A GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS COMO UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO NO CONTEXTO DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

DISTANCE GEOMETRY AS AN APPROACH FOR HIGH SCHOOL WITHIN THE CONTEXT OF THE BRAZILIAN NATIONAL COMMON CORE CURRICULUM

LA GEOMETRÍA DE DISTANCIAS COMO UNA PROPUESTA PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN EL CONTEXTO DE LA BASE NACIONAL COMÚN CURRICULAR BRASILEÑA

Samuel Haag[1], Felipe Delfini Caetano Fidalgo[1]

[1] Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Blumenau, SC, Brasil.

Data de submissão: 12 abr. 2024. Data de aprovação: 16 out. 2024. Financiamento: os autores declaram não haver. Número do projeto e instituição responsável pelo parecer do Comitê de Ética em Pesquisa: 56233322.4.0000.0121 – UFSC. Como citar: HAAG, Samuel; FIDALGO, Felipe Delfini Caetano. A Geometria de Distâncias como uma proposta para o Ensino Médio no contexto da Base Nacional Comum Curricular. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 11, p. e201, 28 fev. 2025. https://doi.org/10.35819/remat2025v11id7227.

Resumo: A Geometria de Distâncias consiste em uma forma diferente de estudar analiticamente a geometria: explora um espaço métrico a partir de informações de distâncias entre pontos e não de suas coordenadas. Mesmo recente, já apresenta contribuições relevantes na Matemática e na Computação, com diversas aplicações em Robótica, Cinemática Inversa, Proteômica, Engenharias, dentre outras. Entretanto, tal abordagem ainda não é apresentada pelos docentes no ensino básico de matemática, os quais geralmente abordam conteúdos de maneiras tradicionais, pouco conectadas com a realidade do aluno e com as inovações com as quais temos extenso contato. Este trabalho investiga a viabilidade de incluir problemas de Geometria de Distâncias no currículo, modernizando o ensino básico de Matemática a partir de novas perspectivas que promovem a resolução de problemas e integram tecnologias no desenvolvimento das habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Baseado em um estudo de caso com atividades realizadas na escola Feliciano Pires, em Brusque, Santa Catarina, o trabalho sugere atividades que podem enriquecer a prática docente e beneficiar o aprendizado dos alunos sob essa nova perspectiva.
Palavras-chave: Geometria de Distâncias; Ensino Médio; BNCC.

Abstract: Distance Geometry offers an alternative approach to analytically studying geometry: it explores a metric space based on distance information between points, rather than their coordinates. Although it is a relatively recent field, DG has already made significant contributions to Mathematics and Computer Science, with various applications in Robotics, Inverse Kinematics, Proteomics, Engineering, and other areas. However, this approach is still absent in basic mathematics education, where teachers generally present content in traditional ways with limited connections to student's real-world experiences or to current innovations. This work investigates the feasibility of incorporating Distance Geometry problems into the curriculum, aiming to modernize basic Mathematics education through new perspectives that foster problem-solving and integrate technologies in developing the skills defined in the Brazilian National Common Core Curriculum (BNCC). Based on a case study with activities conducted at Feliciano Pires School in

Brusque, Santa Catarina, this paper suggests activities to enrich teaching practices and enhance student learning through this new perspective.
Keywords: Distance Geometry; High School; BNCC.

Resumen: La Geometría de Distancias consiste en una forma diferente de estudiar la geometría analíticamente, explorando un espacio métrico a partir de información de distancias entre puntos, en lugar de coordenadas. Aunque reciente, ya presenta contribuciones relevantes en Matemáticas y Computación, con aplicaciones en Robótica, Cinemática Inversa, Proteómica, Ingenierías, entre otras. Sin embargo, este enfoque aún no integra en la enseñanza básica de matemáticas, donde los docentes suelen abordar los contenidos de manera tradicional, desconectada de la realidad estudiantil y de las innovaciones actuales. Este trabajo investiga la viabilidad de incluir problemas de Geometría de Distancias en el currículo, modernizando la enseñanza básica de Matemáticas mediante nuevas perspectivas que fomenten la resolución de problemas e integren tecnologías en el desarrollo de las habilidades previstas en la Base Nacional Común Curricular Brasileña (BNCC). Basado en un estudio de caso con actividades realizadas en la escuela Feliciano Pires, en Brusque, Santa Catarina, el estudio sugiere actividades que pueden enriquecer la práctica docente y mejorar el aprendizaje estudiantil desde esta nueva perspectiva.
Palabras clave: Geometría de Distancias; Escuela Secundaria; BNCC.

1 INTRODUÇÃO

O conteúdo matemático ensinado nas escolas básicas do Brasil ainda se remete ao formalismo clássico adotado pelos professores até o final da década de 50 do século passado, isto é, aos modelos Euclidiano e Platônico: definições, axiomas e resultados já existentes e consolidados são ensinados verbalmente com o auxílio do quadro para que o estudante apenas copie, memorize e repita por meio de exercícios (Fiorentini, 1995).

Com o intuito de aperfeiçoar a prática pedagógica e de prover uma paradigma mais adequado à contemporaneidade, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi homologada em 2017 no Brasil com o objetivo de servir como documento normativo a fim de fomentar o desenvolvimento de habilidades e competências adequadas para os estudantes no lugar de apenas prover conteúdos e apelar à memorização e à repetição (Brasil, 2018).

A chamada “Reforma do Ensino Médio”, que foi discutida em paralelo às novas demandas da BNCC, regulamentada pela Lei 13.415/2017 (Brasil, 2017), tem por objetivo corrigir demandas como quantidade excessiva de disciplinas, formação técnica e profissional desalinhada ao mundo do trabalho e grande evasão escolar devido ao distanciamento entre o conhecimento construído e realidade do estudante (Silva, 2018); é notório, para professores e estudantes, que a falta de motivação para os processos de aprendizagem residem nessa fase da educação, acarretando principalmente nos avassaladores dados de fuga escolar (Alves; Lavor; Pereira, 2017).

Neste contexto, o objetivo principal deste trabalho consiste em propor a discussão sobre a integração da chamada Geometria de Distâncias (GD) como tema a ser abordado no Ensino Médio. A motivação dos autores é permitir a exploração de habilidades da BNCC de uma forma que os estudantes relacionem conceitos estudados com situações reais, de aplicações que estão presentem em seu cotidiano e que fazem sentido a eles, tal que sigam empenhados em alcançar as competências desejadas nessa fase da educação.

A Geometria de Distâncias pode ser entendida como uma abordagem diferente para a Geometria Euclidiana, onde distâncias são os itens principais em vez de pontos no espaço, retas e/ou planos (Liberti; Lavor, 2017). Seu estudo ganhou força e forma definida na segunda metade do século XX, com o trabalho de Blumenthal (1953). Além disso, as aplicações para este tema são inúmeras, tais como em Astronomia, com a descoberta da posição de estrelas; em Bioquímica, com a determinação de estruturas moleculares a partir do cálculo das posições dos núcleos dos átomos; em Robótica, com a movimentação e o posicionamento de robôs no espaço-tempo; em Telecomunicações, com a localização de redes sem fio e GPS; dentre outras (Liberti; Lavor; Maculan et al., 2014).

Neste sentido, ensinar a GD para estudantes do ensino básico pode ser um novo caminho a ser explorado no eixo temático “Matemática”, aproximando-se da realidade do estudante, considerando a utilização de tecnologias na Educação e o desenvolvimento de habilidades e competências previstas pela BNCC. Também, esta abordagem tem potencial para contribuir com o desenvolvimento dessa área de pesquisa futuramente, formando uma nova geração de estudantes pensantes e prontos para alcançar novas descobertas e aplicações da Geometria de Distâncias.

Este artigo está organizado da maneira que segue. Na Seção 2, fazemos uma revisão da literatura abrangendo os materiais e legislações propostos para a abordagem da Geometria no Ensino Médio, os tópicos resumidos sobre o tema específico do trabalho e, também, o arcabouço que temos para conectar Geometria de Distâncias e o Ensino Médio. Na Seção 3, descrevemos a metodologia que utilizamos nesta pesquisa, com seus objetivos e o estudo de caso propriamente dito. Na Seção 4, apresentamos os resultados de nosso estudo de caso com a aplicação em sala de aula com alunos dos primeiro e segundo anos do Ensino Médio. Por fim, na Seção 5, trazemos à luz as nossas perspectivas sobre o trabalho realizado, bem como as considerações finais com apontamentos de trabalhos futuros a fim de, com efeito, consolidar a Geometria de Distâncias como um tópico a ser abordado no Ensino Médio.

A presente pesquisa é um excerto da dissertação de mestrado “Novos Caminhos na Matemática do Ensino Médio com a Geometria de Distâncias” (Haag, 2022), no qual é dado um enfoque maior em verificar a possibilidade de aplicar a Geometria de Distâncias seguindo as habilidades e competências previstas na BNCC para o Ensino Médio.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Diferente de outros documentos anteriores, que eram apenas norteadores, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a Lei 13.415/2017 (Brasil, 2017) da BNCC é obrigatória e, por este motivo, o presente artigo considera este contexto e este instrumento com o objetivo nortear a construção das habilidades e competências do currículo de Matemática no Ensino Médio. O conceito de competência utilizado na BNCC é derivado dos escritos de pensadores sobre a Educação do Brasil das últimas décadas, definindo de maneira clara e objetiva o que os alunos precisam "saber" e "saber fazer".

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socio-emocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (Brasil, 2018, p. 8).

Ela divide as habilidades e competências em quatro áreas do conhecimento, a saber: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (Brasil, 2018). A área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio é uma continuação do compêndio das habilidades e competências conquistadas no Ensino Fundamental, em que tal tema é dividido em cinco subáreas do conhecimento: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

Essa divisão não acontece no Ensino Médio, porque o objetivo da BNCC nessa fase da educação é aproveitar todo o potencial do aluno, mobilizando-o a raciocinar, representar, comunicar e argumentar, esperando que os alunos estabeleçam relações entre as áreas da Matemática. Nesse sentido, os campos do Ensino Médio estão integrados em quatro ideias fundamentais: movimento e posição; variação e constância; certeza e incerteza; relações e inter-relações (Brasil, 2018).

No caso do ensino de Geometria especificamente, as noções fundamentais mais importantes a serem ensinadas são **movimento e posição** (Brasil, 2018, p. 521):

> Movimento e posição estão presentes na localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano Cartesiano e no espaço tridimensional; direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas) e padrões das distribuições de dados. O uso de mapas, GPS e de outros recursos implica a observação e estudo desse par de ideias.
>
> Atividades investigativas com softwares dinâmicos que inter-relacionem movimento e posição podem também promover o desenvolvimento dessas ideias, importantes em cartografia e na movimentação diária do cidadão comum. Por vivermos em um mundo conectado com celulares às mãos, aparelhos de geolocalização, TVs a cabo, câmeras de vigilância etc., o estudo do movimento e posição tem muitas finalidades em diversas áreas.

Note que os conceitos matemáticos nessa área não possuem especificações de conteúdos, o que abre a possibilidade de trabalhar o que faz mais sentido para o aluno dentro de suas realidades e vivências. Assim, tais aplicações em situações cotidianas incitam modificações no padrão que os professores utilizam ao seguir uma sequência de conteúdos rígidos, mantido tradicionalmente nessa disciplina (Brasil, 1997).

Há vários estudos relativamente recentes que unem o ensino de Geometria e a tecnologia por meio do GeoGebra. É o caso, por exemplo, de Lopes (2013), Amado, Sanchez e Pinto (2015) e Faria e Maltempi (2019), mas poucos que utilizam a GD, um exemplo apenas, como o de França (2016). Uma das possíveis razões deste cenário é o fato das escolas normalmente abordarem apenas as Geometrias Euclidianas Plana, Espacial e Analítica.

Propor uma abordagem matemática diferente do tradicional, como a GD, pode ser um dos caminhos para conectar de maneira mais concreta a Matemática com as suas aplicações, conforme requer a BNCC, dada a riqueza dessa área principalmente com tecnologias conhecidas pelos alunos como, por exemplo, redes de sensores sem fio, GPS e *smartphones*.

2.2 GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS

Vários estudos ao longo da história da matemática contribuíram para desenvolvimento da Geometria de Distâncias (Cauchy, 1813; Cayley, 1841; Menger, 1928; Schoenberg, 1935; Blumenthal, 1953; Connelly, 1977).

Todos os estudos supramencionados formalizaram conceitos importantes para o que chamamos de Problema de Geometria de Distâncias (PGD) que, inicialmente, era resolvido apenas quando eram conhecidas todas as distâncias. Foi somente em 1978 que Yechiam Yemini caracterizou uma definição mais contemporânea, que devido ao avanço computacional, permitiu uma generalização do conceito para qualquer conjunto de distâncias. Na época, ele utilizou o termo "Problema de Posicionamento": "[...] O Problema de Posicionamento surge quando é necessário localizar um conjunto de objetos geograficamente distribuídos usando medidas de distâncias entre alguns pares de objetos [...]" (Yemini, 1978, p. 138).

A partir dessa generalização, o problema fundamental da Geometria de Distâncias ganhou uma forma definida pela Teoria dos Grafos. Essa Teoria é uma vertente importante para a definição da GD, que surgiu no século XVII, advindo da resolução do Problema das Sete Pontes de Königsberg solucionada por Euler (1741), que posteriormente deu origem à Teoria de Grafos (Biggs; Lloyd; Wilson, 1986).

Para compreender a definição do problema fundamental da GD é necessário elucidar alguns conceitos básicos sobre grafos. Um grafo G consiste em dois conjuntos, um de vértices (V) e outro de arestas (E) conectando alguns pares de vértices (Liberti; Lavor; Maculan et al., 2014). Um grafo é dito simples quando todas as arestas conectam vértices diferentes no conjunto V e é dito não direcionado quando as arestas entre dois vértices admitem comutatividade. Assim, com a teoria dos grafos, a definição do PGD é (Liberti; Lavor; Maculan et al., 2014, p. 5):

> Seja um grafo simples e não direcionado $G = (V, E)$, em que $V = \{1, 2, 3, ..., n\}$ é um conjunto de n objetos e E um conjunto de pares não-ordenados (a, b) em V. Conhecendo as distâncias (d_{AB}) de E por uma função não-negativa $d : E \to \mathbb{R}_+$, é possível determinar realizações $x : V \to \mathbb{R}^k$ para qualquer $k > 0$ tal que:
>
> $$\forall \ a, b \in E, \qquad ||x_a - x_b|| = d_{AB}$$

onde $||.||$ representará a norma euclidiana durante todo o trabalho. Desse modo, entende-se que a geometria de distâncias busca determinar as posições de objetos em $\mathbb{R}^k$ satisfazendo todas as restrições de distâncias conhecidas entre elas. Um conjunto S de todas as soluções para esse tipo de problema é denominado de **realização** e pode ser vazio, finito ou infinito não-enumerável (Liberti; Lavor; Maculan et al., 2014).

Sobre essa cardinalidade, a desigualdade triangular é um fator determinante de sua interpretação. Dadas as distâncias entre os pares não-ordenados, três a três, temos que:

1. S é vazio quando algumas das distâncias dadas não satisfazem as desigualdades triangulares;

2. S é finito quando conhecemos todas as distâncias entre os pares não ordenados e, estas, não ferem a desigualdade triangular;

3. S é infinito não-enumerável quando não são conhecidas todas as distâncias e, dessa forma, alguns pares ficarão “livres”, determinando infinitas possibilidades.

Note que, se existir uma solução para o problema, a congruência é uma transformação linear que consegue modificar as posições dos objetos sem alterar as distâncias entre eles, então teríamos infinitas soluções possíveis realizando translações, rotações e reflexões de uma única solução (Dolce; Pompeo, 1993).

Assim, a congruência demonstra que, se há uma realização para o problema de geometria de distâncias, então temos infinitas realizações congruentes por meio dessas transformações, denominadas de isometrias. Sabendo disso, a PGD também necessita de estratégias para padronizar as realizações e fornecer uma estrutura útil para a solução do problema.

Nesse sentido, o PGD é um modelo abstrato e possui diversas aplicações relacionadas com a Matemática, ciência e engenharia, conforme destacado por Gonçalves (2020, p. 13); algumas dessas aplicações são os seguintes problemas:

> [...] o problema de sincronização de relógios [103], a localização em rede de sensores [114, 18, 104, 55, 9], a determinação de estruturas de proteínas a partir de dados experimentais [51, 112, 71, 82, 5, 16], algumas aplicações em processamento de sinais [31] e em ciência de dados [20, 29, 76], além da forte relação com rigidez de grafos e estruturas [58, 41, 11, 12, 25, 54, 3][a].
>
> [a]Relação das referências do trabalho original com este: [...] o problema de sincronização de relógios (Singer, 2011), a localização em redes de sensores (So; Ye, 2007; Yemini, 1978; Anderson et al., 2010; Biswas et al., 2006; Krislock; Wolkowicz, 2010), a determinação de estruturas de proteínas a partir de dados experimentais (Alipanahi et al., 2013; Billinge et al., 2018; Havel; Wüthrich, 1985; Lavor et al., 2010; Liberti; Lavor; Mucherino, 2013; Wu; Wu; Yuan, 2008), algumas aplicações em processamento de sinais (Dokmanic et al., 2015) e em ciência de dados (Borg; Groenen, 2005; Cunningham; Ghahramani, 2015; Liberti, 2020), além da forte relação com rigidez de grafos e estruturas (Alfakih, 2013; Asimow; Roth, 1978, 1979; Connelly, 2005; Gluck, 1975; Jackson; Jordán, 2005; Laman, 1970).

Cada área de pesquisa costumava atuar de forma independente, dada as diferentes aplicações, mas, em 2013, foi realizado o primeiro Workshop (Andrioni et al., 2013) específico para a geometria de distâncias, que proporcionou uma unificação dessas diferentes áreas de aplicações da GD. Antes, cada pesquisa era publicada e conhecida apenas dentro da sua respectiva área. A realização do evento contribuiu para o avanço dessa área de pesquisa, no sentido de compartilhar os métodos e explorar mais os problemas de GD. As áreas têm diferentes abordagens e métodos, perfazendo uma série de classificações da PGD, cujos nomes e acrônimos foram sintetizados em Liberti, Lavor, Maculan et al. (2014).

Note que o campo da Geometria de Distâncias é relativamente recente para a Matemática e muito fértil para um futuro desenvolvimento, o que corrobora com a intenção de apresentá-lo no Ensino Médio, fornecendo subsídios para os próximos pesquisadores desenvolverem e contribuírem para a GD e para a sociedade. Algumas das aplicações mencionadas serão exploradas quando em contato com a geometria do Ensino Médio.

2.3 HABILIDADES DO ENSINO MÉDIO E SUAS APLICAÇÕES NA GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS

Nesta seção, abordaremos onde a Geometria de Distâncias se localiza frente às habilidades da BNCC, visando estruturar em qual momento da educação é possível inseri-la no Ensino Médio. Cabe salientar que essa análise não leva em conta o alcance completo de cada habilidade, mas sim a viabilidade da aplicação da GD nesta fase do ensino.

Como mencionado anteriormente, a BNCC determina as competências e habilidades que os alunos devem alcançar ao longo do Ensino Médio, assim, foram analisadas as competências específicas da matemática e as habilidades dentro de cada competência para verificar quais possuem afinidade com os assuntos da GD.

A primeira competência específica está relacionada com a interpretação e compreensão da realidade. No que tange à GD, temos as habilidades 3 e 5 cujos objetivos consistem em analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas juntamente com suas unidades de medida:

> (EM13MAT103) Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade. (Brasil, 2018, p. 525).
>
> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (Brasil, 2018, p. 525).

Nas habilidade supracitadas é possível visualizar aplicações da Geometria de Distâncias conectando a matemática e a química com as ligações entre moléculas tomando as distâncias microscópicas como parâmetro para analisá-las e reconhecer suas transformações isométricas (Alipanahi et al., 2013; Billinge et al., 2018; Havel; Wüthrich, 1985; Lavor et al., 2010; Liberti; Lavor; Mucherino, 2013; Wu; Wu; Yuan, 2008).

A segunda competência específica tem o objetivo de articular os conhecimentos relativos à sustentabilidade, sociedade e ética, mais voltada para a parte de pesquisa social e educação financeira, sobre o qual não associa-se a geometria de maneira geral.

A terceira competência específica busca utilizar os conceitos da Matemática do ensino fundamental para aprimorar as habilidades sobre os campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – sendo uma das competências que possui habilidades com maior afinidade com a GD, principalmente por integrar os conceitos algébricos e geométricos que perfazem a base da Geometria de Distâncias.

As habilidades dessa competência que apresentaram algum conceito correlacionados com a GD foram a 1, 10 e 15. A habilidade 1 no quesito de resoluções de equações algébricas e gráficas como a trilateração. A habilidade 10 explorando os problemas de contagem de soluções da GD e resolução por diagrama como o problema de sincronização do relógio. A habilidade 15 trazendo a resolução de algoritmos de maneira geral, reconhecendo-os e solucionando-os como é realizado em todos os problemas da Geometria de Distâncias.

> (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais. (Brasil, 2018, p. 528).

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore. (Brasil, 2018, p. 529).

> (EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma. (Brasil, 2018, p. 529).

Todas essas três habilidades fazem conexões com as resoluções e algoritmos apresentados na Geometria de Distâncias, como equações simultâneas na resolução dos sistemas para a trilateração (Tolani; Goswami; Badler, 2000; Eren et al., 2004; Yemini, 1978), soluções pela árvore de possibilidades na sincronização de relógios (Singer, 2011), que podem ser aplicados em resoluções de problemas e em movimentações no campo da robótica.

A quarta competência específica apresenta a parte de funções e representações no plano Cartesiano na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. No caso da GD aborda-se principalmente as funções do 2º grau, no caso das circunferências e esferas, porém, no escopo dessa competência seriam apenas as funções polinomiais, o que não é o caso dos problemas na GD.

A quinta e última competência específica irá realizar investigações e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos, por meio de reconhecimento de padrões e utilização de tecnologias para validar as conjecturas formalizadas. Nessa competência temos habilidades que buscam investigar o comportamento de variáveis e conjecturar os padrões observados, muito semelhante ao que é necessário para resolver um PGD.

> (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano Cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.(Brasil, 2018, p. 533).

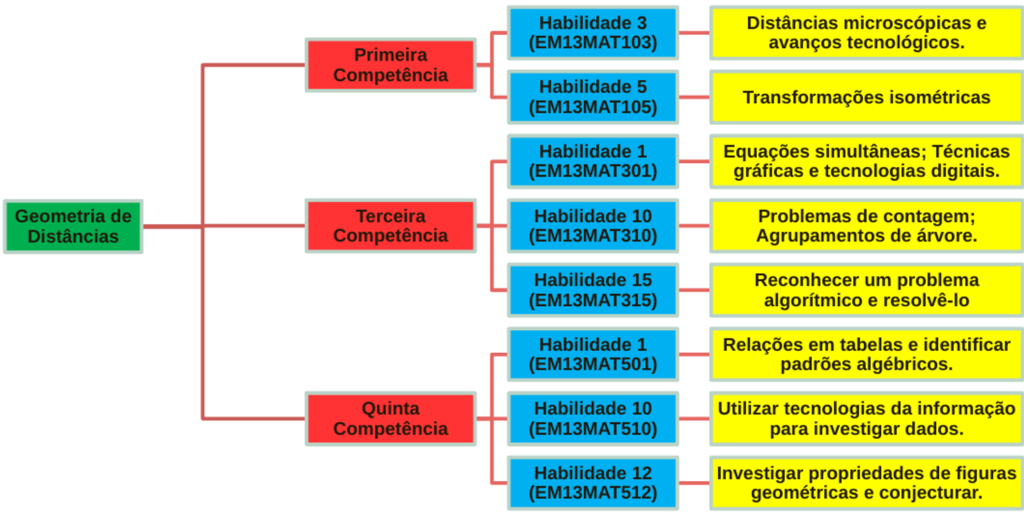
> (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (Brasil, 2018, p. 533).

> (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos. (Brasil, 2018, p. 533).

Todas as habilidades supracitadas possuem conexões com a Geometria de Distâncias, no que diz respeito à investigação de padrões algébricos e utilizando tecnologias da informação para identificar e conjecturar soluções aos problemas. Pode-se buscar problemas que utilizam em sua resolução assuntos como: desigualdade triangular, distância entre pontos, teorema de Pitágoras, transformações isométricas e análise de figuras poligonais dadas as distâncias entre seus vértices no plano Cartesiano.

Nesse sentido, foi verificado que há 8 habilidades da BNCC que estão conectadas com os problemas da GD, assim, a Figura 1 apresenta uma síntese da conexão da Geometria de Distâncias com a BNCC. Em vermelho tem-se as três competências específicas da matemática no Ensino Médio, em azul tem-se as habilidades de cada competência e, em amarelo, o assunto dentro da GD que possui algum contexto de aplicação para o Ensino Médio.

Figura 1 – Conteúdos da Geometria de Distâncias por habilidade



Fonte: elaboração própria.

Convém destacar que, embora exista uma vasta gama de estudos sobre matrizes dentro do GD, não há qualquer habilidade na BNCC que possui em seu escopo a representação ou cálculo envolvendo matrizes, podendo ser uma lacuna para futuras pesquisas sobre a BNCC e os motivos que levaram a remoção de um conhecimento tão importante na disciplina de Matemática e com tantas aplicações. Inclusive, observa-se um movimento dos professores para incluir esse conteúdo novamente no currículo.

Assim, comparando as normas e objetivos da BNCC para a disciplina de Matemática no Ensino Médio, documentalmente apresentou-se que há conteúdos da Geometria de Distâncias alinhados com as habilidades e competências propostas, sendo apenas necessário adaptar de maneira adequada aos interesses dos estudantes, dos professores e da sociedade.

Salienta-se que esse estudo não busca substituir o modelo tradicional já difundido entre os professores, mas sim, fornecer novos caminhos e fontes de conteúdos que estão engajados com as pesquisas e com alguma vivência ou realidade do aluno, para que este possa compreender a importância do estudo e da Matemática e seguir com maior motivação para aprendê-la.

3 METODOLOGIA

De acordo com Yin (2015), a pesquisa caracteriza-se como um estudo de caso aplicado, com abordagem qualitativa dos dados.

A aplicação deste estudo foi realizada na Escola de Educação Básica Feliciano Pires, localizada na cidade de Brusque, no estado de Santa Cataria, cuja seleção foi feita por acessibilidade do autor, resultando em uma amostra não probabilística de alunos de primeira série (44 alunos) e segunda série (53 alunos) do Ensino Médio, totalizando 97 alunos do Ensino Médio. Vale salientar que os alunos da primeira série estavam frequentando o novo modelo do Ensino Médio, com a nova disposição de disciplinas obrigatórias e eletivas. Os alunos da segunda série estavam no modelo tradicional de disciplinas.

Critérios de inclusão (na amostra): ser estudante de primeira ou segunda fase do Ensino Médio na Escola de Educação Básica Feliciano Pires e o respectivo responsável terem preenchido e assinado o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Critérios de exclusão (na amostra): o respectivo aluno ou o seu responsável legal não ter assinado o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e, portanto, não ter assentido com a participação do estudante na pesquisa.

Foram excluídos da amostra aproximadamente 20 alunos, os motivos foram a ausência dos termos assinados ou a ausência do participante na aplicação. Devido ao critério supramencionado, os alunos que não forneceram dados para a pesquisa, mas que eram integrantes da turma em que se aplicou as atividades desta pesquisa, assistiram e participaram normalmente da aula e das atividades propostas, mas sem terem suas informações utilizadas.

Aplicou-se um plano de aula que explora os conceitos de Geometria de Distâncias, conforme previsto na Revisão de Literatura (seção 2), com a utilização do *software* GeoGebra[1] para uma atividade na qual os alunos acessaram o *link* pelo celular e utilizaram o conceito de encontro de três circunferências para determinar a localização de um jogador em um mapa; a atividade constrói circunferências de modo automático quando dado o valor do raio com um controle de barra deslizante. Essa aplicação é vista na Geometria de Distâncias para a localização de sensores em rede (Biswas et al., 2006) e corrobora com o incentivo da BNCC para o uso de novas tecnologias.

Após a aplicação do plano de aula foi aplicado um questionário estruturado com perguntas sobre o tema da Geometria de Distâncias, a fim de verificar o quanto os alunos assimilaram os

[1] Atividade aplicada disponível em: `https://www.geogebra.org/m/bwnqkag6`.

conceitos da matemática e com perguntas autoafirmativas para verificar o interesse dos alunos pelo tema diferente do habitual.

Como a amostra foi por acessibilidade, não foi possível inferir os resultados para todos os alunos de escolas públicas da região, todavia, isso não fere o objetivo do estudo que consiste em verificar a inserção e aceitação do tema pelos alunos do Ensino Médio, assim como o alcance das habilidades propostas, pois dessa forma entende-se que a GD tem a possibilidade de ser inserida no currículo de matemática de acordo com as habilidades da BNCC.

4 RESULTADOS DA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Inicialmente, foi apresentado aos alunos o problema fundamental da Geometria de Distâncias abordando um exemplo do cálculo inverso do teorema de Pitágoras aplicado no plano Cartesiano, junto com as desigualdades triangulares, para a existência de solução para três pontos, pois esses são conhecimentos do Ensino Fundamental.

Os alunos, notoriamente, tinham pouco ou nenhum conhecimento sobre o teorema de Pitágoras, assim como vários conceitos matemáticos como a desigualdade triangular e a posição relativa entre círculos. Mesmo após a explicação do aplicador/autor, eles alegaram não ter adquirido esse conhecimento no Ensino Fundamental.

Tal dificuldade e falta de conhecimento matemático podem ser efeitos de mudanças no ensino dos últimos anos como as aulas a distância, porém, é necessário que se faça novos estudos para investigar tais efeitos e a situação da educação matemática ocasionada após a pandemia.

Assim, uma recapitulação sobre esses conceitos matemáticos prévios se fez necessária e, posteriormente, foi demonstrada a realização de três pontos em $\mathbb{R}^2$ utilizando o *GeoGebra* para criar e modificar as informações dos raios (distâncias) de circunferências para encontrar suas intersecções e por meio dessas informações encontrar uma localização específica no plano cartesiano. Concluiu-se nesse momento que a Geometria de Distâncias busca, por meio das distâncias conhecidas, as localizações dos objetos (no caso, pontos no plano Cartesiano).

No segundo momento do plano de aula, aplicou-se o problema da sincronização dos relógios (Liberti; Lavor, 2017), resolvido e compreendido sem dificuldade aparente dos alunos por meio de um fluxograma.

No terceiro momento da aplicação, notou-se, particularmente ao mencionar o celular e os sensores de rede sem fio, maior atenção dos alunos na aula, corroborando com a afirmação de França (2016), de que esse seria um assunto de maior interesse por parte dos alunos. Este foi realizado sem contratempos, e, ao relacionar as aplicações sobre a posição de estrelas, estruturas de proteínas, análise do movimento de robôs, localização de sensores em redes sem fio, localização e controle de submarinos (Liberti; Lavor; Maculan et al., 2014), observaram-se alguns comentários[2] expressando que o conteúdo da GD está sendo reconhecido e relacionado

[2] Aluno X: – Ah, então é assim que o celular funciona!

com a sua realidade.

O quarto momento da aplicação envolveu a atividade do jogo para encontrar o jogador no mapa, aplicado no GeoGebra e respondido em folha para verificar se os alunos aprenderam os conceitos básicos apresentados de localizar um ponto por meio da trilateração. O percentual de acertos e as respostas do jogo estão descritos na Tabela 1, a qual mostra o nome das cidades que deveriam ser localizadas no mapa do jogo e o percentual de alunos que acertaram.

Tabela 1 – Resultados da aplicação do jogo

Ordem: Localização	**Acertos (%)**	**Erros (%)**
1: Draghir	99,0	1,0
2: Borgs	97,9	2,1
3: Melandria	96,9	3,1
4: Minkares	93,8	6,2
5: Vorak	90,6	9,4
6: Templo dos Imortais	84,4	15,6

Fonte: elaboração própria.

Nota: dados da pesquisa.

Observou-se que, imediatamente após a explicação quando os alunos iniciaram a atividade, praticamente todos compreenderam e acertaram a localização. Na medida em que continuaram a resolver os problemas de trilateração, a taxa de acertos foi decrescente, indicando que a repetição do mesmo processo na atividade provocou desinteresse ou desatenção na resolução. Mesmo com esse evidente decrescimento de acertos, é notório que a maioria dos alunos compreendeu os conceitos apresentados pelo plano de aula, com uma média geral de 93,75% de acertos.

Com isso, entende-se que é possível propor problemas com Geometria de Distâncias para o Ensino Médio, elaborando e aplicando um plano de aula no qual os alunos compreendam conceitos matemáticos e adquiram conhecimentos relacionados com as habilidades e competências da BNCC.

Essa realização com 3 distâncias no plano Cartesiano é um conhecimento básico importante dentro da GD, que desenvolve no aluno subsídios para compreender a trilateração, que são habilidades importantes para desenvolver as áreas de localização de sensores, equipamentos e realizar movimentações autônomas (Yemini, 1978; Tolani; Goswami; Badler, 2000; Eren et al., 2004).

Nesse sentido, utilizar os conteúdos da Geometria de distâncias pode ser benéfico para ambos: na formação dos alunos por elucidar os conhecimentos da matemática com situações aplicadas e mais próximas da sua realidade, e, no futuro desenvolvimento da GD, tanto na educação quanto com uma nova geração de pessoas aptas para avanços nessa área da matemática que abrange desde uma molécula até uma estrela.

Conforme já mencionado, a atividade desenvolvida não abrange totalmente as habilidades supracitadas, como no caso da habilidade EM13MAT301, na qual não foram resolvidas equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas. Isso pode ser uma lacuna para futuras pesquisas, isto é, encontrar e demonstrar PGDs que possam ser resolvidos com equações lineares aplicáveis no nível de Ensino Médio.

No caso da habilidade EM13MAT501 seria possível continuar a aplicação desenvolvendo a representação algébrica das circunferências no plano Cartesiano, reconhecendo que não é uma equação linear e criando conjecturas para resolvê-las. Nesse âmbito, talvez seja possível atingir completamente essa habilidade por meio da Geometria de Distâncias, o que não foi explorado neste estudo.

A análise segue para o questionário estruturado, avaliando a opinião dos alunos sobre o tema e confirmando a aprendizagem dos conceitos do PGD.

4.1 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO ESTRUTURADO

O primeiro bloco do questionário estruturado identificou características sociodemográficas da amostra. Destacamos aqui que cada turma teve uma quantidade próxima de participantes com idade escolar dentro da faixa de sua respectiva série. Em questão de gênero e trabalho se pode afirmar que há proporcionalmente participantes mulheres e homens, assim como alunos que trabalham ou não, sendo uma amostra bem estratificada, reduzindo algum viés sobre as repostas advindo de grandes grupos semelhantes dentro da amostra.

O segundo bloco do questionário está estruturado com 7 questões em escala Likert de 5 pontos sobre a opinião dos participantes e duas questões verificadoras de conhecimento sobre os conceitos da Geometria de Distâncias.

Para verificar a consistência interna do questionário estruturado foi aplicado alfa de Cronbach (Cronbach, 1951), que verifica a consistência interna de um questionário analisando a relação entre a soma dos quadrados das variâncias (S_i) de cada questão com o quadrado da variância total (S_t) do questionário, conforme descreve a Equação 1:

$$\alpha = \frac{k}{k+1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i^2}{S_t^2}\right), \tag{1}$$

onde k representa a quantidade de questões, no caso da presente pesquisa temos $k = 9$. O cálculo das variâncias será considerado para a escala os valores de -2 até $+2$ e, para as questões de escolha, o número 1 para acertos e 0 para erros, obtendo assim as variâncias quadradas, conforme Equação 2:

$$\alpha = \frac{9}{9+1}\left(1 - \frac{0,73+1,07+0,24+0,76+0,8+0,88+0,84+0,03+0,01}{462,32}\right) = 0,89. \quad (2)$$

De acordo com Landis e Koch (1977), um coeficiente alfa[3] maior que $0,8$ possui uma consistência interna quase perfeita, indicando que é possível medir um mesmo constructo de opiniões entre os participantes por meio deste questionário.

Os resultados percentuais de cada item da escala estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Respostas sobre a aplicação do plano de aula em percentual

Questão/Afirmação	**Escala (%)**				
	1	2	3	4	5
As aulas sobre esse assunto despertaram meu interesse pela matemática.	4,1	7,2	41,2	28,9	18,6
Eu aprendi os conceitos básicos sobre Geometria de Distâncias que foram abordados.	3,1	14,4	10,3	46,4	25,8
Conhecidas três distâncias fixas de um determinado lugar é possível determinar a sua localização.	1	1	8,2	49,5	40,2
Consigo utilizar o *software* do GeoGebra para localizar pontos e a distância entre eles.	0	7,2	12,4	29,9	50,5
Consigo resolver problemas simples de Geometria de Distâncias como o da sincronização de relógios.	4,1	15,5	29,9	38,1	12,4
Consigo resolver problemas de localização simples baseado no que aprendi com Geometria de Distâncias.	1	10,3	27,8	35,1	25,8
Gostaria que a Geometria de Distâncias fosse ensinada na disciplina de matemática.	3,1	5,2	14,4	32	45,4

Fonte: elaboração própria.

Nota: dados da pesquisa.

A primeira questão argumenta sobre o interesse dos alunos pela matemática em relação ao que foi aprendido por meio da Geometria de Distâncias. A maioria dos alunos (41,2%) demonstrou indiferença em relação ao seu interesse pela matemática. Esse resultado pode não ter relação com a GD e apenas que os alunos simplesmente não se interessam pelos estudos de maneira geral.

Em conjunto com a sétima questão, que verifica a opinião dos alunos quanto a incluir a GD

[3]Os valores apresentados foram calculados utilizando-os integralmente pelo *software* Excel, arredondado para duas casas decimais apenas na apresentação dos valores no texto.

na disciplina de matemática, podemos entender que, mesmo não apresentando interesse imediato pela matemática na primeira questão, a maioria dos alunos (45,4%) concorda totalmente a respeito de adicionar a GD na disciplina de matemática. Esse resultado está alinhado com o objetivo dessa pesquisa, corroborando com a inserção da GD no ensino de matemática.

A segunda, terceira, quarta e sexta questões se referem aos conceitos de Geometria de Distâncias que foram abordados, sendo consideradas as relações entre três distâncias, utilização do *software* GeoGebra e localização de vértices no plano Cartesiano. A maioria dos alunos demonstrou que compreendeu os conceitos abordados sobre a Geometria de Distâncias.

Essas questões estão indicando uma possível validação do objetivo geral da pesquisa, pois constatam que os alunos gostariam de ter esse conteúdo de matemática ao mesmo tempo que alcançam habilidades e competências por meio de problemas da Geometria de Distâncias. Porém, mesmo com a validação do objetivo, isto não comprova que a Geometria de Distâncias alcança as habilidades e competências previstas na BNCC em sua totalidade, mas sim que é possível utilizá-la no Ensino Médio como um modo moderno e tecnológico de ensinar matemática.

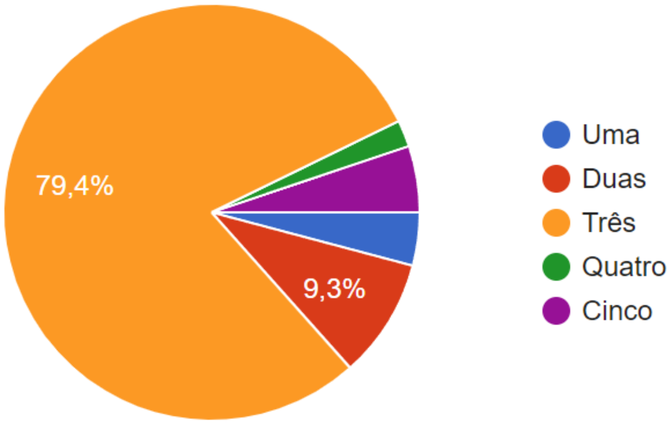
A quinta afirmativa está associada com o problema de sincronização de relógios, na qual houve uma resolução intuitiva por meio de um algoritmo binário. Durante a aplicação foi perceptível a participação dos alunos e a compreensão na resolução do problema. Porém, ao responder o questionário, não houve uma concordância sobre o tema, embora haja um grande percentual que concorda (38,1%), outra grande parte discorda ou está indeciso sobre o problema.

Nesse ínterim, percebe-se que mesmo com a atividade sendo compreendida pelos alunos, não foi um aprendizado suficiente para fornecer confiança em suas habilidades sobre o tema, indicando a necessidade de outros problemas para fixar melhor a aprendizagem dos alunos.

As últimas duas questões são verificadoras, determinando se as respostas das afirmações 2, 3, 4 e 6 estão de acordo, ou seja, se os alunos compreenderam os conceitos da Geometria de Distâncias, então eles devem conseguir responder corretamente questões sobre o assunto.

A Figura 2 apresenta as respostas confirmando que a maioria dos alunos (79,4%) respondeu corretamente a questão, compreendendo que são necessárias três distâncias relativas para localizar um ponto no plano.

Figura 2 – Respostas da Questão 6 (ENEM 2015)

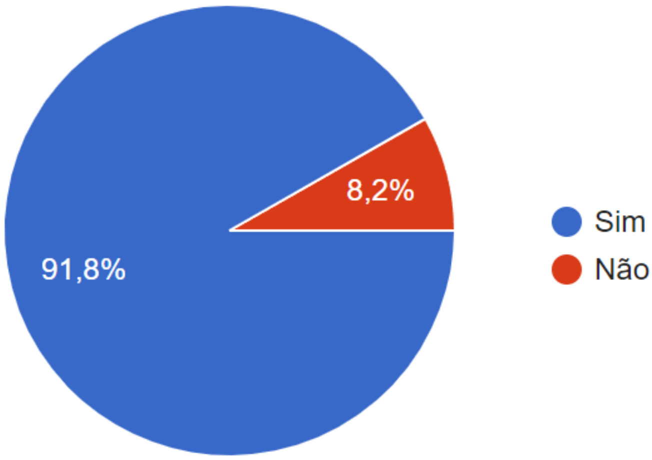


Fonte: elaboração própria.

Nota: dados da pesquisa.

A Figura 3 apresenta a questão 7, confirmando que a maioria dos alunos realmente compreendeu os conceitos básicos que foram ensinados pelo plano de aula elaborado e aplicado.

Figura 3 – Respostas da Questão 7 (ENEM 2015))



Fonte: elaboração própria.

Nota: dados da pesquisa.

Nesse sentido, revisitando os objetivos específicos, foram propostos problemas de Geometria de Distâncias para os alunos, por meio de um plano de aula elaborado e aplicado, relatando os efeitos da aplicação e a opinião do ponto de vista dos alunos sobre essa área de pesquisa.

De acordo com o que foi proposto na revisão de literatura sobre Geometria de Distâncias (subseção 2.2), sua compatibilidade com as habilidades apresentadas na subseção 2.3 e o plano de aula aplicado, constatou-se que é possível inserir a Geometria de Distâncias como proposta de modernização do conteúdo de Matemática e, por meio dela, desenvolver habilidades e competências da BNCC utilizando tecnologias ativas com o uso do GeoGebra.

Constatar que a GD pode ser aplicada no Ensino Médio não mede a extensão de seu alcance de habilidades e competências da BNCC, será necessário mais pesquisas para investigar as áreas não exploradas nesta pesquisa como: resolução algébrica de sistemas de equações quadráticas da trilateração (Yemini, 1978), aplicações interdisciplinares com as distâncias entre as moléculas de proteína (matemática e biologia) (Crippen; Havel, 1988), matrizes e determinantes que não estão previstas na BNCC mas que são de conhecimento do Ensino Médio (Laurent, 1997).

Todavia, este trabalho já indica que a Geometria de Distâncias é uma área fértil para os pesquisadores buscarem e adaptarem conceitos matemáticos que estão presentes nas realidades e vivências dos alunos para que sejam utilizados pelos professores em sala de aula, de modo com que as novas tecnologias sejam interessantes e conectadas com a realidade dos alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A BNCC traz à luz todas as habilidades e competências necessárias para a nossa sociedade atual, fornecendo de maneira clara o objetivo da Matemática no processo de aprendizagem. Contudo, os conteúdos e práticas dos professores continuam, em grande parte, semelhantes ao que eram antes desse documento, sendo necessário refletir sobre como ensinar Matemática com significado e incorporar algumas práticas que se demonstram bem-sucedidas (Dante, 2021).

A Geometria de Distâncias é uma área da Matemática que possui muitas aplicações na sociedade moderna e já é conhecida superficialmente pelos alunos, servindo como ponte entre as realidades e vivências dos alunos com a Matemática da escola. Nesse sentido, este trabalho propôs inserir a GD no currículo de Matemática do Ensino Médio, de modo que alcance os objetivos da BNCC e esteja relacionado com situações reais para motivar os alunos em sua aprendizagem. Além disso, a GD possui sua base fundada na Matemática e na Computação, sendo ideal para utilização de novas tecnologias digitais em sala de aula, prática que está em grande evidência na BNCC, inclusive como competência geral.

Na revisão de literatura (seção 2) foi possível perceber que há alguns conteúdos da Geometria de Distâncias que estão alinhados com alguns conteúdos de acordo com a BNCC, logo, foi possível localizar a GD por meio de habilidades e elaborar um plano de aula considerando conhecimentos prévios para aplicar no Ensino Médio.

Os resultados (seção 4) demonstraram-se positivos para a amostra, indicando que a Geometria de Distâncias pode compor algumas habilidades da BNCC e ser utilizada no Ensino Médio. Desse modo, buscar, elaborar e sintetizar problemas dessa área para utilizar em sala de aula poderia contribuir para ambas as partes interessadas: para os alunos conseguirem relacionar a Matemática com situações e reais e seguirem motivados nos estudos; e para a área de pesquisa que receberá novos pensadores e pesquisadores com um arcabouço teórico sobre GD muito mais rico.

Este resultado foi verificado por meio de um estudo de caso, logo, não se pode inferir que a GD é aplicável em qualquer escola do Ensino Médio. É indicado que outras pesquisas busquem aplicar essa área tão rica em aplicações a fim de verificar e, possivelmente, inserir formalmente a GD na própria BNCC.

REFERÊNCIAS

ALFAKIH, Abdo Y. Universal Rigidity of Bar Frameworks in General Position: A Euclidean Distance Matrix Approach. In: MUCHERINO, A.; LAVOR, C.; LIBERTI, L.; MACULAN, N. (ed.). **Distance Geometry**: Theory, Methods, and Applications. New York: Springer, 2013. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5128-0_1`.

ALIPANAHI, Babak; KRISLOCK, Nathan; GHODSI, Ali; WOLKOWICZ, Henry; DONALDSON, Logan; LI, Ming. Determining Protein Structures from NOESY Distance Constraints by Semidefinite Programming. **Journal of Computational Biology**, v. 20, n. 4, p. 296–310, 2013. DOI: `https://doi.org/10.1089/cmb.2012.0089`.

ALVES, Carmem Cleide; LAVOR, Leila Aparecida Maciel de; PEREIRA, Hérica Paiva. Evasão escolar: um desafio para a educação na atualidade. **Revista de Pesquisa Interdisciplinar**, v. 2, n. 1, 2017. DOI: `https://doi.org/10.24219/rpi.v2i1.132`.

AMADO, Nélia; SANCHEZ, Juan; PINTO, Jorge. A Utilização do GeoGebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 52, p. 637–657, 2015. DOI: `https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11`.

ANDERSON, Brian D. O.; SHAMES, Iman; MAO, Guoqiang; FIDAN, Bariş. Formal Theory of Noisy Sensor Network Localization. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, v. 24, n. 2, p. 684–698, 2010. DOI: `https://doi.org/10.1137/100792366`.

ANDRIONI, Alessandro; DE FREITAS, Rosiane; LAVOR, Carlile; LIBERTI, Leo; MACULAN, Nelson; MUCHERINO, Antonio (Ed.). **Workshop on Distance Geometry and Applications 2013**. [S.l.]: Federal University of Amazonas, 2013. Disponível em: `https://www.antoniomucherino.it/download/DGA2013-BookOfExtendedAbstracts.pdf`. Acesso em: 21 dez. 2024.

ASIMOW, Leonard; ROTH, Ben. The rigidity of graphs. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 245, p. 279–289, nov. 1978. Disponível em: https://community.ams.org/journals/tran/1978-245-00/S0002-9947-1978-0511410-9/S0002-9947-1978-0511410-9.pdf. Acesso em: 20 dez. 2024.

ASIMOW, Leonard; ROTH, Ben. The rigidity of graphs, II. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 68, n. 1, p. 171–190, 1979. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-247X(79)90108-2.

BIGGS, Norman; LLOYD, E. Keith; WILSON, Robin J. **Graph Theory, 1736-1936**. [S.l.]: Oxford University Press, 1986.

BILLINGE, Simon J. L.; DUXBURY, Phillip M.; GONÇALVES, Douglas S.; LAVOR, Carlile; MUCHERINO, Antonio. Recent results on assigned and unassigned distance geometry with applications to protein molecules and nanostructures. **Annals of Operations Research**, v. 271, n. 1, p. 161–203, ago. 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s10479-018-2989-6.

BISWAS, Pratik; LIAN, Tzu-Chen; WANG, Ta-Chung; YE, Yinyu. Semidefinite programming based algorithms for sensor network localization. **ACM Transactions on Sensor Networks**, v. 2, n. 2, p. 188–220, mai. 2006. DOI: https://doi.org/10.1145/1149283.1149286.

BLUMENTHAL, L. M. **Theory and Applications of Distance Geometry**. [S.l.]: Oxford University Press, 1953.

BORG, Ingwer; GROENEN, Patrick J. F. **Modern Multidimensional Scaling**: Theory and Applications. 2. ed. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. Springer Series in Statistics. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/0-387-28981-X. Acesso em: 21 dez. 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 31 jan. 2025.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**: Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho – CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Brasília, DF: Presidência da República, 2017. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 20 dez. 2024.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF: Ministério da Educação e Cultura, Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

CAUCHY, Augustin Louis. Sur les polygones et polyedres. **Journal de l'École Polytechnique**, v. 16, p. 87–99, 1813.

CAYLEY, Arthur. On a theorem in the geometry of position. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 2, p. 267–271, 1841.

CONNELLY, Robert. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 47, p. 333–338, 1977. Disponível em: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1977__47__333_0. Acesso em: 21 dez. 2024.

CONNELLY, Robert. Generic Global Rigidity. **Discrete & Computational Geometry**, v. 33, n. 4, p. 549–563, 2005. DOI: https://doi.org/10.1007/s00454-004-1124-4.

CRIPPEN, Gordon M.; HAVEL, Timothy F. **Distance Geometry and Molecular Conformation**. [S.l.]: Research Studies Press, 1988. Chemometrics Research Studies Series.

CRONBACH, Lee J. Coefficient Alpha and the Internal Structure of Tests. **Psychometrika**, v. 16, n. 3, p. 297–334, 1951. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02310555.

CUNNINGHAM, John P.; GHAHRAMANI, Zoubin. Linear Dimensionality Reduction: Survey, Insights, and Generalizations. **The Journal of Machine Learning Research**, v. 16, n. 1, p. 2859–2900, 2015. Disponível em: https://jmlr.org/papers/volume16/cunningham15a/cunningham15a.pdf. Acesso em: 21 dez. 2024.

DANTE, Luiz Roberto. **Ensino de Matemática de Bolso**: reflexões sobre como ensinar Matemática com significado, de acordo com a BNCC. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, Arco 43, 2021.

DOKMANIC, Ivan; PARHIZKAR, Reza; RANIERI, Juri; VETTERLI, Martin. Euclidean Distance Matrices: Essential theory, algorithms, and applications. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 32, n. 6, p. 12–30, nov. 2015. DOI: https://doi.org/10.1109/MSP.2015.2398954.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. São Paulo: Atual, 1993. v. 9.

EREN, Tolga; GOLDENBERG, O. K.; WHITELEY, Walter; YANG, Yang Richard; MORSE, A. Stephen; ANDERSON, Brian D. O.; BELHUMEUR, Peter N. Rigidity, computation, and randomization in network localization. In: IEEE INFOCOM, 2004, Hong Kong, China. [S.l.: s.n.], 2004. v. 4, p. 2673–2684. DOI: https://doi.org/10.1109/INFCOM.2004.1354686.

EULER, Leonhard. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Euler Archive – All Works**, v. 53, p. 128–140, 1741. Disponível em: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/53. Acesso em: 21 dez. 2024.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho; MALTEMPI, Marcus Vinicius. Intradisciplinaridade matemática com GeoGebra na matemática escolar. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, n. 63, p. 348–367, 2019. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a17.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 1, 1995. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877. Acesso em: 21 dez. 2024.

FRANÇA, Eliane Aparecida Carlos Silva. **Geometria de Distâncias no Ensino Médio**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 7 nov. 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/175806. Acesso em: 20 dez. 2024.

GLUCK, Herman. Almost all simply connected closed surfaces are rigid. In: GLASER, Leslie Curtis; RUSHING, Thomas Benjamin (ed.). **Geometric Topology**. Berlin, Heidelberg: Springer, 1975. P. 225–239. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0066118.

GONÇALVES, Douglas S. **Geometria de Distâncias**: aspectos teóricos e computacionais. São Carlos, SP: SBMAC, 2020. v. 91. Notas em Matemática Aplicada. Disponível em: https://www.sbmac.org.br/wp-content/uploads/2022/08/livro_91.pdf. Acesso em: 20 dez. 2024.

HAAG, Samuel. **Novos Caminhos na Matemática do Ensino Médio com a Geometria de Distâncias**. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2022. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/235684. Acesso em: 11 fev. 2025.

HAVEL, Timothy F.; WÜTHRICH, Kurt. An evaluation of the combined use of nuclear magnetic resonance and distance geometry for the determination of protein conformations in solution. **Journal of Molecular Biology**, v. 182, n. 2, p. 281–294, 1985. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-2836(85)90346-8.

JACKSON, Bill; JORDÁN, Tibor. Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 94, n. 1, p. 1–29, 2005. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jctb.2004.11.002.

KRISLOCK, Nathan; WOLKOWICZ, Henry. Explicit Sensor Network Localization using Semidefinite Representations and Facial Reductions. **SIAM Journal on Optimization**, v. 20, n. 5, p. 2679–2708, 2010. DOI:https://doi.org/10.1137/090759392.

LAMAN, Gerard. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 4, n. 4, p. 331–340, 1970. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01534980.

LANDIS, J. Richard; KOCH, Gary G. The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. **Biometrics**, v. 33, n. 1, p. 159–174, mar. 1977. DOI: https://doi.org/10.2307/2529310.

LAURENT, Monique. Cuts, matrix completions and graph rigidity. **Mathematical Programming**, v. 79, n. 1, p. 255–283, 1997. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02614320.

LAVOR, Carlile; MUCHERINO, Antonio; LIBERTI, Leo; MACULAN, Nelson. Discrete approaches for solving molecular distance geometry problems using NMR data. **International Journal of Computational Biosciences**, v. 1, p. 88–94, 2010. DOI: https://doi.org/10.2316/J.2010.210-1025.

LIBERTI, Leo. Distance geometry and data science. **Top**, v. 28, n. 2, p. 271–339, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/s11750-020-00563-0.

LIBERTI, Leo; LAVOR, Carlile. **Euclidean Distance Geometry**. [S.l.]: Springer, 2017. v. 133.

LIBERTI, Leo; LAVOR, Carlile; MACULAN, Nelson; MUCHERINO, Antonio. Euclidean Distance Geometry and Applications. **SIAM Review**, v. 56, n. 1, p. 3–69, 2014. DOI: https://doi.org/10.1137/120875909.

LIBERTI, Leo; LAVOR, Carlile; MUCHERINO, Antonio. The Discretizable Molecular Distance Geometry Problem seems Easier on Proteins. In: MUCHERINO, A., LAVOR, C., LIBERTI, L., MACULAN, N. (ed.). **Distance Geometry**. New York: Springer, 2013. P. 47–60. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5128-0_3.

LOPES, Maria Maroni. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, n. 46, p. 631–644, 2013. DOI: https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300019.

MENGER, Karl. Untersuchungen über allgemeine Metrik. **Mathematische Annalen**, v. 100, p. 75–163, 1928. Disponível em: http://eudml.org/doc/159284. Acesso em: 21 dez. 2024.

SCHOENBERG, Isaac J. Remarks to Maurice Frechet's Article"Sur La Definition Axiomatique D'Une Classe D'Espace Distances Vectoriellement Applicable Sur L'Espace De Hilbert. **Annals of Mathematics**, v. 36, n. 3, p. 724–732, jul. 1935. DOI: https://doi.org/10.2307/1968654.

SILVA, Monica Ribeiro da. A BNCC da reforma do Ensino Médio: o resgate de um empoeirado discurso. **Educação em Revista**, v. 34, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/0102-4698214130.

SINGER, Amit. Angular synchronization by eigenvectors and semidefinite programming. **Applied and Computational Harmonic Analysis**, v. 30, n. 1, p. 20–36, 2011. DOI: https://doi.org/10.1016/j.acha.2010.02.001.

SO, Anthony Man-Cho; YE, Yinyu. Theory of semidefinite programming for Sensor Network Localization. **Mathematical Programming**, v. 109, n. 2, p. 367–384, mar. 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s10107-006-0040-1.

TOLANI, Deepak; GOSWAMI, Ambarish; BADLER, Norman I. Real-Time Inverse Kinematics Techniques for Anthropomorphic Limbs. **Graphical Models**, v. 62, n. 5, p. 353–388, 2000. DOI: https://doi.org/10.1006/gmod.2000.0528.

WU, Di; WU, Zhijun; YUAN, Yaxiang. Rigid versus unique determination of protein structures with geometric buildup. **Optimization Letters**, v. 2, n. 3, p. 319–331, jun. 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/s11590-007-0060-7.

YEMINI, Yechiam. **The positioning problem**: a draft of an intermediate summary. [S.l.: s.n.], 1978. Disponível em: https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/ADP003801.pdf. Acesso em: 21 dez. 2024.

YIN, Robert K. **Estudo de Caso**: planejamento e métodos. [S.l.]: Bookman, 2015.

SOBRE OS AUTORES

Me. Samuel Haag

https://orcid.org/0000-0002-7796-4700

https://lattes.cnpq.br/8870599779133417

Contato: samuelhaag@hotmail.com

Contribuição autoral: administração do projeto; análise formal; conceituação; escrita – primeira redação; investigação; metodologia; recursos; *software*.

Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo

http://orcid.org/0000-0003-2243-8081

http://lattes.cnpq.br/2447150127495829

Contato: felipe.fidalgo@ufsc.br

Contribuição autoral: escrita – revisão e edição; supervisão; validação; visualização.