r,$$

logo, pode-se caracterizar essa equação em cada quadrante de \mathbb{R}^2 como segue,

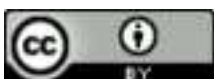
$$C_1[(0, 0), r] : \begin{cases} x_1 + (1 + \epsilon)x_2 = r, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ -x_1 + (1 + \epsilon)x_2 = r, & x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ -x_1 - (1 - \epsilon)x_2 = r, & x_1 < 0, x_2 < 0, \\ x_1 - (1 - \epsilon)x_2 = r, & x_1 \geq 0, x_2 < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Conclui-se que $C_1[(0, 0); r]$ é a borda de um quadrilátero Euclidiano de vértices $(r, 0)$, $(0, \frac{r}{1+\epsilon})$, $(-r, 0)$ e $(0, -\frac{r}{1-\epsilon})$ (Ver Figura 1).

Figura 1 – A ϵ -circunferência tipo 1 de cor azul e ϵ -circunferência tipo 2 de cor verde



Fonte: Elaboração dos autores.



5 Ponto médio usando ε -métrica da soma

Devido à não simetria da distância d_ε , pode-se considerar 6 noções distintas de pontos médios.

Definição 5.1. Diz-se que um ponto p é ponto médio do segmento $\overline{\xi\eta}$ se p está na reta contendo $\overline{\xi\eta}$ e satisfaz uma das seguintes propriedades:

(C₁) $d_\varepsilon(\xi, p) = d_\varepsilon(p, \eta);$

(C₄) $d_\varepsilon(\xi, p) = d_\varepsilon(\xi, \eta)/2;$

(C₂) $d_\varepsilon(\xi, p) = d_\varepsilon(\eta, p);$

(C₅) $d_\varepsilon(\xi, p) = d_\varepsilon(\eta, \xi)/2;$

(C₃) $d_\varepsilon(p, \xi) = d_\varepsilon(p, \eta);$

(C₆) $d_\varepsilon(p, \xi) = d_\varepsilon(\xi, \eta)/2.$

O ponto p que verifica a propriedade (C_k) é chamado ponto médio do tipo k , onde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Na sequência, serão caracterizados os pontos médios definidos acima.

Proposição 5.2. Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ com $\xi \neq \eta$. Então os pontos médios tipo 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são caracterizadas, em cada caso, por

Tipo 1:

1. Se $\pi_2(\eta - \xi) \geq 0$,

$$p = \frac{\xi + \eta}{2};$$

2. Se $\pi_2(\eta - \xi) < 0$,

$$p = \xi - \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\eta, \xi)}{\varepsilon \pi_2(\eta - \xi)} (\eta - \xi) \quad \text{ou} \quad p = \frac{\xi + \eta}{2} \quad \text{ou}$$

$$p = \xi + \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\xi, \eta)}{\varepsilon \pi_2(\eta - \xi)} (\eta - \xi).$$

Tipo 2:

$$p = \xi + \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\eta, \xi)}{d_S(\xi, \eta)} (\eta - \xi);$$

Tipo 3:

$$p = \xi + \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\xi, \eta)}{d_S(\xi, \eta)} (\eta - \xi);$$



Tipo 4:

$$p = \frac{\xi + \eta}{2} \quad \text{ou} \quad p = \xi - \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\xi, \eta)}{d_\varepsilon(\eta, \xi)} (\eta - \xi);$$

Tipo 5:

$$p = \xi + \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\eta, \xi)}{d_\varepsilon(\xi, \eta)} (\eta - \xi) \quad \text{ou} \quad p = \frac{3\xi - \eta}{2};$$

Tipo 6:

$$p = \xi + \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\xi, \eta)}{d_\varepsilon(\eta, \xi)} (\eta - \xi) \quad \text{ou} \quad p = \frac{3\xi - \eta}{2}.$$

Prova. Pela invariância de d_ε por translação pode-se assumir que $\xi = O = (0, 0)$. Em consequência, um ponto na reta que passa por ξ e η pode ser escrito como

$$p = (p_1, p_2) = \lambda(\eta_1, \eta_2) = (\lambda\eta_1, \lambda\eta_2) \tag{7}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, tem-se cada um dos seguintes casos.

Ponto médio tipo 1 (C_1): Da igualdade $d_\varepsilon(O, p) = d_\varepsilon(p, \eta)$ tem-se

$$\begin{aligned} |p_1 - 0| + |p_2 - 0| + \varepsilon(p_2 - 0) &= |\eta_1 - p_1| + |\eta_2 - p_2| + \varepsilon(\eta_2 - p_2), \\ (|\lambda| - |1 - \lambda|) (|\eta_1| + |\eta_2|) + (2\lambda - 1)\varepsilon\eta_2 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

(1) Se $\lambda > 1$, então $|\lambda| - |1 - \lambda| = 1$ e a equação (8) torna-se

$$d_\varepsilon(\eta, O) + (2\lambda - 1)\varepsilon\eta_2 = 0$$

a qual não tem sentido quando $\eta_2 \geq 0$. Por outro lado, se $\eta_2 < 0$, temos que

$$\lambda = -\frac{d_\varepsilon(\eta, O)}{2\varepsilon\eta_2} > 1. \tag{9}$$

(2) Se $0 < \lambda < 1$, então $|\lambda| - |1 - \lambda| = 2\lambda - 1$ e a equação (8) torna-se

$$(2\lambda - 1)d_\varepsilon(O, \eta) = 0,$$

o que implica em

$$\lambda = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

(3) Se $\lambda < 0$, então $|\lambda| - |1 - \lambda| = -1$ e a equação (8) torna-se

$$-d_\varepsilon(O, \eta) + 2\lambda\varepsilon\eta_2 = 0,$$

a qual só tem sentido quando $\eta_2 < 0$. Assim,

$$\lambda = \frac{d_\varepsilon(O, \eta)}{2\varepsilon\eta_2} < 0. \tag{11}$$



Então, de (9), (10) e (11) em (7) conclui-se que (ver a seção 6 para uma interpretação geométrica desses pontos)

- Se $\eta_2 \geq 0$,

$$p = \frac{\eta}{2};$$

- Se $\eta_2 < 0$,

$$p = -\frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\eta, O)}{\pi_2(\eta)} \eta \quad \text{ou} \quad p = \frac{\eta}{2} \quad \text{ou} \quad p = \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(O, \eta)}{\pi_2(\eta)} \eta.$$

Ponto médio tipo 2 (C_2): Da igualdade $d_\varepsilon(O, p) = d_\varepsilon(\eta, p)$ torna-se

$$\begin{aligned} |p_1 - 0| + |p_2 - 0| + \varepsilon(p_2 - 0) &= |\eta_1 - p_1| + |\eta_2 - p_2| - \varepsilon(\eta_2 - p_2), \\ |\lambda|(|\eta_1| + |\eta_2|) + \lambda\varepsilon\eta_2 &= |1 - \lambda|(|\eta_1| + |\eta_2|) - (1 - \lambda)\varepsilon\eta_2, \end{aligned}$$

$$(|\lambda| - |1 - \lambda|)(|\eta_1| + |\eta_2|) + \varepsilon\eta_2 = 0. \tag{12}$$

Nota-se que, se $\lambda > 1$ ou $\lambda < 0$ a equação (12) torna-se $d_\varepsilon(O, \eta) = 0$ ou $d_\varepsilon(\eta, O) = 0$, respectivamente, as quais não têm solução para λ . Por outro lado, se $0 < \lambda < 1$, a equação (12) torna-se

$$(2\lambda - 1)(|\eta_1| + |\eta_2|) + \varepsilon\eta_2 = 0, \tag{13}$$

que implica em

$$\lambda = \frac{d_\varepsilon(\eta, O)}{2(|\eta_1| + |\eta_2|)}. \tag{14}$$

Então, de (14) em (7) tem-se (ver Figura 2)

$$p = \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\eta, O)}{d_S(O, \eta)} \eta.$$

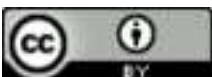
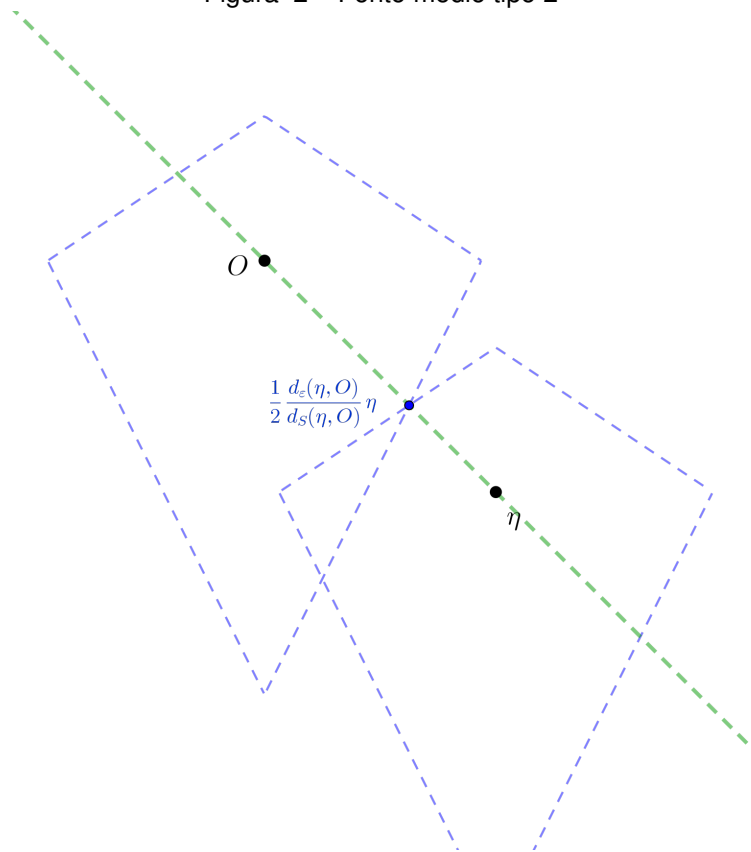


Figura 2 – Ponto médio tipo 2



Fonte: Elaboração dos autores.

Ponto médio tipo 3 (C_3): Da igualdade $d_\varepsilon(p, O) = d_\varepsilon(p, \eta)$ tem-se

$$|0 - p_1| + |0 - p_2| + \varepsilon(0 - p_2) = |\eta_1 - p_1| + |\eta_2 - p_2| + \varepsilon(\eta_2 - p_2),$$

$$|\lambda|(|\eta_1| + |\eta_2|) - \lambda\varepsilon\eta_2 = |1 - \lambda|(|\eta_1| + |\eta_2|) + (1 - \lambda)\varepsilon\eta_2,$$

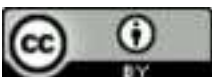
$$(|\lambda| - |1 - \lambda|)(|\eta_1| + |\eta_2|) - \varepsilon\eta_2 = 0. \tag{15}$$

Nota-se que, se $\lambda > 1$ ou $\lambda < 0$ a equação (12) torna-se $d_\varepsilon(\eta, O) = 0$ ou $d_\varepsilon(O, \eta) = 0$, respectivamente. As quais não têm solução para λ . Por outro lado, se $0 < \lambda < 1$, a equação (15) torna-se

$$(2\lambda - 1)(|\eta_1| + |\eta_2|) - \varepsilon\eta_2 = 0, \tag{16}$$

que implica em

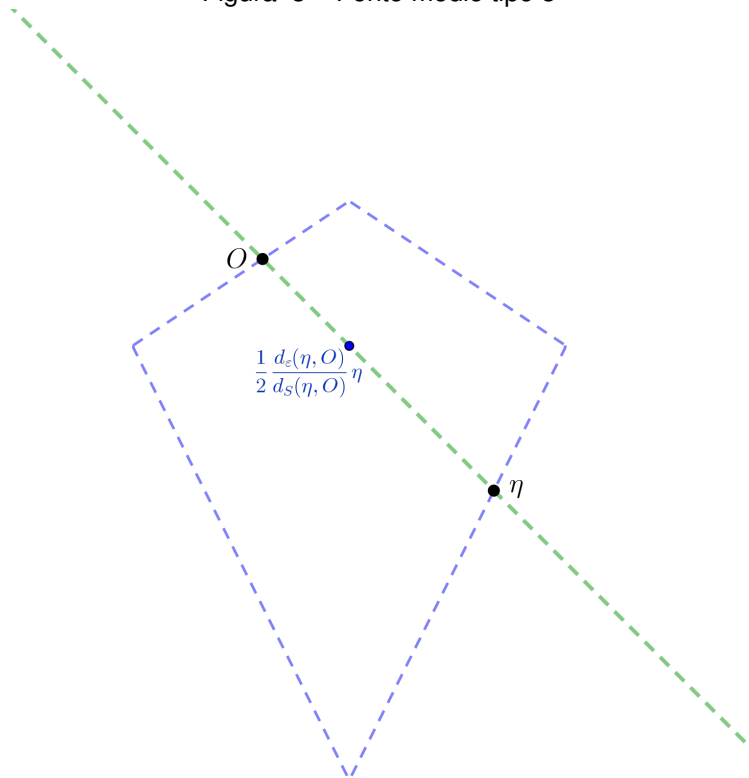
$$\lambda = \frac{d_\varepsilon(O, \eta)}{2(|\eta_1| + |\eta_2|)}. \tag{17}$$



Então, de (17) em (7) obtém-se (ver Figura 3)

$$p = \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(O, \eta)}{d_S(O, \eta)} \eta.$$

Figura 3 – Ponto médio tipo 3



Fonte: Elaboração dos autores.

Ponto médio tipo 4 (C_4): Da igualdade $2d_\varepsilon(O, p) = d_\varepsilon(O, \eta)$ tem-se

$$2|\lambda|(|\eta_1| + |\eta_2|) + 2\lambda\varepsilon\eta_2 = |\eta_1| + |\eta_2| + \varepsilon\eta_2. \tag{18}$$

(1) Se $\lambda > 0$, em (18) tem-se

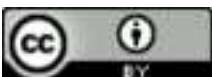
$$2\lambda(|\eta_1| + |\eta_2|) + 2\lambda\varepsilon\eta_2 = |\eta_1| + |\eta_2| + \varepsilon\eta_2$$

ou seja,

$$(1 - 2\lambda)d_\varepsilon(O, \eta) = 0.$$

Logo,

$$1 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2}. \tag{19}$$



(2) Se $\lambda < 0$, em (18) tem-se

$$-2\lambda(|\eta_1| + |\eta_2|) + 2\lambda\varepsilon\eta_2 = |\eta_1| + |\eta_2| + \varepsilon\eta_2$$

ou seja,

$$-2\lambda d_\varepsilon(\eta, O) = d_\varepsilon(O, \eta).$$

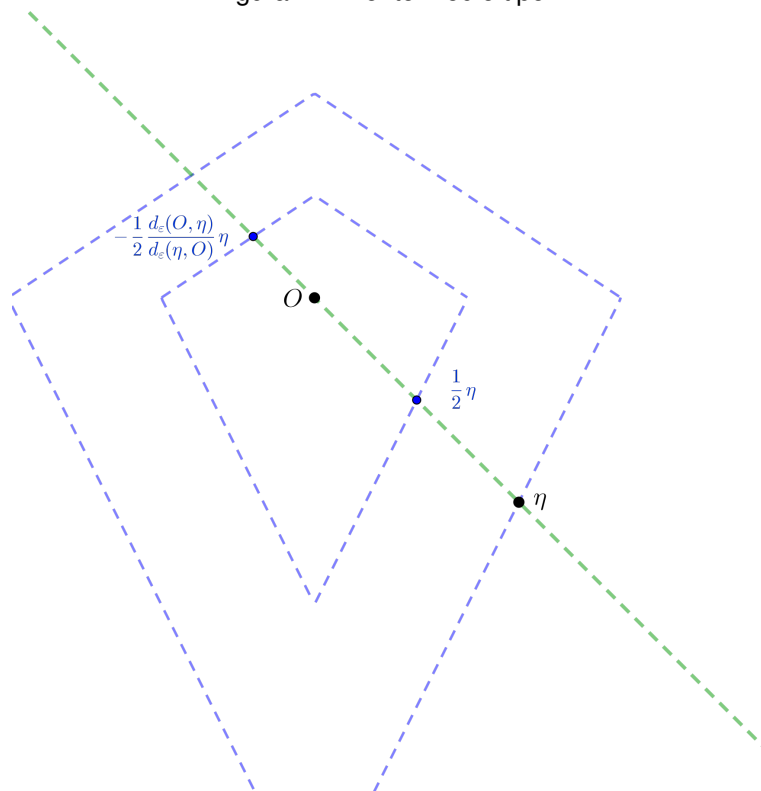
Logo,

$$\lambda = -\frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(O, \eta)}{d_\varepsilon(\eta, O)}. \tag{20}$$

Então, de (19) e (20) em (7) obtém-se (ver Figura 4)

$$p = \frac{\eta}{2} \quad \text{ou} \quad p = -\frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(O, \eta)}{d_\varepsilon(\eta, O)} \eta.$$

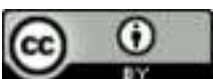
Figura 4 – Ponto médio tipo 4



Fonte: Elaboração dos autores.

Ponto médio tipo 5 (C_5): Da igualdade $2d_\varepsilon(O, p) = d_\varepsilon(\eta, O)$ tem-se

$$2|\lambda|(|\eta_1| + |\eta_2|) + 2\lambda\varepsilon\eta_2 = 2(|p_1| + |p_2| + \varepsilon p_2) = |\eta_1| + |\eta_2| - \varepsilon\eta_2. \tag{21}$$



(1) Se $\lambda > 0$, a equação (21) torna-se

$$2\lambda(|\eta_1| + |\eta_2|) + 2\lambda\varepsilon\eta_2 = |\eta_1| + |\eta_2| - \varepsilon\eta_2$$

ou seja,

$$2\lambda d_\varepsilon(O, \eta) = d_\varepsilon(\eta, O).$$

Logo,

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\eta, O)}{d_\varepsilon(O, \eta)}. \tag{22}$$

(2) Se $\lambda < 0$, em (21) tem-se

$$-2\lambda(|\eta_1| + |\eta_2|) + 2\lambda\varepsilon\eta_2 = |\eta_1| + |\eta_2| - \varepsilon\eta_2,$$

ou seja,

$$(1 + 2\lambda)d_\varepsilon(\eta, O) = 0.$$

Logo,

$$\lambda = -\frac{1}{2}. \tag{23}$$

Então, de (22), (23) em (7) obtém-se

$$p = \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(\eta, O)}{d_\varepsilon(O, \eta)} \eta \quad \text{ou} \quad p = -\frac{\eta}{2}.$$

Ponto médio tipo 6 (C_6): Da igualdade $2d_\varepsilon(p, O) = d_\varepsilon(O, \eta)$ tem-se

$$2|\lambda|(|\eta_1| + |\eta_2|) - 2\lambda\varepsilon\eta_2 = |\eta_1| + |\eta_2| + \varepsilon\eta_2. \tag{24}$$

(1) Se $\lambda > 0$, a equação (24) torna-se

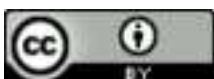
$$2\lambda(|\eta_1| + |\eta_2|) - 2\lambda\varepsilon\eta_2 = |\eta_1| + |\eta_2| + \varepsilon\eta_2,$$

ou seja,

$$2\lambda d_\varepsilon(\eta, O) = d_\varepsilon(O, \eta).$$

Logo,

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{d_\varepsilon(O, \eta)}{d_\varepsilon(\eta, O)}. \tag{25}$$



(2) Se $\lambda < 0$, (24) torna-se

$$-2\lambda(|\eta_1| + |\eta_2|) - 2\lambda\epsilon\eta_2 = |\eta_1| + |\eta_2| + \epsilon\eta_2,$$

ou seja,

$$(1 + 2\lambda)d_\epsilon(O, \eta) = 0.$$

Logo,

$$\lambda = -\frac{1}{2}. \tag{26}$$

Então, de (25) e (26) em (7) obtém-se

$$p = \frac{1}{2} \frac{d_\epsilon(O, \eta)}{d_\epsilon(\eta, O)} \eta \quad \text{ou} \quad p = -\frac{\eta}{2}.$$

Exemplo 5.3. Dado os pontos $\xi = (0, 0)$ e $\eta = (2, -3)$. Calcula-se o ponto médio tipo 1 entre ξ e η usando a ϵ -métrica da soma. É claro que o ponto médio $p = (p_1, p_2)$ pertence à reta $p_\lambda = \lambda(2, 3)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo p é da forma $p = (2\lambda, -3\lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como p é ponto médio entre ξ e η , então deverá satisfazer a relação

$$d_\epsilon(\xi, p) = d_\epsilon(p, \eta),$$

$$d_S(\xi, p) + \epsilon\pi_2(p - \xi) = d_S(p, \eta) + \epsilon\pi_2(\eta - p),$$

substituindo os pontos ξ e η tem-se

$$5|\lambda| - 3\epsilon\lambda = 5|\lambda - 1| + 3\epsilon\lambda - 3\epsilon. \tag{27}$$

Resolvendo a Equação (27) por casos, tem-se

(i) Se $\lambda < 0$, então, encontra-se $\lambda = \frac{3\epsilon - 5}{6\epsilon}$, que é solução pois $\lambda < -\frac{1}{3}$. Assim tem-se o primeiro ponto médio dado por $p = \left(\frac{6\epsilon - 10}{6\epsilon}, \frac{15 - 9\epsilon}{6\epsilon}\right)$.

(ii) Se $0 < \lambda < 1$, então encontra-se $\lambda = \frac{3\epsilon + 5}{6\epsilon - 10} = \frac{1}{2}$. Assim tem-se um ponto médio $p = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Observe que esse ponto médio é Euclidiano.

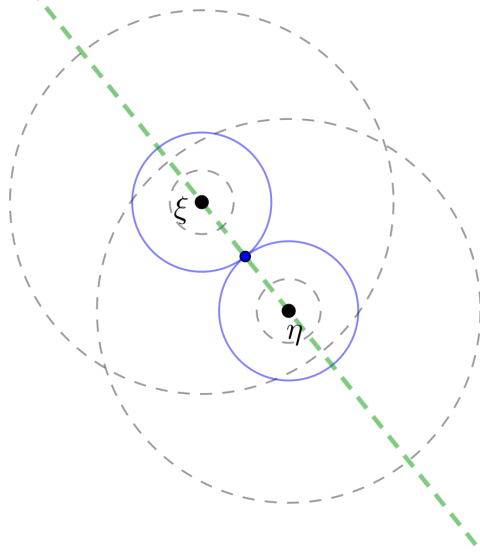
(iii) Se $\lambda > 1$, então, encontra-se $\lambda = \frac{5 + 3\epsilon}{6\epsilon}$, que é solução pois $\lambda > \frac{8}{6}$. Assim encontra-se um último ponto médio dado por $p = \left(\frac{6\epsilon + 10}{6\epsilon}, \frac{-15 - 9\epsilon}{6\epsilon}\right)$.



6 Interpretação geométrica dos pontos médios tipo 1

É conhecido que o ponto médio Euclidiano de um segmento $\overline{\xi\eta}$ é único, pois, se for usada a técnica de fazer crescer o raio das circunferências euclidianas de centros ξ e η com o mesmo raio, nota-se que após se intersectar as duas circunferências e a reta contendo ξ e η pela primeira vez, essa tripla interseção não acontece novamente (ver Figura 5).

Figura 5 – Interseção de circunferências caso Euclidiano



Fonte: Elaboração dos autores.

Geometricamente, a igualdade $d_\varepsilon(\xi, p) = d_\varepsilon(p, \eta)$ pode ser interpretada como a interseção da circunferência tipo 1 de centro ξ com a circunferência tipo 2 de centro η possuindo o mesmo raio. Ao contrário do que acontece com a interseção tripla no caso Euclidiano, no caso da ε -métrica da soma, após se obter uma tripla interseção (circunferências e a reta que contém ξ e η) pela primeira vez, essa tripla interseção acontece novamente, fora do segmento $\overline{\xi\eta}$, como se observa na Figura 6.

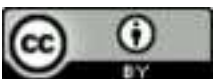
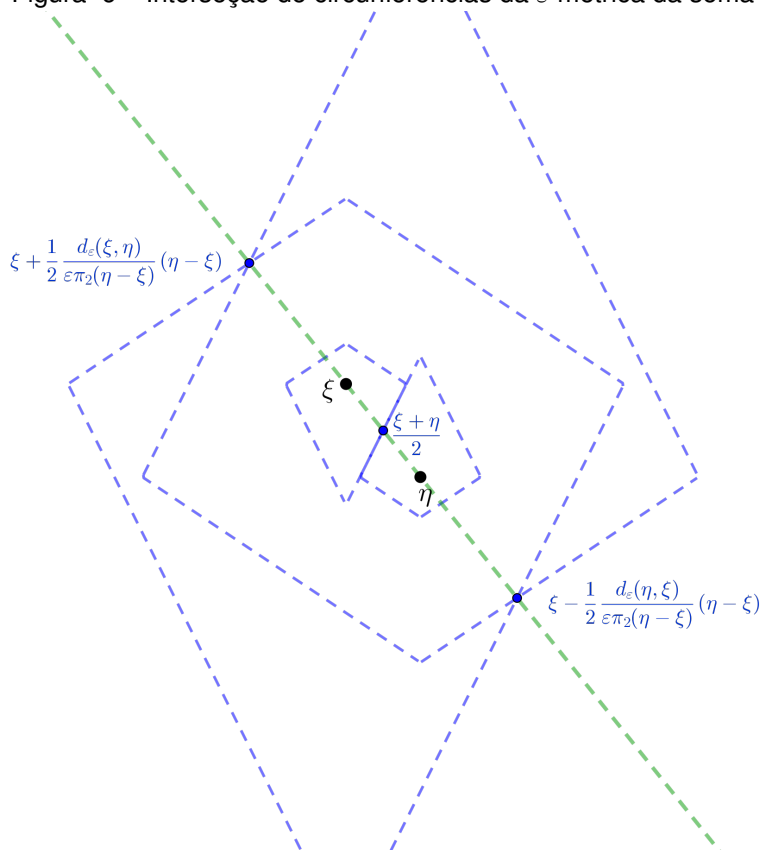


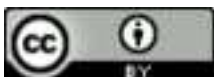
Figura 6 – Interseção de circunferências da ε -métrica da soma



Fonte: Elaboração dos autores.

7 Considerações finais

Neste trabalho, introduzimos a ε -métrica da soma, uma extensão da métrica da soma tradicional que incorpora um termo adicional, $\varepsilon\pi_2(P - Q)$ (ver Definição 5). Na Proposição 3.3 mostramos que essa ε -métrica da soma satisfaz três das quatro propriedades fundamentais das métricas: identidade, não-negatividade e desigualdade triangular, mas não satisfaz a simetria (ver Observação 3.2). Além disso, desenvolvemos as equações associadas a circunferências e pontos médios sob essa nova métrica. Devido à não simetria, obtivemos duas interpretações de circunferências e consequentemente 6 interpretações para pontos médios. No Teorema 4.2 mostramos que as circunferências têm o formato de uma quadrilátero simétrico em relação à linha vertical que passa pelo centro (ver Figura 1). Por outro lado, na Proposição 5.2 obtemos, surpreendentemente, uma quantidade enorme de pontos, os quais podem ser chamadas de pontos médios. Na seção 6 damos uma interpretação geométrica dos pontos médios tipo 1, onde notamos o porquê aparecem mais de um ponto médio,



mostrando assim uma perspectiva diferente do denominado ponto médio no caso da ε -métrica da soma e no caso Euclidiano.

Referências

BAO, D.; ROBLES, C.; SHEN, Z. Zermelo navigation on Riemannian manifolds. **Journal of Differential Geometry**, v. 66, n. 3, p. 377-435, 2004. DOI:

<https://doi.org/10.4310/jdg/1098137838>.

CHÁVEZ, Newton Mayer Solórzano; LEÓN, Víctor Arturo Martínez; SOSA, Luz Gisselle Quevedo; MOYSES, Junior Rodrigues. Um problema de navegação de Zermelo: Métrica de Funk. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 7, n. 1, p. e3010, 2021. DOI:

<https://doi.org/10.35819/remat2021v7i1id4574>.

CHÁVEZ, Newton Mayer Solórzano; MOYSES, Junior Rodrigues; LEÓN, Víctor Arturo Martínez. Sobre as parábolas de Funk. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 1, p. e3001, 2024. DOI: <https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6680>.

CHENG, X.; SHEN, Z. **Finsler Geometry: An Approach via Randers Spaces**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. 150 p.

CRUZ, Y. A. L. **Classificação de imagens multiespectrais da mão utilizando análise por componentes principais e KNN**. Orientador: Clarimar José Coelho. 2022. 16 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia da Computação) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2022. Disponível em: <https://repositorio.pucgoias.edu.br/jspui/bitstream/123456789/5116/1/TCC%20-%20Yan.pdf>.

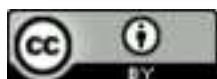
Acesso em: 10 dez. 2024.

KRAUSE, E. F. **Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry**. New York: Dover Publications, 2012. 96 p.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

RANDERS, G. On an Asymmetrical Metric in the Four-Space of General Relativity. **Physical Review**, v. 59, p. 195-199, 1941. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.59.195>.

SHEN, Z. Finsler Metrics with $K = 0$ and $S = 0$. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 55, n. 1, p. 112-132, 2003. DOI: <https://doi.org/10.4153/CJM-2003-005-6>.



SO, Shing. Recent Developments in Taxicab Geometry. **CUBO, A Mathematical Journal**, [S. l.], v. 4, n. 2, p. 75-92, 2002. Disponível em:

<https://cubo.ufro.cl/ojs/index.php/cubo/article/view/1785>. Acesso em: 17 dez. 2024.

Agradecimentos

O segundo autor agradece o apoio financeiro concedido pela UNILA por meio do Edital nº 121/2023/PRPPG-UNILA-PAAP (Protocolo 23422.026477/2023-54). Os autores agradecem também os comentários e sugestões dos revisores.

