



Modelagem e simulação numérica de um modelo presa-predador com competição sob o efeito de um poluente na BSFA: dispersão-migração¹

Modeling and numerical simulation of a prey-predator model with competition under the effect of a pollutant in BSFA: dispersal-migration

Modelado y simulación numérica de un modelo presa-depredador con competencia bajo el efecto de un contaminante en BSFA: dispersión-migración

Vitor Hugo Muniz Oliveira ²

Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-4080-0224>,  <http://lattes.cnpq.br/7943070330526230>



André Krindges ³

Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), Cuiabá, MT, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-2575-9315>,  <http://lattes.cnpq.br/6745819763260853>



Daniela Ribeiro Monteiro ⁴

Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (IBMEC), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-2150-3147>,  <http://lattes.cnpq.br/9888610878338926>

João Frederico da Costa Azevedo Meyer ⁵

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-8002-7075>,  <http://lattes.cnpq.br/9611168473482242>

Marcos Marreiro Salvatierra ⁶

Universidade do Estado do Amazonas (UEA), Manaus, AM, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-6680-4023>,  <http://lattes.cnpq.br/7398454498084942>

Resumo: O presente trabalho apresenta os resultados de uma dissertação de mestrado que investigou o impacto de um poluente nas dinâmicas populacionais de espécies que interagem entre si em um mesmo am-

¹ Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

² **Currículo sucinto:** Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia, licenciado em Matemática pela Faculdade Venda Nova do Imigrante, mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas e doutorando em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Revisão e Edição, Supervisão e Validação. **Contato:** vitor.hmunicz@ime.usp.br.

³ **Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso, mestre em Matemática e Computação Científica pela Universidade Federal de Santa Catarina e doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Professor da Universidade Federal do Mato Grosso. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Revisão e Edição, Supervisão e Validação. **Contato:** krindges@gmail.com.

⁴ **Currículo sucinto:** Licenciada e bacharel em Matemática, mestre em Ciências Computacionais e doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Docente no Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Revisão e Edição, Supervisão e Validação. **Contato:** danielarmonteiro@gmail.com.

⁵ **Currículo sucinto:** Bacharel, mestre e doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas. Livre-docente em Biomatemática e professor associado da UNICAMP. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Revisão e Edição, Supervisão e Validação. **Contato:** jmeyer@unicamp.br.

⁶ **Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Escola Superior Batista do Amazonas, mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas e doutor em Informática pela Universidade Federal do Amazonas. Professor adjunto na Escola Normal Superior da Universidade do Estado do Amazonas. **Contribuição de autoria:** Curadoria de Dados, Escrita – Revisão e Edição, Supervisão e Validação. **Contato:** msalvatierra@uea.edu.br.



biente. É apresentado um sistema de Equações Diferenciais Parciais de Dispersão-Migração, que foi discretizado espacialmente através do Método de Galerkin via Elementos Finitos e temporalmente através do Método de Crank-Nicolson. São aqui apresentadas as equações não-lineares do sistema empregado na modelagem e suas formulações variacionais. Também é apresentado o sistema não linear discreto resultante, com o qual foram realizadas as simulações numéricas. Este estudo contribui significativamente para a compreensão dos impactos da presença de materiais poluentes advindos de ações antropogênicas em um determinado ambiente, principalmente no que tange aos seus efeitos nas densidades populacionais de espécies coexistentes.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais; método de Galerkin; método de Crank-Nicolson; formulação variacional; discretização espacial e temporal.

Abstract: This work presents the results of a master's thesis that investigated the impact of a pollutant on the population dynamics of species that interact with each other in the same environment. A system of Dispersion-Migration Partial Differential Equations is presented, which was discretized spatially using the Galerkin Method via Finite Elements and temporally using the Crank-Nicolson Method. The non-linear equations of the system used in modeling and their variational formulations are presented here. The resulting discrete nonlinear system, with which the numerical simulations were carried out, is also presented. This study significantly contributes to understanding the impacts of the presence of polluting materials arising from anthropogenic actions in a given environment, especially with regard to their effects on the population densities of coexisting species.

Keywords: partial differential equations; Galerkin method; Crank-Nicolson method; variational formulation; spatial and temporal discretization.

Resumen: Este trabajo presenta los resultados de una tesis de maestría que investigó el impacto de un contaminante en las dinámicas poblacionales de especies que interactúan entre sí en un mismo ambiente. Se presenta un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales de Dispersión-Migración, el cual fue discretizado espacialmente mediante el Método Galerkin vía Elementos Finitos y temporalmente empleando el Método Crank-Nicolson. Se presentan aquí las ecuaciones no lineales del sistema utilizado en el modelización y sus formulaciones variacionales. También se presenta el sistema discreto no lineal resultante, con el cual se realizaron las simulaciones numéricas. Este estudio contribuye significativamente la comprensión de los impactos de la presencia de materiales contaminantes derivados de acciones antropogénicas en un ambiente determinado, principalmente en lo que respecta a sus efectos sobre las densidades poblacionales de especies coexistentes.

Palabras Clave: ecuaciones diferenciales parciales; método Galerkin; método Crank-Nicolson; formulación variacional; discretización espacial y temporal.

Data de submissão: 17 de fevereiro de 2024.

Data de aprovação: 9 de maio de 2024.

1 Introdução

Há um longo período em que os modelos que se concentram em uma única espécie têm sido contestados, com base na ideia de que nenhuma espécie existe e opera de maneira isolada, sem interagir com outras. Desde os estudos realizados por Lotka (1925) e Volterra (1926), sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias que abarcam as interações entre diferentes espécies começaram a ser empregados de várias maneiras para investigar e compreender diversos fenômenos ligados à sua coexistência. No entanto, esses modelos somente levavam em consideração as mudanças ao



longo do tempo, assumindo uma distribuição uniforme das populações no espaço. Os processos de dispersão e interação, presentes em praticamente todas as populações naturais, levaram à necessidade de incorporar elementos espaciais nos modelos, sendo Skellam (1991) um dos pioneiros nesse aspecto.

Neste trabalho apresentaremos o estudo de um sistema de Equações Diferenciais Parciais de Dispersão-Migração envolvendo termos do tipo Lotka-Volterra e dinâmicas vitais do tipo Verhulst (Murray, 2003). Pode-se encontrar os primeiros estudos sobre esta ideia no trabalho de Sossae (2003), que apresenta um sistema de um convívio entre relações do tipo presa-predador com competição. Para a modelagem desse sistema, consideraremos os seguintes fenômenos:

- Dispersão populacional de cada espécie;
- Processos migratórios de cada espécie;
- Decaimento das espécies devido à presença de um poluente;
- Dinâmicas vitais;
- Relações inter e intra-específicas.

A partir dos fenômenos descritos, iremos levar em conta duas populações P_1 e P_2 que interagem entre si. O sistema não-linear (Salvatierra, 2005) que descreve os fenômenos considerados para as densidades populacionais $P_1(x, y, t)$ e $P_2(x, y, t)$, com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in (0, T]$, é dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_1 \nabla P_1) + \operatorname{div}(\vec{U} P_1) + \rho_1 \sigma P_1 = \beta_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + P_2}{K}\right) - \delta_1 P_1 P_2, \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_2 \nabla P_2) + \operatorname{div}(\vec{W} P_2) + \rho_2 \sigma P_2 = \beta_2 P_2 \left(1 - \frac{P_1 + P_2}{K}\right) - \delta_2 P_1 P_2, \end{cases} \quad (1)$$

com os significados biológicos dos parâmetros descritos por:

- $\alpha_1 = \alpha_1(x, y, t)$ e $\alpha_2 = \alpha_2(x, y, t)$ são os coeficientes de dispersão populacional de cada espécie;
- $\vec{U} = (U_1(x, y, t), U_2(x, y, t))$ e $\vec{W} = (W_1(x, y, t), W_2(x, y, t))$ são os vetores velocidade de migração populacional ou advectiva de cada espécie, com $\operatorname{div}(\vec{U}) = \operatorname{div}(\vec{W}) = 0$;
- $\sigma = \sigma(x, y, t)$ é a função decaimento populacional das duas espécies no meio $\Omega \in \mathbb{R}^2$;
- ρ_1 e ρ_2 são as taxas da função decaimento populacional de cada espécie devido à mortalidade causada pela presença do poluente σ ;



- β_1 e β_2 são as taxas de crescimento intrínsecos de cada espécie;
- K é a capacidade de suporte do meio para as duas espécies;
- δ_1 e δ_2 são as taxas de relação interespecífica.

Considera-se que $\vec{U}, \vec{W}, \alpha_1$ e α_2 sejam constantes e, então, podemos reescrever o sistema (1) com as condições iniciais e condições de contorno de Dirichlet homogêneas em Γ_0 e Von-Neumann homogêneas em Γ_1 da seguinte forma (Oliveira, 2024):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \alpha_1 \Delta P_1 + \nabla \cdot (\vec{U} P_1) + \rho_1 \sigma P_1 = \beta_1 P_1 - \gamma_1 P_1^2 - \theta_1 P_1 P_2, \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - \alpha_2 \Delta P_2 + \nabla \cdot (\vec{W} P_2) + \rho_2 \sigma P_2 = \beta_2 P_2 - \gamma_2 P_2^2 - \theta_2 P_1 P_2, \\ P_1(x, y, 0) = P_{1_0}(x, y) \quad \text{e} \quad P_2(x, y, 0) = P_{2_0}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ P_1 \Big|_{\Gamma_0} = P_2 \Big|_{\Gamma_0} = 0, \\ \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial P_2}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \end{array} \right. \quad \forall (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in (0, T],$$

$\forall t \in (0, T], \text{ com } \Gamma_0 \text{ e } \Gamma_1 \text{ tais que } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial \Omega,$

(2)

onde $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{K}, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{K}, \theta_1 = \gamma_1 + \delta_1$ e $\theta_2 = \gamma_2 + \delta_2$.

Os parâmetros θ_1 e θ_2 definidos acima são as taxas de relação interespecífica entre as espécies P_1 e P_2 . Assumindo θ_1 e θ_2 não nulos para que existam as interações, podemos considerar as seguintes situações:

- (i) Se $\theta_1 < 0$ e $\theta_2 > 0$, o sistema é chamado presa-predador onde o parâmetro com índice 1 representa a densidade populacional da presa e o índice 2 a do predador;
- (ii) Se $\theta_1 < 0$ e $\theta_2 < 0$, há uma competição entre as populações P_1 e P_2 ;
- (iii) Se $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 > 0$, tem-se mutualismo ou cooperação ou simbiose;
- (iv) Se $\theta_1 < 0$ e $\theta_2 = 0$ (ou $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 < 0$), há comensalismo;
- (v) Se $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 = 0$ (ou $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 > 0$), tem-se amensalismo.

Pode-se encontrar a fundamentação das relações ecológicas mencionadas de (i)-(v) no trabalho de Santos (2023).



2 Formulação Variacional

Nesta seção, desenvolveremos a formulação variacional do sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) em questão, que encontra-se fundamentada na dissertação de mestrado de Oliveira (2024). Para isso, é preferível usar a formulação fraca ou variacional em vez da formulação clássica, pois a primeira permite parâmetros menos restritos e é especialmente útil para obter soluções aproximadas de forma construtiva. A seguir, é apresentado o sistema em estudo que descreve as equações das populações $P_1(x, y, t)$, $P_2(x, y, t) \in \mathcal{V}_P$,

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial t} \phi \, d\mu - \underbrace{\int_{\Omega} (\alpha_1 \Delta P_1) \phi \, d\mu}_{(i)} + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{U} P_1) \phi \, d\mu + \rho_1 \int_{\Omega} \sigma P_1 \phi \, d\mu - \beta_1 \int_{\Omega} P_1 \phi \, d\mu \\ & + \gamma_1 \int_{\Omega} P_1^2 \phi \, d\mu + \int_{\Omega} \theta_1 P_1 P_2 \phi \, d\mu = 0, \\ & \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial t} \phi \, d\mu - \underbrace{\int_{\Omega} (\alpha_2 \Delta P_2) \phi \, d\mu}_{(ii)} + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{W} P_2) \phi \, d\mu + \rho_2 \int_{\Omega} \sigma P_2 \phi \, d\mu - \beta_2 \int_{\Omega} P_2 \phi \, d\mu \\ & + \gamma_2 \int_{\Omega} P_2^2 \phi \, d\mu + \theta_2 \int_{\Omega} P_1 P_2 \phi \, d\mu = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_P, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

onde $\mathcal{V}_P = \{P_1, P_2 \in L_2((0, T], H_1(\Omega)) : \frac{\partial P_1}{\partial t}, \frac{\partial P_2}{\partial t} \in L_2(\Omega), \forall t \in (0, T]\}$, sendo $L_2(\Omega)$ o espaço das funções quadrado integráveis no sentido de Lebesgue sobre um domínio Ω e $H_1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis, cuja as derivadas primeiras existem e são quadrado integráveis (Espaço de Sobolev).

Pode-se observar que o espaço \mathcal{V}_P restringe o desenvolvimento da formulação fraca, pelo fato de exigir a pertinência das derivadas primeiras em $L_2(\Omega)$. Recorrendo-se ao **Teorema de Green** (Iório, 2018) nos termos (i) e (ii) do sistema (3), obtém-se:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial t} \phi \, d\mu + \int_{\Omega} \alpha_1 \nabla P_1 \cdot \nabla \phi \, d\mu - \alpha_1 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{U} P_1) \phi \, d\mu \\ & + \rho_1 \int_{\Omega} \sigma P_1 \phi \, d\mu - \beta_1 \int_{\Omega} P_1 \phi \, d\mu + \gamma_1 \int_{\Omega} P_1^2 \phi \, d\mu + \theta_1 \int_{\Omega} P_1 P_2 \phi \, d\mu = 0, \\ & \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial t} \phi \, d\mu + \int_{\Omega} \alpha_2 \nabla P_2 \cdot \nabla \phi \, d\mu - \alpha_2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial \eta} \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{W} P_2) \phi \, d\mu \\ & + \rho_2 \int_{\Omega} \sigma P_2 \phi \, d\mu - \beta_2 \int_{\Omega} P_2 \phi \, d\mu + \gamma_2 \int_{\Omega} P_2^2 \phi \, d\mu + \theta_2 \int_{\Omega} P_1 P_2 \phi \, d\mu = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_P. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Considerando α_1, α_2 os coeficientes de dispersão e \vec{U}, \vec{W} os campos vetoriais de migração inde-



pendentes do tempo, espaço e das próprias populações e aplicando as condições de contorno de Dirichlet homogênea e Von-Neumann homogêna no sistema (4), obtemos:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial t} \phi \, d\mu + \alpha_1 \int_{\Omega} \nabla P_1 \cdot \nabla \phi \, d\mu + U_1 \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial x} \phi \, d\mu + U_2 \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial y} \phi \, d\mu + \rho_1 \int_{\Omega} \sigma P_1 \phi \, d\mu \\ -\beta_1 \int_{\Omega} P_1 \phi \, d\mu + \gamma_1 \int_{\Omega} P_1^2 \phi \, d\mu + \theta_1 \int_{\Omega} P_1 P_2 \phi \, d\mu = 0, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial t} \phi \, d\mu + \alpha_2 \int_{\Omega} \nabla P_2 \cdot \nabla \phi \, d\mu + W_1 \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial x} \phi \, d\mu + W_2 \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial y} \phi \, d\mu + \rho_2 \int_{\Omega} \sigma P_2 \phi \, d\mu \\ -\beta_2 \int_{\Omega} P_2 \phi \, d\mu + \gamma_2 \int_{\Omega} P_2^2 \phi \, d\mu + \theta_2 \int_{\Omega} P_1 P_2 \phi \, d\mu = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_p. \end{cases} \quad (5)$$

Escrevendo o sistema (5) em notação de produto interno no espaço $L_2(\Omega)$, obtemos:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} \mid \phi \right) + \alpha_1 (\nabla P_1 \parallel \nabla \phi) + U_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} \mid \phi \right) + U_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} \mid \phi \right) + \rho_1 (\sigma P_1 \mid \phi) - \beta_1 (P_1 \mid \phi) \\ + \gamma_1 (P_1^2 \mid \phi) + \theta_1 (P_1 P_2 \mid \phi) = 0, \\ \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} \mid \phi \right) + \alpha_2 (\nabla P_2 \parallel \nabla \phi) + W_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} \mid \phi \right) + W_2 \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} \mid \phi \right) + \rho_2 (\sigma P_2 \mid \phi) - \beta_2 (P_2 \mid \phi) \\ + \gamma_2 (P_2^2 \mid \phi) + \theta_2 (P_1 P_2 \mid \phi) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_P, \end{cases} \quad (6)$$

sistema que representa a formulação variacional para as populações P_1 e P_2 . Nota-se que foi utilizada a notação $(\cdot \mid \cdot)$ com uma barra, para produto interno entre funções e a notação $(\cdot \parallel \cdot)$ com duas barras, para produto interno entre vetores.

3 Discretização Espacial pelo Método de Galerkin via MEF

Nesta seção faremos a discretização espacial (Oliveira, 2024) através do Método de Galerkin via MEF (Método de Elementos Finitos) (Kardestuncer; Norrie, 1987) da formulação variacional do sistema (6). O objetivo é obter uma solução numérica aproximada do modelo em desenvolvimento.

Consideremos o subespaço $\mathcal{V}_{P_h} \subset H_1(\Omega)$, de dimensão finita, gerado pela base $\mathfrak{B}_P = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ sendo a solução para o sistema (6) definida como a combinação linear de elementos dessa base \mathfrak{B}_P . Construiremos uma aproximação da solução nesse espaço realizando uma separação entre as variáveis espaciais e a variável temporal dadas da seguinte forma:



$$\begin{aligned}
 P_1(x, y, t) &\cong P_{1_h}(x, y, t) = \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t)\phi_j(x, y), \\
 \frac{\partial P_{1_h}}{\partial t} &= \sum_{j=1}^N \frac{dP_{1_j}(t)}{dt}\phi_j, \quad \frac{\partial P_{1_h}}{\partial x} = \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t)\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_{1_h}}{\partial y} = \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t)\frac{\partial \phi_j}{\partial y},
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 P_2(x, y, t) &\cong P_{2_h}(x, y, t) = \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t)\phi_j(x, y), \\
 \frac{\partial P_{2_h}}{\partial t} &= \sum_{j=1}^N \frac{dP_{2_j}(t)}{dt}\phi_j, \quad \frac{\partial P_{2_h}}{\partial x} = \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t)\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_{2_h}}{\partial y} = \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t)\frac{\partial \phi_j}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

e, para a concentração do poluente σ ,

$$\sigma(x, y, t) \cong \sigma_h(x, y, t) = \sum_{k=1}^N u_k(t)\phi_k(x, y), \quad \text{com } \phi_j \text{ e } \phi_k \in \mathfrak{B}_P.
 \tag{9}$$

Substituindo os termos das densidades populacionais de P_1 e P_2 por P_{1_h} e P_{2_h} , respectivamente, em sua formulação variacional dada pelo sistema (6), tomando $\psi_h \in \mathcal{V}_{P_h}$ e aplicando os termos definidos em (7), (8) e (9) e na função da concentração de poluente σ , segue que:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^N \frac{dP_{1_j}(t)}{dt}(\phi_j | \psi_h) + \alpha_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t)(\nabla \phi_j \parallel \nabla \psi_h) + U_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} | \psi_h \right) + U_2 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} | \psi_h \right) \\
 &- \beta_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t)(\phi_j | \psi_h) + \rho_1 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N u_k(t)\phi_k \right) \left(\sum_{j=1}^N P_{1_j}(t)\phi_j | \psi_h \right)}_{(i)} \\
 &+ \gamma_1 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N P_{1_k}(t)\phi_k \right) \left(\sum_{j=1}^N P_{1_j}(t)\phi_j | \psi_h \right)}_{(ii)} + \theta_1 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N P_{2_k}(t)\phi_k \right) \left(\sum_{j=1}^N P_{1_j}(t)\phi_j | \psi_h \right)}_{(iii)} = 0, \\
 &\sum_{j=1}^N \frac{dP_{2_j}(t)}{dt}(\phi_j | \psi_h) + \alpha_2 \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t)(\nabla \phi_j \parallel \nabla \psi_h) + W_1 \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} | \psi_h \right) + W_2 \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} | \psi_h \right) \\
 &- \beta_2 \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t)(\phi_j | \psi_h) + \rho_2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N u_k(t)\phi_k \right) \left(\sum_{j=1}^N P_{2_j}(t)\phi_j | \psi_h \right)}_{(iv)} \\
 &+ \gamma_2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N P_{2_k}(t)\phi_k \right) \left(\sum_{j=1}^N P_{2_j}(t)\phi_j | \psi_h \right)}_{(v)} + \theta_2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N P_{1_k}(t)\phi_k \right) \left(\sum_{j=1}^N P_{2_j}(t)\phi_j | \psi_h \right)}_{(vi)} = 0, \quad \forall \psi_h \in \mathcal{V}_{P_h}.
 \end{aligned} \right.
 \tag{10}$$



Rearranjando convenientemente os termos não-lineares $(i)-(vi)$ do sistema (10), utilizando o **Método de Garlerkin**, pelo fato de garantir que as funções teste $\psi_h \in \mathcal{V}_{P_h}$ sejam da mesma classe das funções de base ϕ_i e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{dP_{1j}(t)}{dt} (\phi_j | \phi_i) + \sum_{j=1}^N P_{1j}(t) \left\{ \alpha_1 (\nabla \phi_j \parallel \nabla \phi_i) + U_1 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \mid \phi_i \right) + U_2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mid \phi_i \right) - \beta_1 (\phi_j | \phi_i) \right. \\ & \left. + \rho_1 \sum_{k=1}^N u_k(t) (\phi_k \phi_j | \phi_i) + \gamma_1 \sum_{k=1}^N P_{1k}(t) (\phi_k \phi_j | \phi_i) + \theta_1 \sum_{k=1}^N P_{2k}(t) (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\} = 0, \\ & \sum_{j=1}^N \frac{dP_{2j}(t)}{dt} (\phi_j | \phi_i) + \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left\{ \alpha_2 (\nabla \phi_j \parallel \nabla \phi_i) + W_1 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \mid \phi_i \right) + W_2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mid \phi_i \right) - \beta_2 (\phi_j | \phi_i) \right. \\ & \left. + \rho_2 \sum_{k=1}^N u_k(t) (\phi_k \phi_j | \phi_i) + \gamma_2 \sum_{k=1}^N P_{2k}(t) (\phi_k \phi_j | \phi_i) + \theta_2 \sum_{k=1}^N P_{1k}(t) (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\} = 0, \quad \forall \phi_i \in \mathcal{V}_{P_h}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Os campos vetoriais de migração relacionados aos termos advectivos $U(x, y) = (U_1(x, y), U_2(x, y))$ e $W(x, y) = (W_1(x, y), W_2(x, y))$, respectivamente, descritos em suas equações no sistema (11) possuem valores pontuais aproximados e são obtidos através da resolução numérica do **Método de Krigagem** fundamentado em Landim (2000). Interpolando $U(x, y)$ e $W(x, y)$ através das funções de base \mathfrak{B}_P , obtém-se

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= \sum_{m=1}^N U_{1m} \phi_m(x, y), & U_2(x, y) &= \sum_{p=1}^N U_{2p} \phi_p(x, y), \\ W_1(x, y) &= \sum_{l=1}^N W_{1l} \phi_l(x, y) & \text{e} & \quad W_2(x, y) = \sum_{q=1}^N W_{2q} \phi_q(x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Substituindo os valores dos campos de velocidade de dispersão populacional $U_1(x, y), U_2(x, y), W_1(x, y)$ e $W_2(x, y)$ dados em (12) e fazendo algumas manipulações algébricas no sistema (11), obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{dP_{1j}(t)}{dt} (\phi_j | \phi_i) + \sum_{j=1}^N P_{1j}(t) \left\{ \alpha_1 (\nabla \phi_j \parallel \nabla \phi_i) + \sum_{m=1}^N U_{1m} \phi_m \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \mid \phi_i \right) + \sum_{p=1}^N U_{2p} \phi_p \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mid \phi_i \right) \right. \\ & \left. - \beta_1 (\phi_j | \phi_i) + \sum_{k=1}^N [\rho_1 u_k(t) + \gamma_1 P_{1k}(t) + \theta_1 P_{2k}(t)] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\} = 0, \\ & \sum_{j=1}^N \frac{dP_{2j}(t)}{dt} (\phi_j | \phi_i) + \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left\{ \alpha_2 (\nabla \phi_j \parallel \nabla \phi_i) + \sum_{l=1}^N W_{1l} \phi_l \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \mid \phi_i \right) + \sum_{q=1}^N W_{2q} \phi_q \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mid \phi_i \right) \right. \\ & \left. - \beta_2 (\phi_j | \phi_i) + \sum_{k=1}^N [\rho_2 u_k(t) + \gamma_2 P_{2k}(t) + \theta_2 P_{1k}(t)] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\} = 0, \quad \forall \phi_i \in \mathcal{V}_{P_h}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$



O sistema (13) pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{cases} CP_1^*(t)^{(n)} + D(u_k^{(n)}, P_{1_k}^{(n)}) P_1(t)^{(n)} = 0, \\ EP_2^*(t)^{(n)} + F(u_k^{(n)}, P_{2_k}^{(n)}) P_2(t)^{(n)} = 0, \end{cases}$$

onde

$$C = c_{ji} = (\phi_j | \phi_i)_{L_2(\Omega)},$$

$$E = e_{ji} = (\phi_j | \phi_i)_{L_2(\Omega)},$$

$$P_1^*(t)^{(n)} = \sum_{j=1}^N \frac{dP_{1_j}(t)}{dt}, \quad P_1(t)^{(n)} = \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t),$$

$$P_2^*(t)^{(n)} = \sum_{j=1}^N \frac{dP_{2_j}(t)}{dt}, \quad P_2(t)^{(n)} = \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t),$$

$$D = d_{ji} = \alpha_1(\nabla\phi_j | \nabla\phi_i) + \sum_{m=1}^N U_{1_m} \phi_m \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial x} | \phi_i \right) + \sum_{p=1}^N U_{2_p} \phi_p \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial y} | \phi_i \right) - \beta_1(\phi_j | \phi_i) + \sum_{k=1}^N [\rho_1 u_k(t) + \gamma_1 P_{1_k}(t) + \theta_1 P_{2_k}(t)] (\phi_k \phi_j | \phi_i),$$

$$F = f_{ji} = \alpha_2(\nabla\phi_j | \nabla\phi_i) + \sum_{l=1}^N W_{1_l} \phi_l \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial x} | \phi_i \right) + \sum_{q=1}^N W_{2_q} \phi_q \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial y} | \phi_i \right) - \beta_2(\phi_j | \phi_i) + \sum_{k=1}^N [\rho_2 u_k(t) + \gamma_2 P_{2_k}(t) + \theta_2 P_{1_k}(t)] (\phi_k \phi_j | \phi_i),$$

caracterizando-se como um **Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Não-Lineares** na variável t com as condições iniciais já discretizadas e dadas implicitamente por meio da formulação variacional

$$\sum_{j=1}^N P_{1_j}^{(0)}(\phi_j | \phi_i) = (P_{1_{j_0}} | \phi_i) \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N P_{2_j}^{(0)}(\phi_j | \phi_i) = (P_{2_{j_0}} | \phi_i). \tag{14}$$

4 Discretização Temporal pelo Método de Crank-Nicolson

Nesta seção desenvolveremos a discretização temporal para o modelo de Dispersão-Migração dado pelo sistema (2). A partir do método de Crank-Nicolson (Martinelli, 2020). Tomaremos $t_n + \frac{\Delta t}{2}$, onde n representa o passo no tempo e o termo dado é definido como diferença centrada no tempo.



Assim, para as derivadas temporais, temos as aproximações dadas por:

$$\frac{dP_{1j}^{n+\frac{1}{2}}}{dt} \cong \frac{P_{1j}^{n+1} - P_{1j}^n}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \frac{dP_{2j}^{n+\frac{1}{2}}}{dt} \cong \frac{P_{2j}^{n+1} - P_{2j}^n}{\Delta t}, \tag{15}$$

onde o índice n representa o passo no tempo.

Para os valores de P_{1j} , P_{1k} , P_{2j} , P_{2k} e u_k , têm-se as aproximações definidas por

$$P_{1j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{P_{1j}^{n+1} + P_{1j}^n}{2}, \quad P_{1k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{P_{1k}^{n+1} + P_{1k}^n}{2}, \tag{16}$$

$$P_{2j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{P_{2j}^{n+1} + P_{2j}^n}{2}, \quad P_{2k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{P_{2k}^{n+1} + P_{2k}^n}{2} \quad \text{e} \quad u_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2}.$$

Utilizando as aproximações dadas em (15) e (16), e multiplicando as equações do sistema (13) por Δt , obtemos:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^N P_{1j}^{n+1} \left\{ (\phi_j | \phi_i) + \frac{\Delta t}{2} \left[\alpha_1 (\nabla \phi_j \parallel \nabla \phi_i) + \sum_{m=1}^N U_{1m} \phi_m \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \mid \phi_i \right) + \sum_{p=1}^N U_{2p} \phi_p \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mid \phi_i \right) - \beta_1 (\phi_j | \phi_i) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^N \left[\rho_1 \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + \gamma_1 \frac{P_{1k}^{n+1} + P_{1k}^n}{2} + \theta_1 \frac{P_{2k}^{n+1} + P_{2k}^n}{2} \right] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\} \\ & = \sum_{j=1}^N P_{1j}^n \left\{ (\phi_j | \phi_i) - \frac{\Delta t}{2} \left[\alpha_1 (\nabla \phi_j \parallel \nabla \phi_i) + \sum_{m=1}^N U_{1m} \phi_m \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \mid \phi_i \right) + \sum_{p=1}^N U_{2p} \phi_p \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mid \phi_i \right) - \beta_1 (\phi_j | \phi_i) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^N \left[\rho_1 \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + \gamma_1 \frac{P_{1k}^{n+1} + P_{1k}^n}{2} + \theta_1 \frac{P_{2k}^{n+1} + P_{2k}^n}{2} \right] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\}, \\ & \sum_{j=1}^N P_{2j}^{n+1} \left\{ (\phi_j | \phi_i) + \frac{\Delta t}{2} \left[\alpha_2 (\nabla \phi_j \parallel \nabla \phi_i) + \sum_{l=1}^N W_{1l} \phi_l \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \mid \phi_i \right) + \sum_{q=1}^N W_{2q} \phi_q \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mid \phi_i \right) - \beta_2 (\phi_j | \phi_i) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^N \left[\rho_2 \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + \gamma_2 \frac{P_{2k}^{n+1} + P_{2k}^n}{2} + \theta_2 \frac{P_{1k}^{n+1} + P_{1k}^n}{2} \right] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\} \\ & = \sum_{j=1}^N P_{2j}^n \left\{ (\phi_j | \phi_i) - \frac{\Delta t}{2} \left[\alpha_2 (\nabla \phi_j \parallel \nabla \phi_i) + \sum_{l=1}^N W_{1l} \phi_l \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \mid \phi_i \right) + \sum_{q=1}^N W_{2q} \phi_q \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mid \phi_i \right) - \beta_2 (\phi_j | \phi_i) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^N \left[\rho_2 \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + \gamma_2 \frac{P_{2k}^{n+1} + P_{2k}^n}{2} + \theta_2 \frac{P_{1k}^{n+1} + P_{1k}^n}{2} \right] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\}, \quad \forall \phi_i \in \mathcal{V}_{P_n}. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

O sistema não-linear (17) caracteriza-se pela relação $P_{1k}^{(n)} = P_1(x_k, y_k, t_n)$, $P_{2k}^{(n)} = P_2(x_k, y_k, t_n)$ e $u_k^{(n)} = u_k(x_k, y_k, t_n)$ e pode ser reescrito



$$\begin{cases} C \left(P_{1_k}^{(n+1)}, P_{1_k}^{(n)}, P_{2_k}^{(n+1)}, P_{2_k}^{(n)}, u_k^{(n+1)}, u_k^{(n)} \right) P_1^{(n+1)} = D \left(P_{1_k}^{(n+1)}, P_{1_k}^{(n)}, P_{2_k}^{(n+1)}, P_{2_k}^{(n)}, u_k^{(n+1)}, u_k^{(n)} \right) P_1^{(n)}, \\ E \left(P_{1_k}^{(n+1)}, P_{1_k}^{(n)}, P_{2_k}^{(n+1)}, P_{2_k}^{(n)}, u_k^{(n+1)}, u_k^{(n)} \right) P_2^{(n+1)} = F \left(P_{1_k}^{(n+1)}, P_{1_k}^{(n)}, P_{2_k}^{(n+1)}, P_{2_k}^{(n)}, u_k^{(n+1)}, u_k^{(n)} \right) P_2^{(n)}, \end{cases} \quad (18)$$

e as matrizes C, D, E e F , tornam-se:

$$C = c_{ji} = \left[1 - \beta_1 \frac{\Delta t}{2} \right] (\phi_j | \phi_i) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \alpha_1 (\nabla \phi_j | \nabla \phi_i) + U_1 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} | \phi_i \right) + U_2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} | \phi_i \right) + \sum_{k=1}^N \left[\rho_1 \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + \gamma_1 \frac{P_{1_k}^{n+1} + P_{1_k}^n}{2} + \theta_1 \frac{P_{2_k}^{n+1} + P_{2_k}^n}{2} \right] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\},$$

$$D = d_{ji} = \left[1 + \beta_1 \frac{\Delta t}{2} \right] (\phi_j | \phi_i) - \frac{\Delta t}{2} \left\{ \alpha_1 (\nabla \phi_j | \nabla \phi_i) + U_1 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} | \phi_i \right) + U_2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} | \phi_i \right) + \sum_{k=1}^N \left[\rho_1 \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + \gamma_1 \frac{P_{1_k}^{n+1} + P_{1_k}^n}{2} + \theta_1 \frac{P_{2_k}^{n+1} + P_{2_k}^n}{2} \right] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\},$$

$$E = e_{ji} = \left[1 - \beta_2 \frac{\Delta t}{2} \right] (\phi_j | \phi_i) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \alpha_2 (\nabla \phi_j | \nabla \phi_i) + W_1 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} | \phi_i \right) + W_2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} | \phi_i \right) + \sum_{k=1}^N \left[\rho_2 \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + \gamma_2 \frac{P_{2_k}^{n+1} + P_{2_k}^n}{2} + \theta_2 \frac{P_{1_k}^{n+1} + P_{1_k}^n}{2} \right] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\},$$

$$F = f_{ji} = \left[1 + \beta_2 \frac{\Delta t}{2} \right] (\phi_j | \phi_i) - \frac{\Delta t}{2} \left\{ \alpha_2 (\nabla \phi_j | \nabla \phi_i) + W_1 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} | \phi_i \right) + W_2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} | \phi_i \right) + \sum_{k=1}^N \left[\rho_2 \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + \gamma_2 \frac{P_{2_k}^{n+1} + P_{2_k}^n}{2} + \theta_2 \frac{P_{1_k}^{n+1} + P_{1_k}^n}{2} \right] (\phi_k \phi_j | \phi_i) \right\}.$$

Esse sistema será resolvido iterativamente a cada passo no tempo, a partir das condições iniciais P_{1_0} e P_{2_0} já apresentadas pelos termos em (14). Com isso, podemos considerar as condições iniciais dadas por $P_{1_k}^{(0)} = P_1(x_k, y_k, t_n)$ e $P_{2_k}^{(0)} = P_2(x_k, y_k, t_n)$ ou implicitamente por meio da formulação variacional na forma:

$$\sum_{k=1}^N P_{1_k}^{(0)} (\phi_k | \phi_i) = (P_{1_{k_0}} | \phi_i) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N P_{2_k}^{(0)} (\phi_k | \phi_i) = (P_{2_{k_0}} | \phi_i).$$



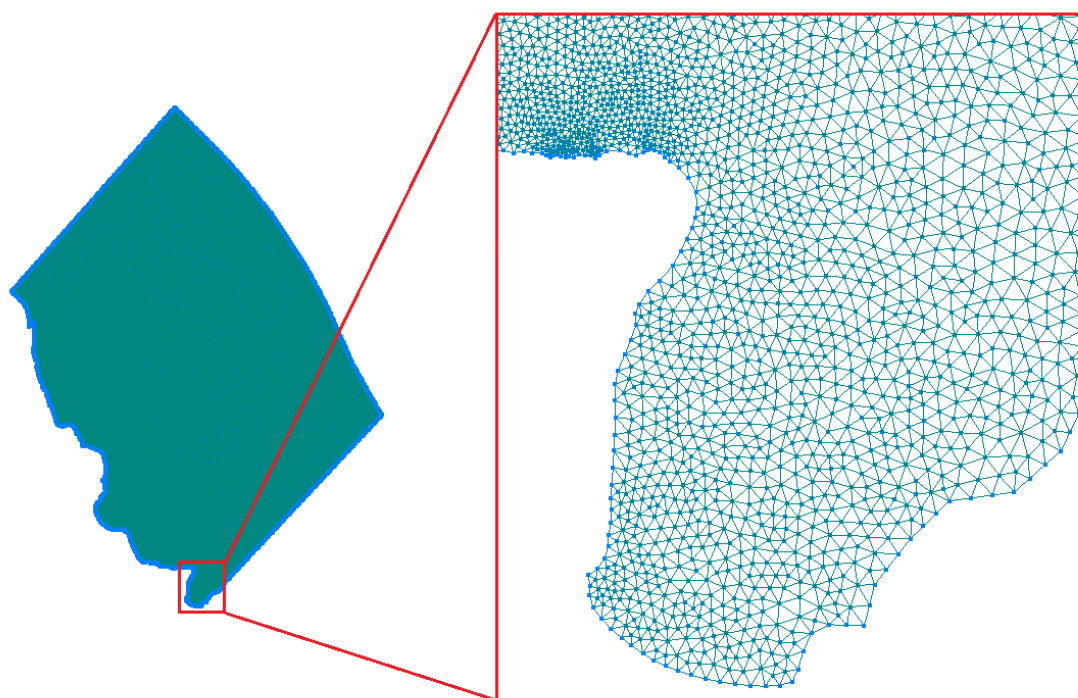
5 Discretização do Domínio

Para gerar o domínio da região utilizamos o *software Google Earth Pro*. Foram demarcados 356 pontos de fronteiras. Em seguida, foram traçados segmentos de reta formados pela distância entre cada ponto. Implementamos no *software GMSH*, através de um arquivo de texto, os valores das coordenadas delimitadas e assim geramos a malha com seus respectivos número de nós, número de nós da fronteira e número de elementos.

Para o domínio em estudo, a malha gerada segue ilustrada na Figura 1, e possui os seguintes dados de construção:

- Área = 357.433 Km²;
- nte = 100.116 (Número total de elementos);
- ntn = 50.504 (Número total de nós);
- nf = 890 (Número de nós da fronteira).

Figura 1: Malha da região da Bacia Sedimentar da Foz do Amazonas



Fonte: Elaborada pelos autores no *software GMSH*.

Durante o processo de construção da malha, um dos aspectos essenciais que recebeu atenção foi a determinação precisa das posições dos elementos geométricos. Essa abordagem permitiu a



identificação dos nós e, conseqüentemente, a distinção entre segmentos e triângulos. A malha foi gerada levando em consideração o critério de estabilidade, representado pelo Número de Péclet. Após a análise dos valores de velocidade e do parâmetro de difusão, conseguimos calcular um valor máximo para o passo de malha, assegurando assim as condições necessárias para o Péclet (Oliveira, 2024).

6 Perfil de Velocidades

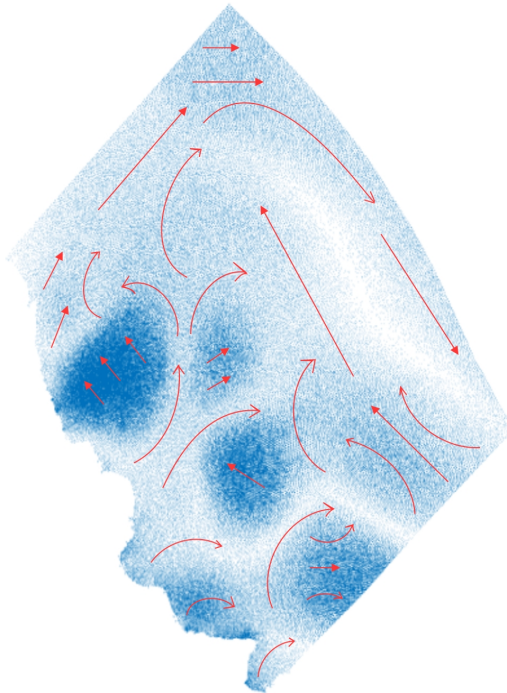
O perfil de velocidades foi desenvolvido a partir de uma estrutura de dados do *Ocean Surface Current Analysis Real-time* (OSCAR) hospedada pelo *Physical Oceanography Distributed Active Archive Center* (PODAAC) (Lagerloef, Bonjean e Dohan, 2009).

A partir dessa estrutura de dados, extraímos para o *software Matlab* as informações para tornar possível a visualização das correntes oceânicas do globo terrestre. Para nosso estudo, desenvolvemos o algoritmo que gera o perfil de velocidades da região de estudo, a BSFA. Para isso, determinamos o perfil parabólico de velocidades das entradas de água de cada saída da foz do rio Amazonas e de outros pequenos afluentes.

Após a implementação, foi feita uma interpolação pelo Método de Krigagem possibilitando gerar o perfil de velocidades da BSFA como mostra na Figura 2. Observamos que esta figura contém setas em vermelho para descrever as direções das correntes marítimas da BSFA. Pelo fato da malha ser muito refinada as setas em azul são tão pequenas que ao ampliar não garantem uma boa resolução da imagem, optamos por fazer essa descrição com as setas ao invés de gerar várias imagens ampliadas.



Figura 2: Perfil de velocidades da Bacia Sedimentar da Foz do Amazonas



Fonte: Elaborada pelo autores no *software Matlab*.

7 Simulações Numéricas

Para simular a concentração do poluente na BSFA foram inseridos dois focos (manchas) como condição inicial, assim sugerindo um derramamento de material impactante proveniente de poluição urbana. Para o acompanhamento da dispersão desse poluente foram escolhidos alguns nós que estão distribuídos na extensão da malha.

Observe na Tabela 1 os parâmetros utilizados na implementação do código executado no *software Matlab*. Repare que o parâmetro Δt possui um valor considerado pequeno. Foi escolhido esse valor, uma vez que algumas simulações geraram instabilidades numéricas nos gráficos quando se escolhiam valores maiores.

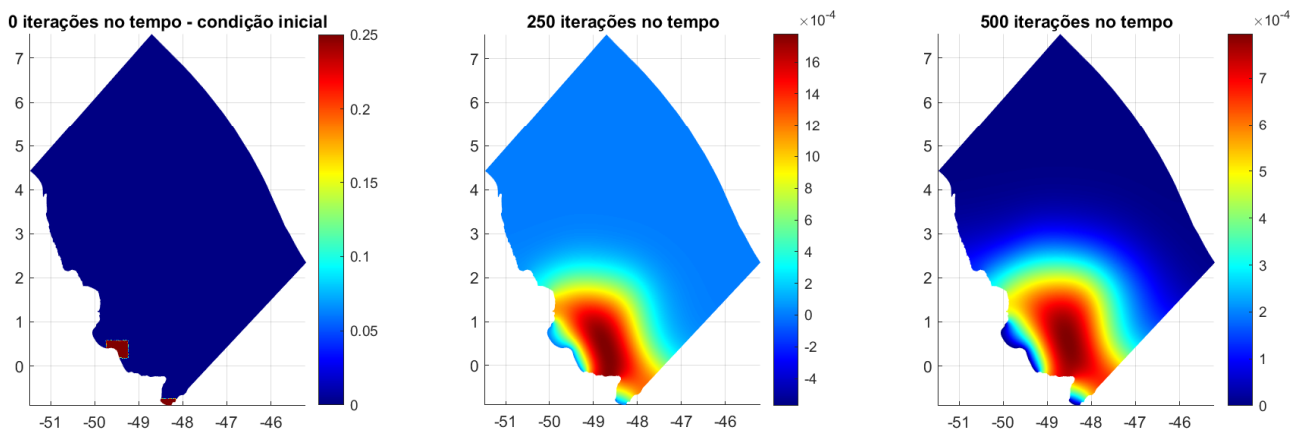
Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação da dispersão de um poluente na BSFA

Parâmetros	Valores
α_c	0.75
σ_c	0.001
Δt	0.002

Fonte: Elaborada pelos autores.



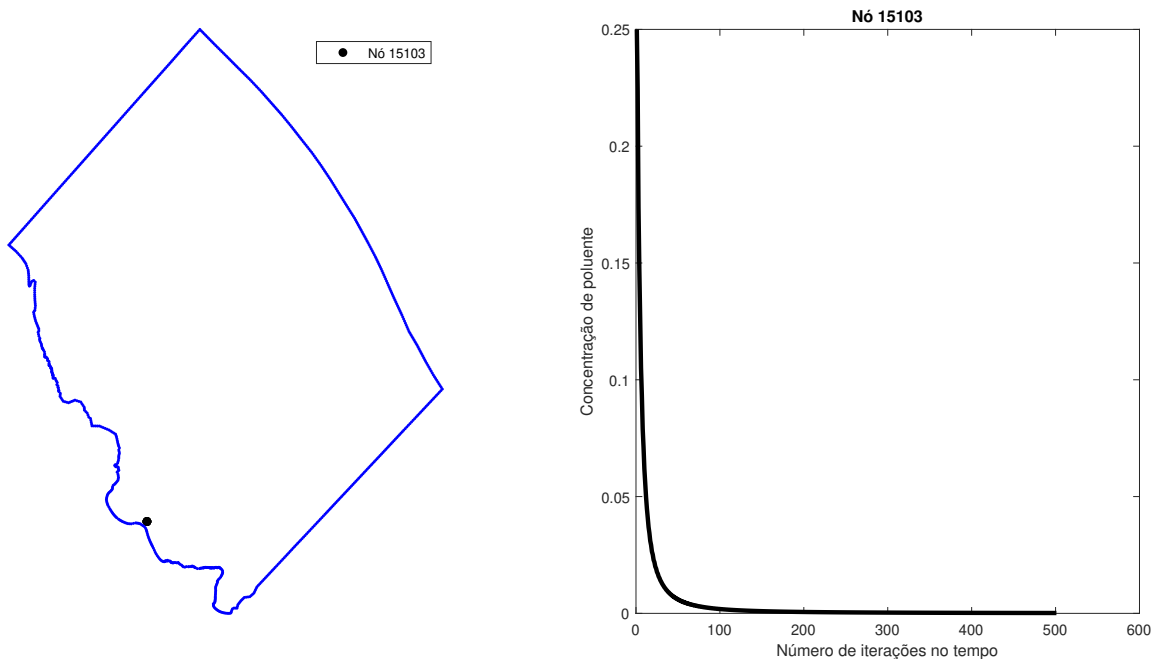
Figura 3: Evolução da dispersão do poluente na BSFA



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

Na Figura 3, podemos observar a evolução da dispersão do poluente na BSFA a partir das duas saídas da foz do rio Amazonas. A primeira mancha de poluente encontra-se em um pequeno arquipélago onde fica localizada a ilha de Marajó e a outra no canal do porto de Pará. O algoritmo foi executado com 2500 iterações no tempo, o que equivale a 5 unidades de tempo e os resultados podem ser vistos nos gráficos através de algumas iterações que foram armazenadas.

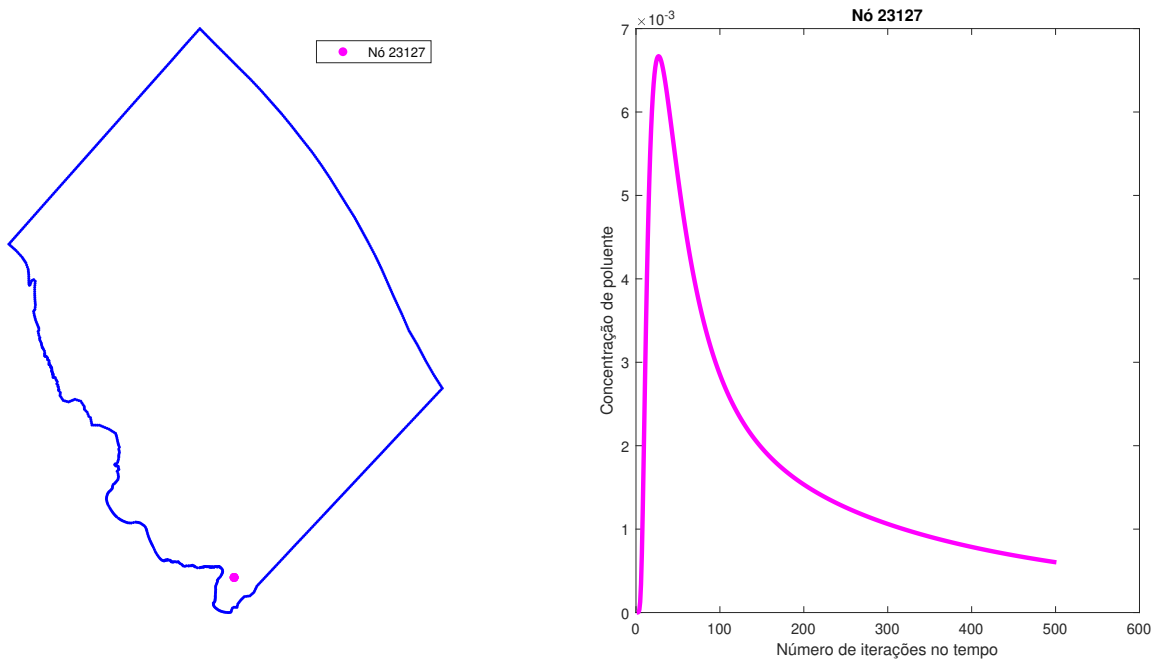
Figura 4: Localização e análise do poluente do ponto 15103



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

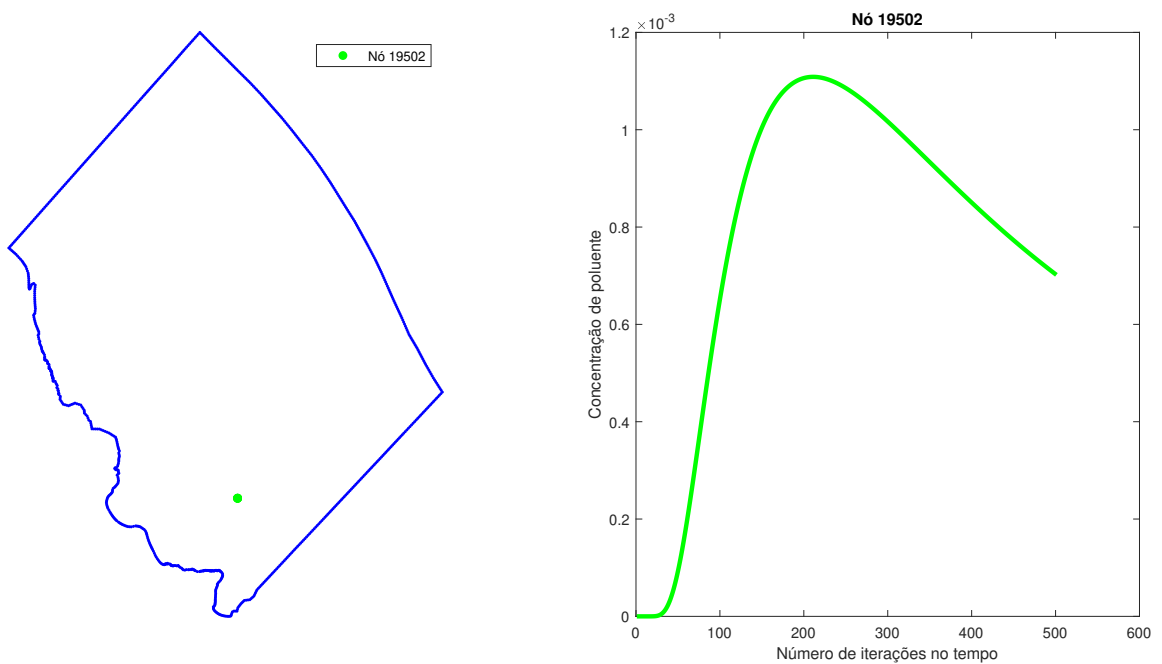


Figura 5: Localização e análise do poluente do ponto 23127



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

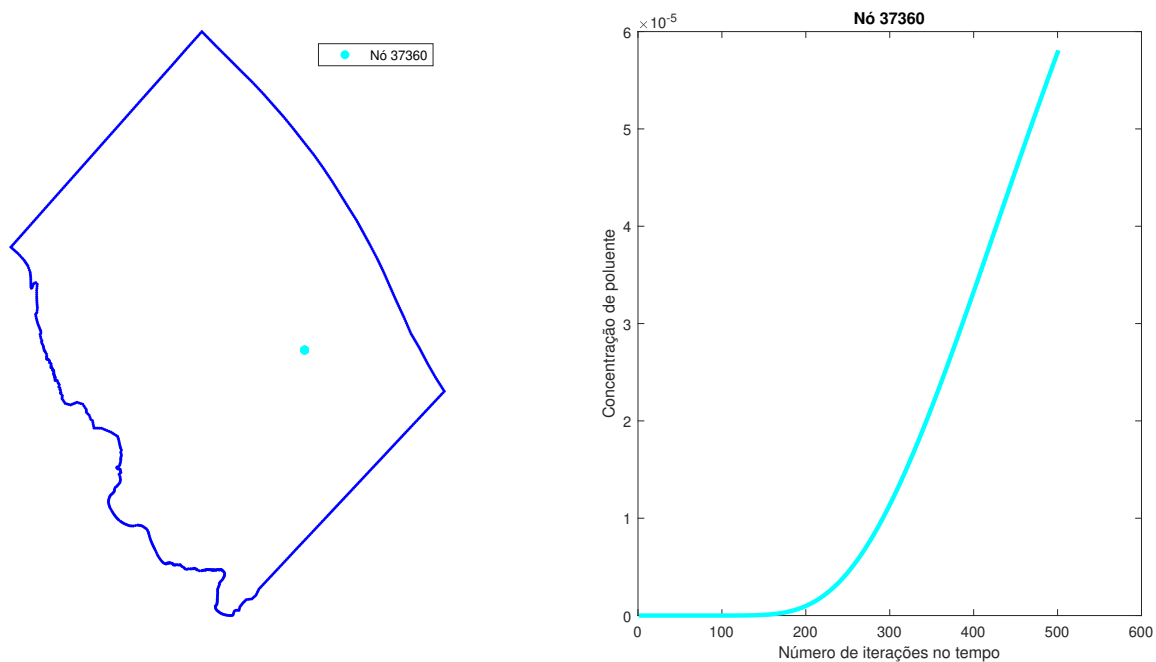
Figura 6: Localização e análise do poluente do ponto 19502



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

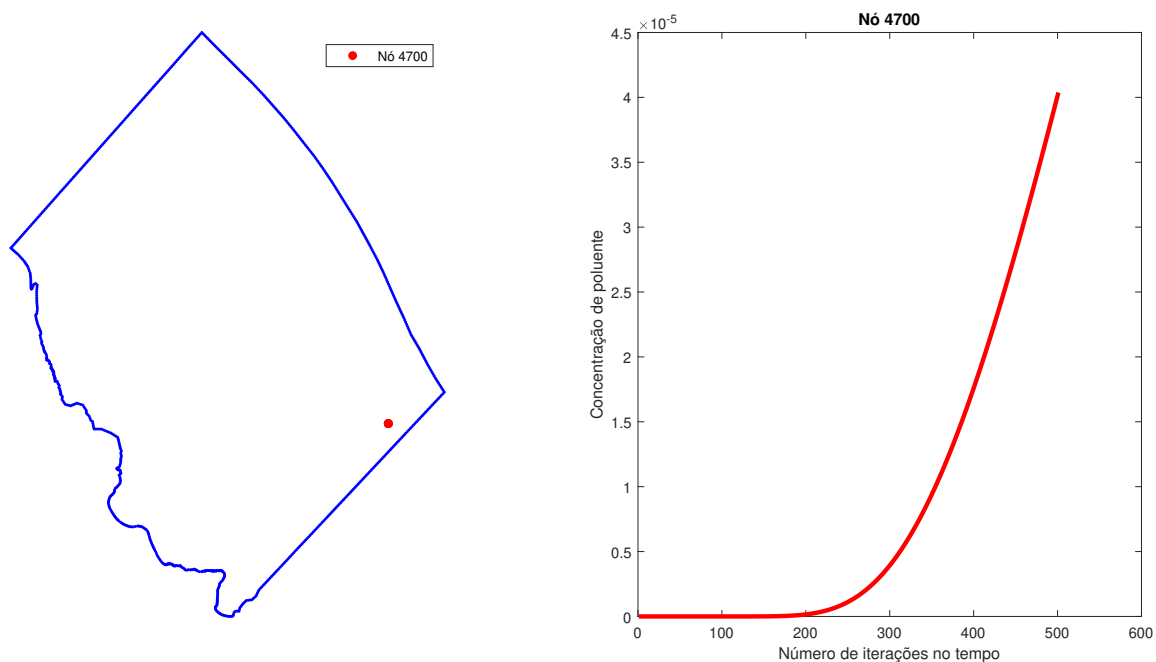


Figura 7: Localização e análise do poluente do ponto 37360



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

Figura 8: Localização e análise do poluente do ponto 4700



Fonte: Desenvolvido pelos autores no *software Matlab*.



Nas Figuras 4 e 5, temos os gráficos dos pontos 15103 e 23127, respectivamente. Estes pontos estão localizados nas regiões onde o poluente se concentra inicialmente, observe que há um rápido decaimento na concentração. A ausência de uma fonte poluente contínua, garante uma difusibilidade e uma degradação moderada sob a influência da circulação das correntes marítimas, que fazem com que a dispersão do material impactante nesse ponto aconteça de forma gradativa.

Na Figura 6, temos o gráfico do ponto 19502, onde não há concentração inicial do poluente. Podemos perceber sua dispersão na região deste ponto quando a curva do gráfico aumenta e logo em seguida diminui demonstrando o comportamento difusivo-advectivo do material impactante tóxico.

Nas Figuras 7 e 8, temos os gráficos dos pontos 37360 e 4700, respectivamente. Estes pontos estão localizados mais distantes das regiões onde se concentram inicialmente as manchas do poluente, neles podemos observar a chegada do material impactante através da curva apresentada no gráfico. Repare que a concentração do poluente demonstram valores menores, isso se dá também pelo fenômeno difusivo-advectivo que nesta região apresentam um maior espalhamento devido ao tempo que o poluente já está presente no local.

As localizações dos pontos foram escolhidas a partir da condição inicial dada pelas duas manchas de poluente definidas na região (conforme Figura 3). A partir disso, foram escolhidos pontos ao acaso com curta, média e longa distância em relação à condição inicial, afim de obter o comportamento em relação a essas distâncias a partir do início da dispersão do poluente.

Nas simulações também realizadas através do *software Matlab* do modelo de migração, as densidades populacionais P_{1_0} e P_{2_0} das duas espécies hipotéticas são consideradas distribuídas de forma homogênea em todo o domínio, respeitando as condições de contorno e assumindo valores pontuais iguais a 1. São apresentados na Tabela 2 os parâmetros considerados nas simulações.

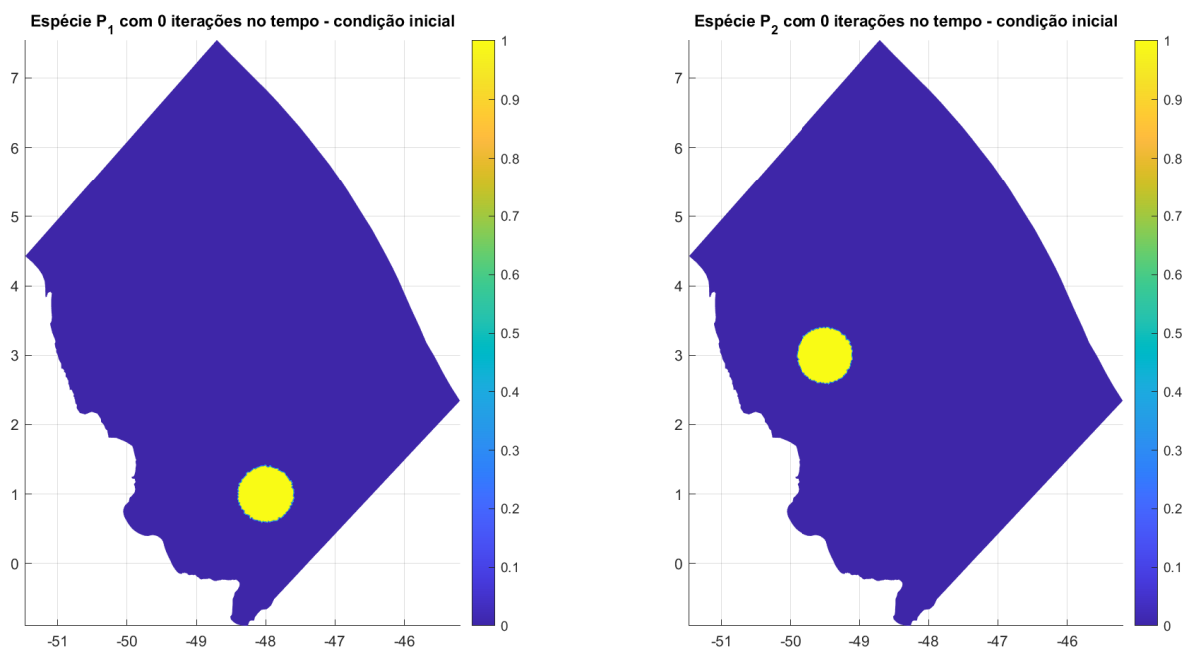
Tabela 2: Parâmetros utilizados na simulação do convívio entre duas espécies competidoras sob o efeito de um poluente na região da BSFA

Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
α_1	0.05	α_2	0.025
U_1	-0.01	W_1	0.01
U_2	0.01	W_2	-0.01
ρ_1	0.05	ρ_2	0.02
δ_1	1.5×10^{-6}	δ_2	1×10^{-6}
a_1	4×10^{-3}	a_2	5×10^{-3}
K	90.000	Δt	0.25

Fonte: Elaborada pelos autores.

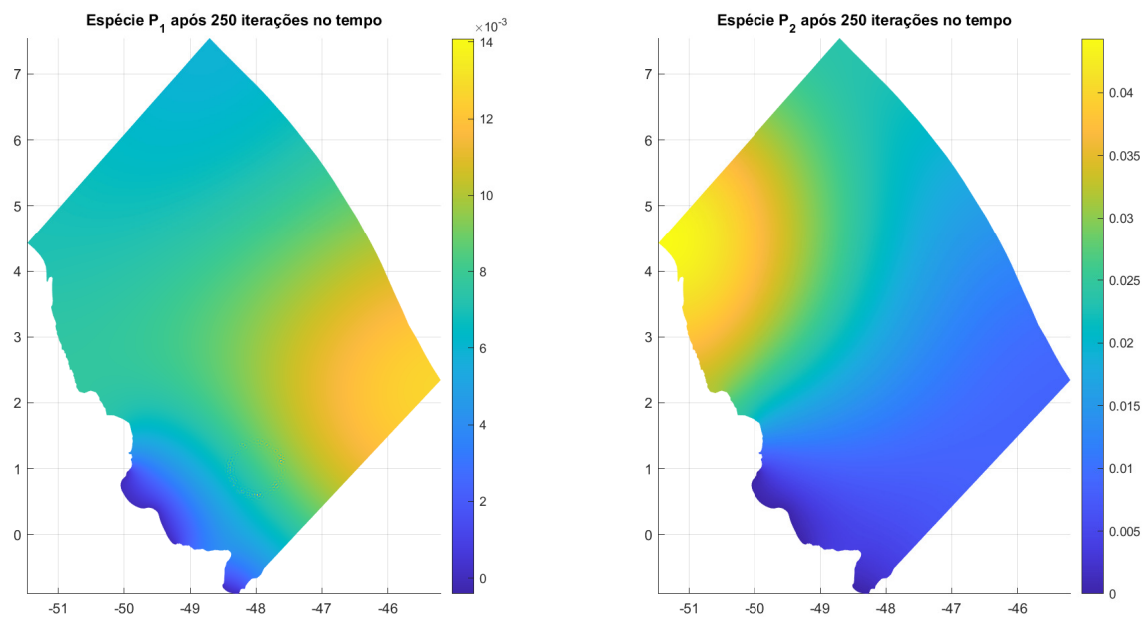


Figura 9: Distribuição das densidades populacionais das duas espécies na BSFA concentradas nas condições iniciais determinadas hipoteticamente



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

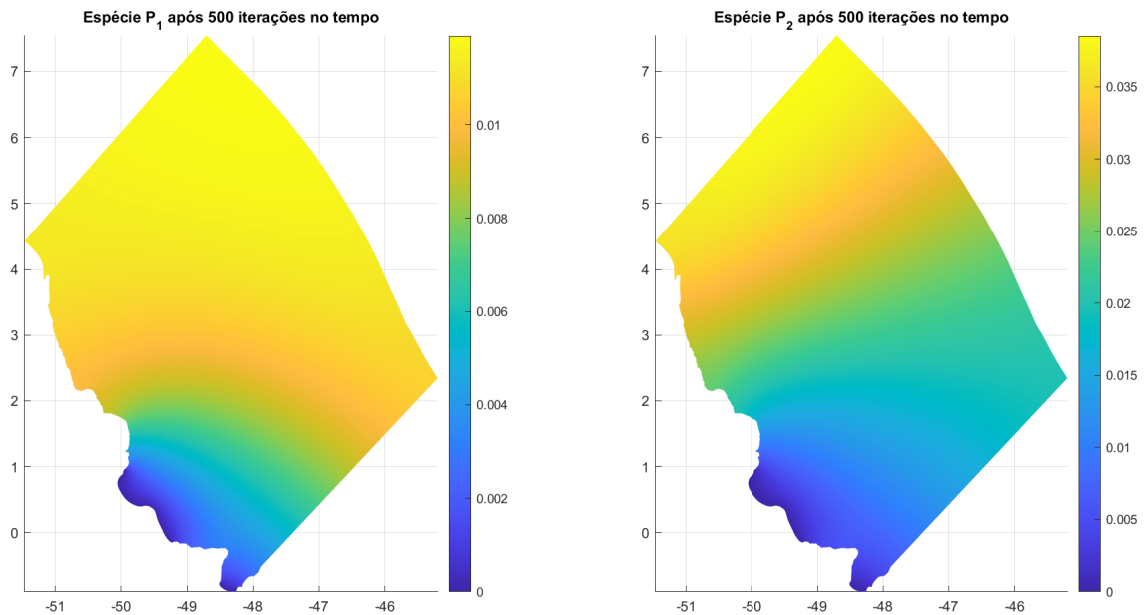
Figura 10: Distribuição das densidades populacionais das duas espécies na BSFA após 250 iterações no tempo, o que corresponde a $t = 62,5$ unidades de tempo



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.



Figura 11: Distribuição das densidades populacionais das duas espécies na BSFA após 500 iterações no tempo, o que corresponde a $t = 125$ unidades de tempo



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

As Figuras 9, 10 e 11 representam dados significativos sobre as distribuições das densidades populacionais das espécies P_1 e P_2 em resposta ao efeito de um poluente ao longo do tempo. A análise dessas figuras revela *insights* importantes sobre como o poluente impacta essas populações e como elas evoluem ao longo de 500 iterações, correspondendo a um tempo final de 125 unidades de tempo.

Primeiramente, as figuras apresentam uma variação considerável nas distribuições das densidades populacionais ao longo do tempo. Isso sugere que o poluente em questão tem um impacto dinâmico e significativo nas espécies P_1 e P_2 , levando a mudanças substanciais em suas populações ao longo das iterações.

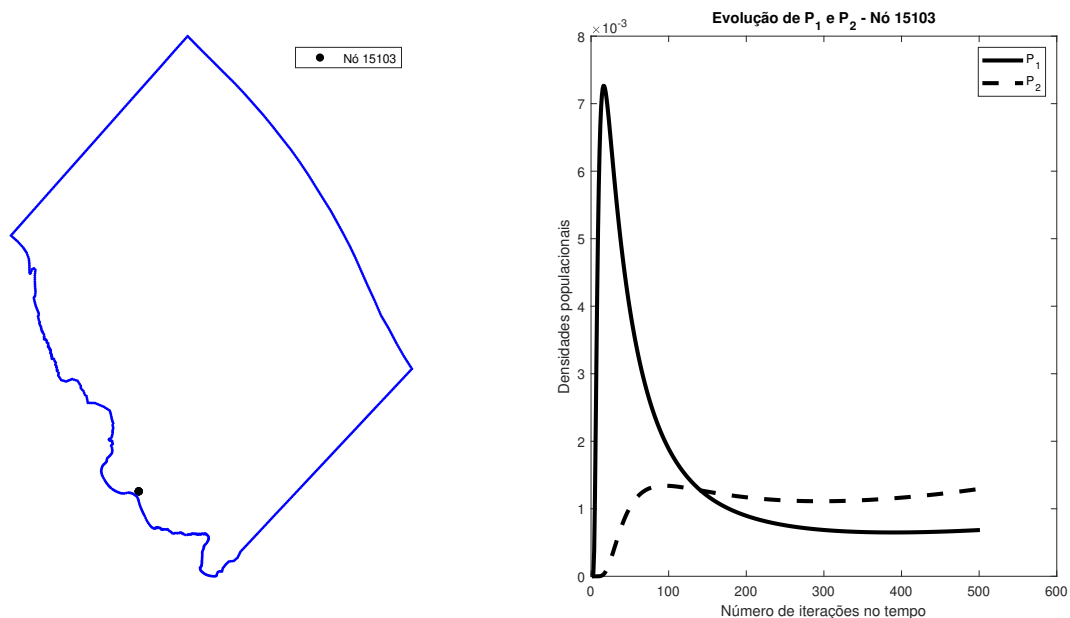
Além disso, é possível observar que há padrões discerníveis nessas distribuições ao longo do tempo. Por exemplo, há períodos de aumento ou diminuição das populações em determinadas regiões do domínio em resposta direta ao aumento ou redução da concentração do poluente. Esses padrões fornecem *insights* sobre a relação causa-efeito entre o poluente e as populações das espécies estudadas.

Outro aspecto a considerar é que há diferenças significativas nas respostas das espécies P_1 e P_2 ao poluente. Por exemplo, a espécie P_2 é mais resiliente e capaz de se adaptar melhor às condições



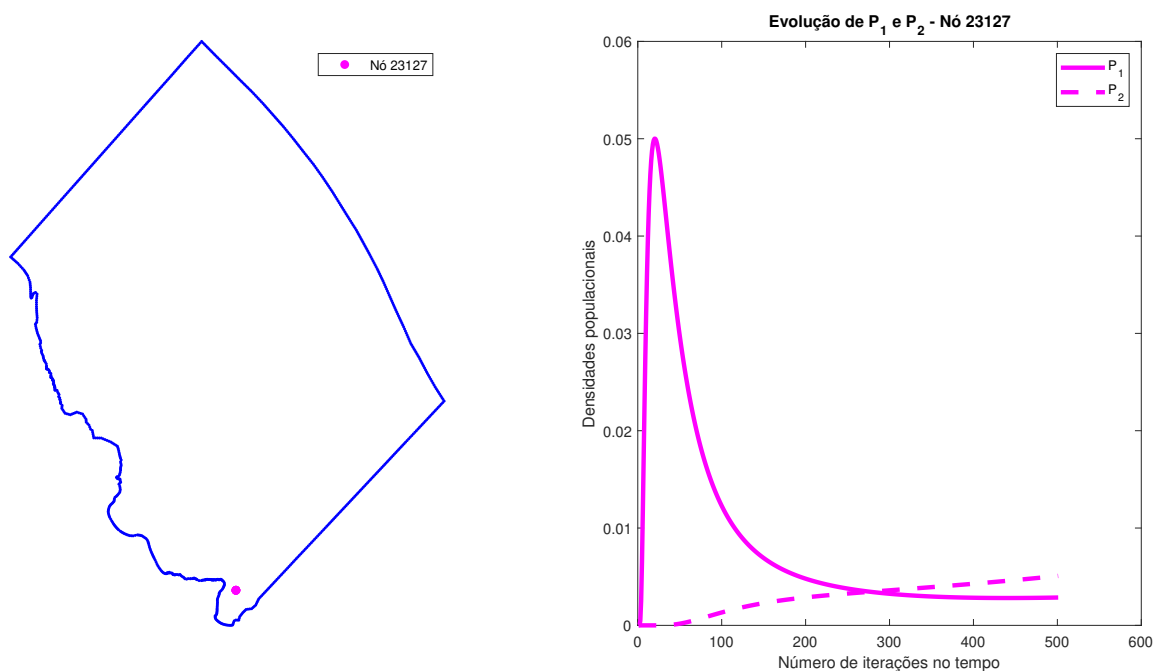
poluídas, enquanto P_1 é mais sensível e sofre uma redução mais acentuada em sua população, o que condiz com os parâmetros adotados nas simulações, já que $\rho_2 < \rho_1$.

Figura 12: Localização e análise das migrações populacionais no ponto 15103



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

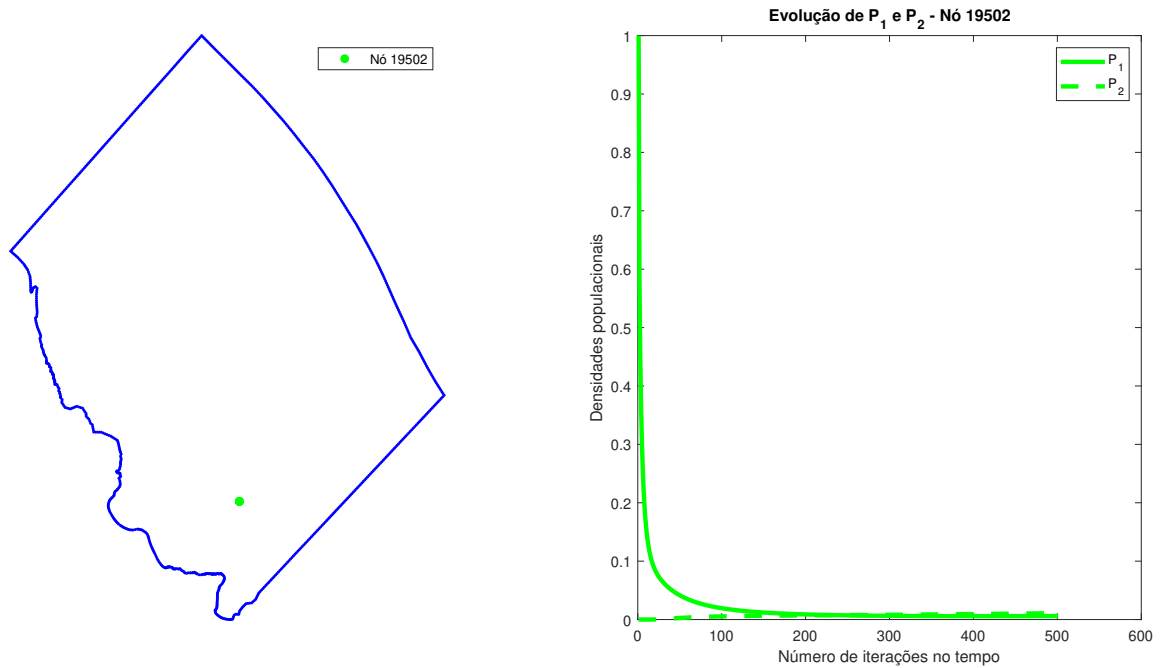
Figura 13: Localização e análise das migrações populacionais no ponto 23127



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

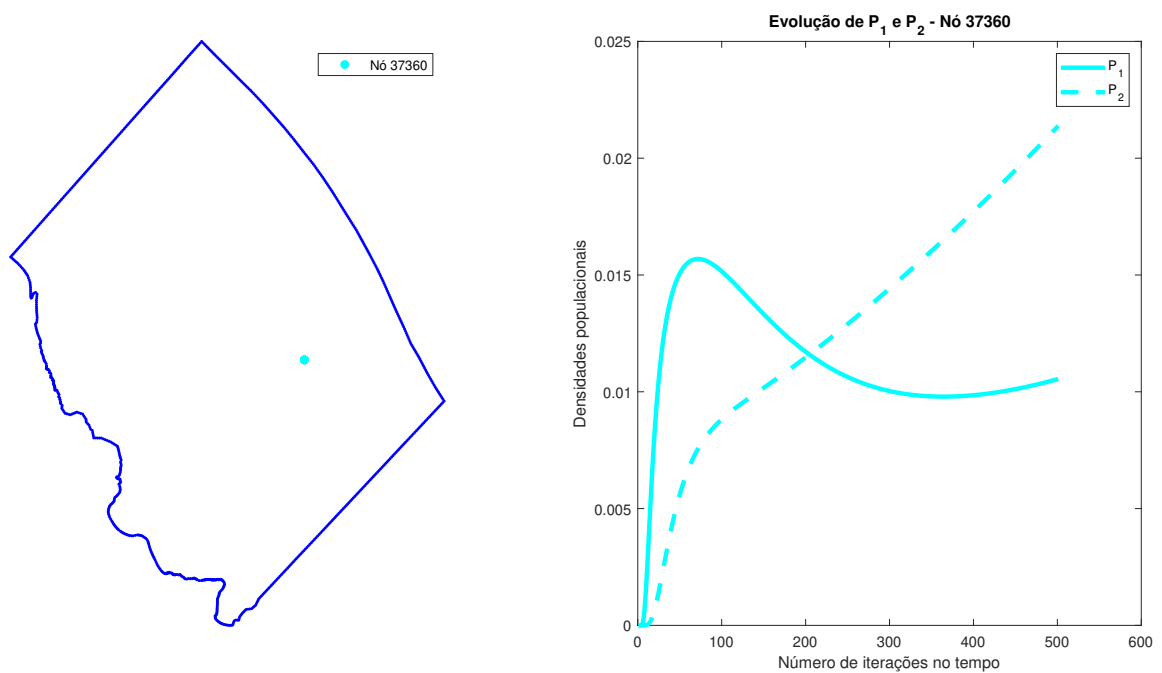


Figura 14: Localização e análise das migrações populacionais no ponto 19502



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

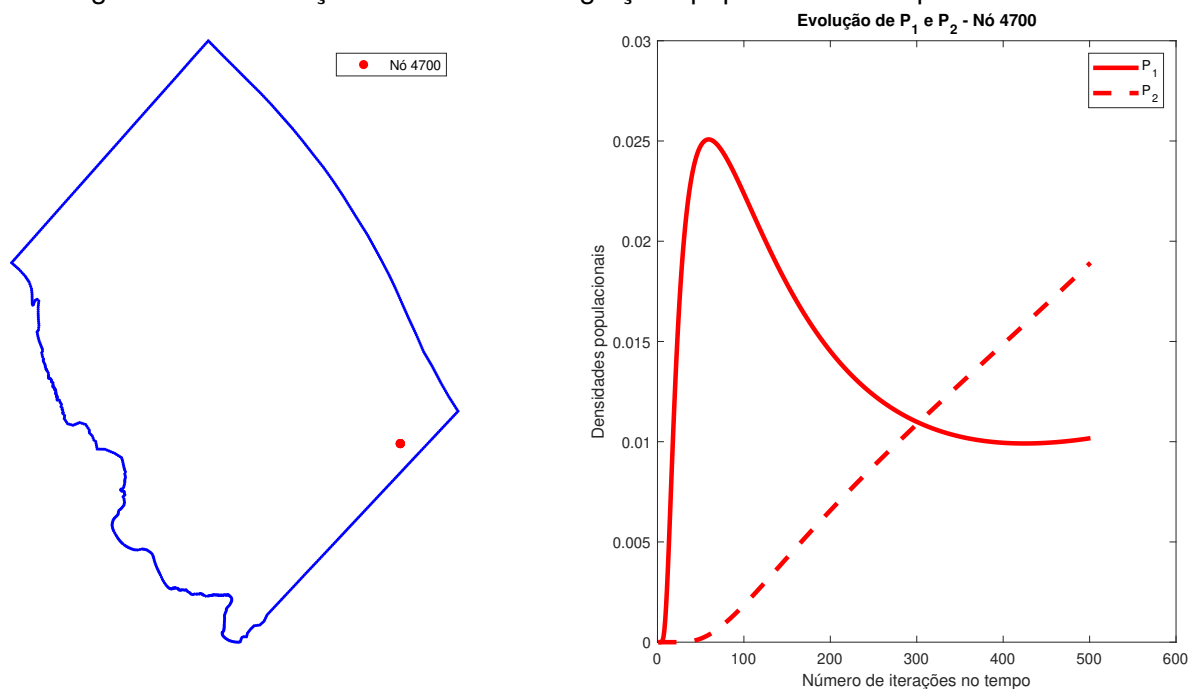
Figura 15: Localização e análise das migrações populacionais no ponto 37360



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.



Figura 16: Localização e análise das migrações populacionais no ponto 4700



Fonte: Elaborada pelos autores no *software Matlab*.

As Figuras 12, 13, 14, 15 e 16 fornecem uma análise detalhada dos pontos escolhidos para estudar a evolução do crescimento populacional das espécies P_1 e P_2 sob a influência de um poluente, considerando também a competição interespecífica entre elas a cada etapa temporal.

Ao analisar essas figuras, é possível observar como os pontos escolhidos representam diferentes cenários ou condições em relação ao poluente e à competição entre as espécies. Por exemplo, há pontos onde o poluente está presente em níveis elevados, enquanto em outros pontos os níveis de poluição são mais baixos (conforme Figuras 4, 5, 6, 7 e 8). Isso permite uma comparação direta dos efeitos do poluente no crescimento populacional das espécies em diferentes condições ambientais.

Além disso, é possível observar que a presença de uma espécie afeta diretamente o crescimento da outra espécie em cada ponto analisado. Por exemplo, em áreas onde as duas espécies competem diretamente por recursos, há uma redução no crescimento populacional de uma das espécies devido à competição mais intensa.

Outro aspecto a ser considerado é a evolução temporal das populações em cada ponto analisado. É possível observar que há padrões de crescimento, estabilização ou declínio ao longo do tempo e como esses padrões se relacionam com a presença do poluente e a competição entre as espécies. Observe que nas Figuras 15 e 16 esses padrões de crescimento populacional são semelhantes, porém na Figura 16 as densidades populacionais crescem mais rápido devido a concentração de



poluente ser mais baixa (conforme Figura 8).

8 Considerações Finais

No presente trabalho, o método dos elementos finitos, em conjunto com o método de Crank-Nicolson, foi utilizado para estudar o efeito de um poluente nas dinâmicas populacionais de duas espécies em um cenário presa-predador. Os resultados obtidos a partir das simulações numéricas permitiram que algumas considerações finais importantes emergissem.

Primeiramente, os resultados demonstram que a introdução do poluente tem um impacto significativo nas dinâmicas populacionais das espécies envolvidas. Isso foi evidenciado pela alteração nos padrões de crescimento e declínio das populações, bem como pela modificação nas taxas de predação e competição. Além disso, a utilização dos métodos computacionais mencionados permitiu uma análise detalhada e precisa dessas dinâmicas, fornecendo *insights* valiosos sobre como o poluente pode afetar não apenas as populações individuais, mas também as interações ecológicas entre as espécies.

Essas constatações destacam a necessidade contínua de monitoramento e gestão ambiental para minimizar os impactos negativos dos poluentes sobre os ecossistemas e as espécies que deles dependem. Além disso, ressaltam a importância de métodos computacionais consolidados, como o método dos elementos finitos e o método de Crank-Nicolson, na análise e previsão dos efeitos ambientais complexos.

Nesta direção, pretende-se continuar esta pesquisa com dinâmicas populacionais abordando os mesmos métodos estudados, porém realizando uma análise mais detalhada de um modelo presa-predador generalista na BSFA já modelado e apresentar seus resultados numéricos.

Referências

IÓRIO, V. de Magalhães. **EDP: um curso de graduação**. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018. Coleção Matemática Universitária.

KARDESTUNCER, H.; NORRIE, D. H. (ed.). **Finite element handbook**. New York: McGraw-Hill, 1987.

LAGERLOEF, Gary; BONJEAN, Fabrice; DOHAN, Kathleen. **OSCAR third degree resolution ocean surface currents**. 2009. The OSCAR data were obtained from JPL Physical Oceanography Distributed Active Archive Center and developed by Earth Space Research. Disponí-



vel em: http://podaac.jpl.nasa.gov/dataset/OSCAR_L4_OC_third-deg. Acesso em: 21 jan. 2024.

LANDIM, P. M. B. **Introdução aos métodos de estimação espacial para confecção de mapas**. Texto didático 2. Rio Claro: DGA, IGCE, UNESP, 2000. Disponível em: <https://www.sorocaba.unesp.br/Home/Graduacao/EngenhariaAmbienta1/robertowlourenco/dicas-surfer-01.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2024.

LOTKA, A. J. Elements of physical biology. **Nature**, [s. l.], v. 116, p. 461, 1925. DOI: <https://doi.org/10.1038/116461b0>.

MARTINELLI, G. L. **Determinação do fluxo de calor em uma região plana com condições de contorno mistas, utilizando o método de Crank-Nicolson**. Orientador: Vitor José Peetry. 2020. 57 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Campus Chapecó, Chapecó, 2020. Disponível em: <https://rd.uffrs.edu.br/handle/prefix/4711>. Acesso em: 8 jul. 2024.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology**: I. An Introduction. 3. ed. New York: Springer, 2003. v. 17. Interdisciplinary Applied Mathematics.

OLIVEIRA, V. H. M. **Modelagem e simulações numéricas da interação de espécies na presença de um material impactante: o caso do peixe-leão (“Pterois volitans”) no litoral norte brasileiro**. Orientadores: João Frederico da Costa Azevedo Meyer, Daniela Ribeiro Monteiro. 2024. 168 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/15826>. Acesso em: 8 jul. 2024.

SALVATIERRA, M. M. **Modelagem Matemática e simulação computacional da presença de materiais impactantes tóxicos em casos de dinâmica populacional com competição inter e intra-específica**. Orientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer. 2005. 53f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. DOI: <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2005.360544>.

SANTOS, H. S. **Relações ecológicas**. BiologiaNet, 2023. Disponível em: <https://www.biologianet.com/amp/ecologia/relacoes-ecologicas.htm>. Acesso em: 6 ago. 2023.

SKELLAM, J. G. Random dispersal in theoretical populations. **Bulletin of Mathematical Biology**, [s. l.], v. 53, n. 1, p. 135-165, 1991. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0092-8240\(05\)80044-8](https://doi.org/10.1016/S0092-8240(05)80044-8).

SOSSAE, R. C. **A presença evolutiva de um material impactante e seu efeito no transiente populacional de espécies interativas: modelagem e aproximação**. Orientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer. 2003. 98 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. DOI: <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2003.294332>.

VOLTERRA, V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. **Nature**, [s. l.], v. 118, p. 558-560, 1926. DOI: <https://doi.org/10.1038/118558a0>.

