# Uma demonstração da irracionalidade do número de Euler

## A proof of the irrationality of Euler's number

## Una demostración de la irracionalidad del número de Euler

Felipe Fonseca dos Santos[1]
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Amargosa, BA, Brasil
https://orcid.org/0009-0004-7894-6610, http://lattes.cnpq.br/2490727099850288
Devison Rocha Santos[2]
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Amargosa, BA, Brasil
https://orcid.org/0009-0007-9834-9938, https://lattes.cnpq.br/5361061546395152

**Resumo**: O número de Euler, denotado por $e$, é uma das mais emblemáticas constantes da Matemática. Trata-se de um número irracional que é a base dos logaritmos naturais e possui relevantes aspectos históricos e teóricos. O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma demonstração da irracionalidade de potência racional não nula do número de Euler. Para a construção da demonstração, utiliza-se uma sequência de números reais obtida em função de uma integral definida, e a partir da técnica de integração por partes e do uso do segundo princípio de indução, apresenta caracterização especial permitindo deduzir o resultado principal. Como consequência imediata, obtém-se a irracionalidade do número de Euler e que o logaritmo natural, de todo número racional positivo diferente de um, é irracional.

**Palavras-chave**: número de Euler; números irracionais; demonstração de irracionalidade.

**Abstract**: Euler's number, denoted by $e$, stands as one of the most emblematic constants in mathematics. It is an irrational number that serves as the base of natural logarithms, boasting significant historical and theoretical aspects. The present work aims to demonstrate the irrationality of any non-zero rational power of the Euler number. To construct this demonstration, a sequence of real numbers, derived from a definite integral, is used and through the technique of integration by parts and by the use of the second principle of induction, a special characterization is presented allowing to deduce the main result. As an immediate consequence, we obtain the irrationality of Euler's number and also that the natural logarithm of every positive rational number other than one is irrational.

**Keywords**: Euler's number; irrational number; proof of irrationality.

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, mestre e doutor em Matemática pela Universidade Federal da Bahia, docente da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. **Contribuição de autoria**: Análise Formal, Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Supervisão. **Contato**: felipefonseca@ufrb.edu.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, mestrando em Matemática pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, docente do Colégio Estadual de Cravolândia. **Contribuição de autoria**: Análise Formal, Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia. **Contato**: devisonrocha13@gmail.com.

**Resumen**: El número de Euler, denotado por $e$, es una de las más emblemáticas constantes de la matemática. Se trata de un número irracional que es la base de los logaritmos naturales y que posee relevantes aspectos históricos y teóricos. El presente trabajo tiene como objetivo presentar una demostración de la irracionalidad de una potencia racional no nula del número de Euler. Para la construcción de la demostración se utiliza una sucesión de números reales obtenida en función de una integral definida, que a partir del método de integración por partes y del uso del segundo principio de inducción, presenta una caracterización especial que permite deducir el resultado principal. Como consecuencia inmediata, se obtiene la irracionalidad del número de Euler y que el logaritmo natural de cualquier número racional positivo diferente de uno, es irracional.

**Palabras clave**: número de Euler; número irracional; demostración de la irracionalidad.

**Data de submissão**: 20 de fevereiro de 2024.

**Data de aprovação**: 1 de julho de 2024.

## 1 Introdução

Os relatos históricos apontam que os números irracionais surgem a partir da incapacidade dos números racionais de representar certas medidas de comprimento, como por exemplo, a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem uma unidade. A descoberta desses números foi um marco importante para a Matemática. Segundo Neri e Cabral (2021), o pitagórico Hippasus de Metapontum, no século VI a.C., foi, talvez, o primeiro a perceber a existência de números irracionais ao tentar provar que $\sqrt{2}$ era racional.

Desde a descoberta da existência desses números, muitos deles ganharam notoriedade, seja pela sua ocorrência em soluções de diversos problemas matemáticos, ou pela sua aplicação em diversas áreas da ciência. Pode-se citar, por exemplo, o número pi ($\pi$), o número de ouro $\left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, os números de Liouville, o número de Champernowne[1], os números transcendentes[2], o número de Euler-Mascheroni[3], o número de Euler ($e$), entre outros.

Embora tenha sua origem desconhecida, há indícios históricos de que o número de Euler tenha sido descoberto no século XVI, quando um matemático anônimo, ou um mercador da época, tenha percebido que a expressão $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$ que aparece na fórmula dos juros compostos, parecia

[1]O número obtido escrevendo-se a sequência de números inteiros em base dez, $0,12345678910111213\ldots$

[2]Um número é transcendente quando não é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

[3]A constante de Euler-Mascheroni é definida como o limite da sucessão $(a_n)$ definida por $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \log n$.

convergir quando $n$ cresce indefinidamente (Maor, 2008). Veja uma simulação na Tabela 1, considerando a taxa $i = 1$.

Tabela 1 – Aproximações do número de Euler

| **Períodos ($n$)** | **Montante** $((1+1/n)^n)$ |
|---|---|
| 1 | 2,000000 |
| 100 | 2,704813 |
| 1.000 | 2,716923 |
| 100.000 | 2,718268 |
| 10.000.000 | 2,718281 |
| 100.000.000 | 2,718281 |
| 1.000.000.000 | 2,718281 |

Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Pode-se observar que, à medida que o valor de $n$ aumenta, o valor da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge para um número próximo de 2,718281, que hoje conhece-se como o número de Euler e é denotado por $e$. Assim, $e$ tornou-se o primeiro número a ser definido por um processo de limite. Entretanto, de acordo com Maor (2008) o primeiro reconhecimento explícito desse número deu-se em 1618, na segunda edição da tradução de Edward Wright na obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, de Jonh Napier.

O número $e$ está presente nos mais diversos ramos da matemática, ele é a base do Logaritmo Neperiano (ou natural) e da função exponencial com propriedades únicas no Cálculo Diferencial e Integral, está presente em diversas fórmulas e equações importantes, como por exemplo, na análise complexa, a identidade de Euler; na análise real, a fórmula de Stirling; em probabilidade, na função de densidade de probabilidade da distribuição de Gauss. Além disso, costuma aparecer com frequência em modelagens de problemas envolvendo estudos sobre fenômenos naturais.

Ao longo dos anos, diversas demonstrações da irracionalidade desse número foram apresentadas, utilizando as mais variadas técnicas e ferramentas matemáticas. A primeira demonstração da irracionalidade de $e$ foi apresentada por Euler em 1744, usando frações contínuas infinitas (veja Euler, 2018). Posteriormente, em 1768, Lambert, utilizando também frações contínuas, generalizou o resultado, mostrando que se $x$ é um racional não nulo, então $e^x$ não é racional.

Fourier, em 1815, usando a caracterização $e := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ e argumentos algébricos simples, evidenciou a sua irracionalidade (em Figueiredo (2011) é possível encontrá-la). Conforme Aigner e Ziegler (2018), adaptando algumas ideias é possível deduzir que $e^2$ e $e^4$ são irracionais. No entanto, para mostrar que $e^3$, $e^5$, $\cdots$, são irracionais, é necessário utilizar ferramentas de Cálculo Diferencial.

Liouville, em 1840, mostrou que $e$ é irracional aplicando ideias transcendentais (veja Liouville, 1840) e Hermite, em 1873, provou que $e$ é transcendente e consequentemente irracional. Em 1949, Koksma (1949), empregando as ideias introduzidas por Niven (1947) para demonstrar a irracionalidade de $\pi$, concluiu que $e^x$ é irracional para todo $x$ racional não nulo. Mais recentemente, em 2006, Sondow, exibiu a irracionalidade de $e$ utilizando uma construção por intervalos encaixantes.

Neste trabalho, baseando-se nas ideias expostas por Dupont (2004), Makarov *et al.* (1992), Oliveira (2018) e Santos (2022), será apresentada uma demonstração que $e^x$ é irracional para qualquer $x \in \mathbb{Q}^*$, utilizando indução finita, propriedades dos números reais, integração de funções reais e alguns resultados sobre sequências de números reais.

## 2 Sequências de números reais

Uma sequência é uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função que é chamada de termo geral da sequência. Mais precisamente:

**Definição 2.1.** *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ para a qual denota-se o valor de $x$ em $n$ por $x_n$, isto é, $x(n) = x_n$.*

Usualmente, denota-se $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ para representar uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $x_1$ é dito primeiro termo da sequência, $x_2$ o segundo termo e, assim por diante. Para um valor $n \in \mathbb{N}$ qualquer, $x_n$ é chamado n-ésimo termo.

**Definição 2.2.** *Uma sequência $(x_n)$ é dita **convergente** se existe $a \in \mathbb{R}$ de modo que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, implica que $|x_n - a| < \varepsilon$, isto é,*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

*Escreve-se* $\lim x_n = a$ *ou* $\lim |x_n - a| = 0$.

Quando a sequência $(x_n)$ não converge, diz-se que $(x_n)$ é **divergente.**

SANTOS, Felipe Fonseca dos; SANTOS, Devison Rocha. Uma demonstração da irracionalidade do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3006, 2 de outubro de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7115.

**Exemplo 2.3.** *Dado $r > 0$, considere a sequência $(x_n)$ cujo termo geral é dado por $x_n = \dfrac{1}{rn}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim x_n = 0$.*

*Demonstração.* Fixado $r > 0$, considere $\varepsilon > 0$ e seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{r\varepsilon}$, então para todo $n > n_0$, tem-se que, $0 < \frac{1}{rn} < \frac{1}{rn_0}$. Assim,

$$|x_n - 0| = |x_n| = \left|\frac{1}{rn}\right| = \frac{1}{rn} < \frac{1}{rn_0} < \varepsilon.$$

Logo, $\lim x_n = 0$. □

A proposição a seguir assegura que sequências de números inteiros não nulos não podem convergir para zero.

**Proposição 2.4.** *Se $(x_n)$ é uma sequência convergente de inteiros diferentes de zero, então $\lim x_n \neq 0$.*

*Demonstração.* Suponhamos, por absurdo, que $\lim x_n = 0$. Considere $0 < \varepsilon < 1$, segue da definição 2.2, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $0 < |x_n - 0| < \varepsilon < 1$, para todo $n > n_0$. Absurdo, pois não existe número inteiro diferente de zero cujo valor absoluto seja menor que um. □

O Teorema a seguir é conhecido com Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche. Trata-se de um importante resultado que auxilia no cálculo de limite, utilizando a comparação entre duas outras sequências cujos limites são conhecidos. A demonstração desse resultado pode ser encontrado em Lima (2008).

**Teorema 2.5.** *Se $\lim x_n = \lim z_n = a$ e $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n$ suficientemente grande, então $\lim y_n = a$.*

O exemplo a seguir ilustra uma aplicação do Teorema 2.5.

**Exemplo 2.6.** *Se $0 < a < 1$, então $\lim a^n = 0$.*

*Demonstração.* Dado $0 < a < 1$, denote $r = \frac{1-a}{a} > 0$. Assim, $a = \frac{1}{1+r}$. Usando a desigualdade de Bernoulli[4] em $a^n$ obtém-se:

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr} \leq \frac{1}{nr}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Como $\lim \dfrac{1}{nr} = 0$ (veja Exemplo 2.3), segue do Teorema do Confronto que o $\lim a^n = 0$. □

[4] Seja $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

É fácil verificar, usando a definição, que toda sequência convergente é limitada. O próximo resultado impõe uma condição para que a volta desse resultado seja verdadeiro, isto é, para que uma sequência limitada seja convergente.

**Definição 2.7.** *Uma sequência $(x_n)$ é dita monótona não decrescente, se $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$. Se $(x_n)$ é tal que, $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots$, diz-se que $(x_n)$ é monótona não crescente.*

Uma sequência $(x_n)$ é dita monótona, se $(x_n)$ é monótona não decrescente ou monótona não crescente.

**Proposição 2.8.** *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

*Demonstração.* Veja Lima (2008, capítulo 3, p. 25). □

A Proposição 2.8 é uma importante ferramenta para mostrar que diversos exemplos de sequências são convergentes. O resultado a seguir é uma aplicação da Proposição 2.8 para uma classe particular de sequências.

**Proposição 2.9.** *Se $x_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\lim \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = a < 1$, então $\lim x_n = 0$.*

*Demonstração.* Dado $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < 1$. Por hipótese, $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < c$ para $n$ suficientemente grande (digamos $n > n_0$). Daí, segue que,

$$0 < x_{n+1} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \cdot x_n < c \cdot x_n < x_n, \quad \forall\, n > n_0.$$

Logo, $(x_n)_{n>n_0}$ é monótona e limitada, pela Proposição 2.8, a sequência $(x_n)$ é convergente. Seja $b = \lim x_n$, como $x_{n+1} < c \cdot x_n$, então $b = \lim x_{n+1} \leq \lim(c \cdot x_n) = c \cdot b$, ou ainda, $b \cdot (1 - c) \leq 0$. Como $(1 - c) > 0$ e $b \geq 0$, segue que $\lim x_n = b = 0$. □

**Proposição 2.10.** *Seja $a \in \mathbb{R}$, então $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$.*

*Demonstração.* Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $(x_n)$ uma sequência definida por $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, para $n \geq 1$. Supondo $a \neq 0$ (o caso $a = 0$ é imediato), então,

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n}\right| = \left|\frac{a}{n+1}\right| = \frac{|a|}{n+1}.$$

Assim, $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim \dfrac{|a|}{n+1} = 0 < 1$. Pela Proposição 2.9, segue que $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$. □

## 3 O número $e$

O número de Euler admite diversas definições. Em Marques (2013), o leitor pode encontrar algumas delas. Aqui, aproveitando os resultados anteriormente apresentados, será definido o número $e$ como o limite da sequência definida pelo termo geral dado por $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Proposição 3.1.** *A sequência $(e_n)$ é convergente.*

*Demonstração.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, note que

$$\begin{aligned}
\frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Bernoulli, considerando $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ e $n+1$ no lugar de $n$, segue que

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1.$$

Desse modo, obtemos que $e_{n+1} \geq e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $(e_n)$ é uma sequência monótona.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \\
&\geq \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^3 + 4n^2 + 4n}\right) > 1.
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade é obtida da desigualdade de Bernoulli. Isto mostra que $(x_n)$ é uma sequência não crescente.

Verifica-se facilmente, pela desigualdade de Bernoulli, que $2 \leq e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $2 \leq e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n \leq x_1 = 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluí-se que $(e_n)$ é uma sequência limitada. Pela Proposição 2.8, $(e_n)$ é convergente e seu limite é um número real entre $2$ e $4$. □

Em Guidorizzi (2001), utilizando séries de números reais, refina-se o intervalo de convergência da sequência $(e_n)$, mostrando que esta converge para um valor entre $2$ e $3$.

**Definição 3.2.** *O número de Euler é o limite da sequência $(e_n)$. Isto é,*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

## 4 Integral de função real de uma variável real

O desenvolvimento da ideia de integração, surgiu baseando-se em duas vertentes distintas que se deram de maneira independente e quase simultânea. Uma das vertentes apoiando-se em ideias geométricas (cálculos de áreas) e a outra utilizando conceitos mais algébricos. O resultado responsável por relacionar esses conceitos em termos de integrais é conhecido como o Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 4.1.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

*1) $F$ é uma integral indefinida de $f$, isto é, existe $c \in [a, b]$ tal que $F(x) = F(c) + \int_c^x f(t)\,dt$, para todo $x \in [a, b]$.*

*2) $F$ é uma primitiva de $f$, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

*Demonstração.* Veja demonstração em Lima (2008, capítulo 11, p. 136). □

Graças ao Teorema Fundamental do Cálculo, pode-se integrar uma função conhecendo-se sua primitiva, porém para algumas funções, determinar uma primitiva pode não ser uma tarefa simples. Assim, faz-se necessário o uso de algumas técnicas de integração, como por exemplo, a técnica de integração por partes, que é consequência do Teorema 4.1.

Ao longo do texto, a notação $[f(x)]\Big|_a^b$ será usada para representar a diferença $f(b) - f(a)$, isto é, $f(b) - f(a) = [f(x)]\Big|_a^b$.

**Teorema 4.2.** *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções que têm derivadas contínuas. Então*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]\Big|_a^b - \int_a^b g(t)f'(t)\,dt. \tag{1}$$

*Demonstração.* Pela regra do produto para derivadas

$$[f(t)g(t)]' \quad = \quad f(t)g'(t) + g(t)f'(t).$$

Como $f$ e $g$ têm derivadas contínuas, então:

$$\int_a^b [f(t)g(t)]'\,dt \quad = \quad \int_a^b \left[f(t)g'(t) + g(t)f'(t)\right]\,dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$[f(t)g(t)]\Big|_a^b \quad = \quad \int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \int_a^b g(t)f'(t)\,dt.$$

Reescrevendo esta equação, obtém-se a técnica de integração por partes:

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt \quad = \quad [f(t)g(t)]\Big|_a^b - \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$$

$\square$

A seguir, serão apresentadas situações de como a equação (1) pode auxiliar no cálculo de integrais.

**Exemplo 4.3.** *Note que dado $x \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} te^t\,dt = e^x(x-1) + e^{-x}(x+1)$.*

Considere $f(t) = t$ e $g'(t) = e^t$, segue do método de integração por partes que,

$$\int_{-x}^{x} te^t\,dt \quad = \quad \left[te^t\right]\Big|_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} e^t\,dt = xe^x + xe^{-x} - e^x + e^{-x} = e^x(x-1) + e^{-x}(x+1).$$

**Lema 4.4.** *Dados $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t\,dt = 2n \int_{-x}^{x} t\left(x^2 - t^2\right)^{n-1} e^t\,dt.$$

*Demonstração.* Considere $f(t) = \left(x^2 - t^2\right)^n$ e $g'(t) = e^t$. Então $f'(t) = n\left(x^2 - t^2\right)^{n-1}(-2t)$. Assim, pela integração por partes:

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t\,dt \quad &= \quad \left[e^t\left(x^2 - t^2\right)^n\right]\Big|_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} n(x^2 - t^2)^{n-1}e^t(-2t)\,dt \\ &= \quad 2n\int_{-x}^{x} t\left(x^2 - t^2\right)^{n-1} e^t\,dt.\end{aligned}$$

$\square$

**Lema 4.5.** *Dados $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\int_{-x}^{x} t\left(x^2-t^2\right)^n e^t\,dt = -\int_{-x}^{x} e^t\left[\left(x^2-t^2\right)^n - 2t^2 n\left(x^2-t^2\right)^{n-1}\right]dt.$$

*Demonstração.* Considere $f(t) = t\left(x^2-t^2\right)^n$. Então $f'(t) = \left(x^2-t^2\right)^n - 2nt^2\left(x^2-t^2\right)^{n-1}$ e, tomando $g'(t) = e^t$, segue pela técnica de integração por partes que:

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x} t\left(x^2-t^2\right)^n e^t\,dt &= \left[-t\left(x^2-t^2\right)^n e^t\right]\Big|_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} e^t f'(t)\,dt \\ &= -\int_{-x}^{x} e^t\left[\left(x^2-t^2\right)^n - 2nt^2\left(x^2-t^2\right)^{n-1}\right]dt.\end{aligned}$$

□

## 5 A Irracionalidade de $e$

Fixado $x \in \mathbb{R}^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere,

$$J_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^n e^t\,dt.$$

**Proposição 5.1.** *Se $x \in \mathbb{R}^*$, então $J_n(x) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Sejam $x \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $\left(x^2-t^2\right)^n > 0$ para todo $t \in (-x,x)$ e $e^t > 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, então, $f(t) = \left(x^2-t^2\right)^n e^t > 0$, $\forall\, t \in (-x,x)$. Daí, segue que, $J_n(x)$ possui integrando positivo no intervalo $(-x,x)$. Logo,

$$J_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^n e^t\,dt > 0.$$

□

**Lema 5.2.** *Sejam $x \in \mathbb{R}^*$ e $r \in \mathbb{Z}$, então $\lim r^n J_n(x) = 0$.*

*Demonstração.* Dados $x \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 5.1, $J_n(x) > 0$, assim:

$$\begin{aligned}|r^n J_n(x)| &= |r|^n J_n(x) = \frac{|r|^n}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^n e^t\,dt \\ &\leq \frac{|r|^n}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2\right)^n e^t\,dt = \left(e^x - e^{-x}\right)\frac{(|r|x^2)^n}{n!},\end{aligned}$$

isto é, $0 \leq |r^n J_n(x)| \leq \left(e^x - e^{-x}\right)\dfrac{(|r|x^2)^n}{n!}$.

Combinando a Proposição 2.10 e o Teorema 2.5, segue que o $\lim r^n J_n(x) = 0$. □

SANTOS, Felipe Fonseca dos; SANTOS, Devison Rocha. Uma demonstração da irracionalidade do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3006, 2 de outubro de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7115.

**Teorema 5.3.** *Seja $x \in \mathbb{R}^*$, então para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$J_n(x) = A_n(x)e^x + B_n(x)e^{-x},$$

*onde $A_n$ e $B_n$ são polinômios de grau $n$ com coeficientes inteiros.*

*Demonstração.* Observe que para $n = 0$,

$$J_0(x) = \int_{-x}^{x} e^t\,dt = e^x - e^{-x} = A_0(x)e^x + B_0(x)e^{-x},$$

onde $A_0(x) = 1$ e $B_0(x) = -1$ são polinômios de grau zero com coeficientes inteiros. Para $n = 1$,

$$J_1(x) = \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right) e^t\,dt = 2\int_{-x}^{x} te^t\,dt = (2x-2)e^x + (2x+2)e^{-x}.$$

A segunda igualdade é verificada a partir do Lema 4.4 e a terceira igualdade decorre do Exemplo 4.3. Portanto, $J_1(x) = A_1(x)e^x + B_1(x)e^{-x}$, onde $A_1$ e $B_1$ são polinômios de grau um com coeficientes inteiros.

Uma vez que o resultado é válido para $n = 0$ e $n = 1$, assuma que a propriedade valha para todos os números naturais $k$, $0 \leq k \leq m$. Utilizando o Segundo Princípio de Indução Finita, também chamado de indução forte ou completa, verifica-se a validade para $m+1$, pois

$$\begin{aligned} J_{m+1}(x) &= \frac{1}{(m+1)!}\int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^{m+1} e^t\,dt = \frac{2}{m!}\int_{-x}^{x} t\left(x^2 - t^2\right)^{m} e^t\,dt \\ &= \frac{2}{m!}\left\{-\int_{-x}^{x} e^t\left[\left(x^2 - t^2\right)^m - 2t^2 m\left(x^2 - t^2\right)^{m-1}\right] dt\right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

A segunda igualdade decorre do Lema 4.4 e a terceira é verificada pelo Lema 4.5.

Substituindo $-t^2$ por $\left(x^2 - t^2\right) - x^2$ em $-2t^2 m\left(x^2 - t^2\right)^{m-1}$ tem-se:

$$\begin{aligned} -2t^2 m\left(x^2 - t^2\right)^{m-1} &= 2m\left(\left(x^2 - t^2\right) - x^2\right)\left(x^2 - t^2\right)^{m-1} \\ &= 2m\left(x^2 - t^2\right)^m - 2mx^2\left(x^2 - t^2\right)^{m-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2) obtém-se:

$$\begin{aligned} J_{m+1}(x) &= \frac{2}{m!}\left\{-\int_{-x}^{x} e^t\left[(2m+1)\left(x^2 - t^2\right)^m - 2mx^2\left(x^2 - t^2\right)^{m-1}\right] dt\right\} \\ &= -\frac{2}{m!}\int_{-x}^{x} e^t(2m+1)\left(x^2 - t^2\right)^m\,dt + \frac{4x^2}{(m-1)!}\int_{-x}^{x} e^t\left(x^2 - t^2\right)^{m-1}\,dt \\ &= -(4m+2)J_m(x) + 4x^2\frac{1}{(m-1)!}\int_{-x}^{x}\left(x^2 - t^2\right)^{m-1} e^t\,dt \\ &= -(4m+2)J_m(x) + 4x^2 J_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, tem-se que, $J_m(x) = A_m(x)e^x + B_m(x)e^{-x}$ onde, $A_m(x)$ e $B_m(x)$ são polinômios de grau $m$ com coeficientes inteiros e $J_{m-1}(x) = C_{m-1}(x)e^x + D_{m-1}(x)e^{-x}$ em que, $C_{m-1}(x)$ e $D_{m-1}(x)$ são polinômios de grau $m-1$ com coeficientes inteiros. Logo,

$$\begin{aligned} J_{m+1}(x) &= -(4m+2)J_m(x) + 4x^2 J_{m-1}(x) \\ &= -(4m+2)\left(A_m(x)e^x + B_m(x)e^{-x}\right) + 4x^2\left(C_{m-1}(x)e^x + D_{m-1}(x)e^{-x}\right) \\ &= P_{m+1}(x)e^x + Q_{m+1}(x)e^{-x}, \end{aligned}$$

onde $P_{m+1}(x) = (4x^2 C_{m-1}(x) - (4m+2)A_m(x))$ e $Q_{m+1}(x) = (4x^2 D_{m-1}(x) - (4m+2)B_m(x))$ são polinômios de grau $m+1$ com coeficientes inteiros. Pelo Princípio de Indução Forte, conclui-se a demonstração do teorema. □

O Teorema 5.4 assegura a irracionalidade não somente do número de Euler, mas também de todas as potências racionais não nulas de $e$.

**Teorema 5.4.** *Para todo $x \in \mathbb{Q}^*$ tem-se que $e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

*Demonstração.* Seja $x \in \mathbb{Q}^*$, supondo por contradição que $e^x$ é racional. Então existem $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^*$ tais que $e^x = \dfrac{r}{s}$ e $x = \dfrac{p}{q}$. Segue do Teorema 5.3 que

$$(qrs)^n J_n(x) = (qrs)^n \left(A_n(x)e^x + B_n(x)e^{-x}\right),$$

onde $A_n$ e $B_n$ são polinômios de grau $n$ com coeficientes inteiros. Assim,

$$(qrs)^n J_n\left(\frac{p}{q}\right) = (qrs)^n \left(A_n\left(\frac{p}{q}\right)e^{\frac{p}{q}} + B_n\left(\frac{p}{q}\right)e^{-\frac{p}{q}}\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $(x_n)$ definida por

$$x_n = (qrs)^n \left(A_n\left(\frac{p}{q}\right)\frac{r}{s} + B_n\left(\frac{p}{q}\right)\frac{s}{r}\right).$$

Como $J_n(x) > 0$ e $A_n(x)$ e $B_n(x)$ são polinômios de grau $n$ com coeficientes inteiros, então $x_n \in \mathbb{Z}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$$\begin{aligned} J_n\left(\frac{p}{q}\right) &= A_n\left(\frac{p}{q}\right)\frac{r}{s} + B_n\left(\frac{p}{q}\right)\frac{s}{r} \\ &= \left[a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0\right]\frac{r}{s} + \\ &\quad \left[b_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + b_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + b_1\left(\frac{p}{q}\right) + b_0\right]\frac{s}{r}. \end{aligned}$$

Assim, multiplicando o polinômio $J_n\left(\frac{p}{q}\right)$ por $(qrs)^n$, obtêm-se uma soma de produtos de números inteiros, logo $(x_n)$ é uma sequência formada por números inteiros. Pelo Lema 5.2 o $\lim x_n = \lim(qrs)^n J_n(x) = 0$. Uma vez que, $(x_n)$ é uma sequência de inteiros diferente de zero, tal que o $\lim x_n = 0$, obtém-se uma contradição com a Proposição 2.4. Portanto, $e^x$ é irracional para todo $x \in \mathbb{Q}^*$. □

Como consequência imediata, têm-se que o número de Euler ($e$) é irracional, basta considerar, no Teorema 5.4, o valor de $x = 1$. Ademais, o Teorema 5.4 mostra que o número de Euler possui propriedade especial, pois a potência racional de números irracionais não necessariamente é um número irracional, basta observar que $(\sqrt{2})^2$ é um número racional.

**Corolário 5.5.** *Se $x$ é um número racional positivo diferente de um, então $\ln(x)$ é um número irracional.*

*Demonstração.* Seja $x$ um número racional positivo, tal que $x \neq 1$. Supondo, por contradição, que $\ln(x) \in \mathbb{Q}$, tem-se pelo Teorema 5.4 que $e^{\ln(x)} = x$ é irracional. Contradição, logo $\ln(x)$ é irracional. □

## 6 Considerações finais

O número $e$ é um dos principais representantes dos números irracionais e uma das constantes matemáticas mais conhecidas, revelando-se em diversas fórmulas e aplicações em modelagem de fenômenos naturais. A demonstração da sua irracionalidade pode ser obtida de diversas formas, algumas envolvendo argumentos e técnicas simples e outras mais complexas e sofisticadas (em Figueiredo (2011) e Marques (2013) o leitor pode encontrar algumas demonstrações ilustrando algumas dessas situações). Cada demonstração possui vantagens e desvantagens dependendo do objetivo desejado, e isso é uma das motivações que fazem os matemáticos buscarem novas demonstrações para resultados já conhecidos, como é o caso.

Neste artigo foi apresentada mais uma forma de demonstração da irracionalidade do número $e$ e suas potências racionais não nulas, utilizando argumentos simples e ferramentas acessíveis a estudantes de cursos de Matemática, como sequências de números reais, a técnica de integração por partes e o Segundo Princípio de Indução. Ela destaca-se por possibilitar deduzir a irracionalidade de um conjunto infinito enumerável de números irracionais $E = \{e^x; x \in \mathbb{Q}^*\}$. De modo geral, não é simples deduzir a racionalidade ou irracionalidade de potências racionais de números irracionais. Assim, pode-se questionar quais outros números irracionais $x \notin E$ admitem tal propriedade?

Ademais, seria possível adaptar as ideias e técnicas utilizadas ao longo deste artigo para determinar a irracionalidade de outras constantes (e suas potências racionais)? A racionalidade ou irracionalidade de algumas constantes, ainda, é um desafio em aberto na matemática. Pode-se citar, por exemplo, a constante de Euler-Mascheroni. Dessa forma, avanços nessa direção sugerem impactos em diversas áreas como Teoria dos Números, Análise, Topologia, entre outras.

## Referências

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **Proofs from THE BOOK**. 6. ed. Berlim: Springer, 2018. ISBN 978-3-662-57264-1. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57265-8. Acesso em: 13 set. 2024.

DUPONT, Ghislain. **Irrationalité de pi**. univ-lemans.fr, 2004.

EULER, Leonhard. De fractionibus continuis dissertatio. 1744. **The Euler Archive**. All Works by Eneström Number. n. 71, 2018. Disponível em: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/71. Acesso em: 12 set. 2024.

FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentes**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Coleção de Iniciação Científica.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v. 1.

KOKSMA, J. F. On Niven's proof that $\pi$ is irrational. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, v. 2, p. 23-39, 1949.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**: funções de uma variável. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. v. 1. Coleção Matemática Universitária.

LIOUVILLE, Joseph. Sur l'irrationalité du nombre $e = 2,718\ldots$. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 5, n. 1, p. 192, 1840. Disponível em: http://www.numdam.org/item/JMPA_1840_1_5__192_0. Acesso em: 13 set. 2024.

MAKAROV B. M.; GOLUZINA, M. G.; LODKIN, A. A.; PODKORYTOV, A. N. **Selected Problems in Real Analysis**. Providence: American Mathematical Society, 1992. v. 107.

MAOR, Eli. $e$**: A história de um número**. 5. ed. Tradução: CALIFE, Jorge. Rio de Janeiro: Record, 2008. ISBN 978-85-01-05847-8.

MARQUES, Diego. **Teoria dos números transcendentes**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção Matemática Universitária. ISBN 9788585818784.

NERI, Cassio; CABRAL, Marco. **Curso de Análise Real**. 1. ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2021. ISBN 978-65-86502-04-6.

NIVEN, Ivan. A simple proof that $\pi$ is irrational. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 53, n. 6, 1947.

OLIVEIRA, Fernando Neri. Uma prova elementar da irracionalidade de $\pi$. **C.Q.D.: Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 13, set./nov. 2018. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/224. Acesso em: 12 set. 2024.

SANTOS, Devison Rocha. **A utilização da integral de Riemann como ferramenta para demonstração da irracionalidade de alguns números reais**. Orientador: Felipe Fonseca dos Santos. 2022. 49 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro de Formação de Professores, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa, 2022. Disponível em: https://www2.ufrb.edu.br/matematica/trabalho-de-conclusao-de-curso-tcc. Acesso em: 12 set. 2024.

## Agradecimentos

Agradecemos ao Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia pelo suporte fornecido e aos anônimos revisores por suas valiosas considerações que resultaram na melhoria do trabalho.