Uma Nova Generalização dos Ternos Pitagóricos

A New Generalization of the Pythagorean Triples

Una Nueva Generalización de las Ternas Pitagóricas

João Francisco da Silva Filho[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Redenção, CE, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-2150-6900, http://lattes.cnpq.br/2272004277387139
Elenitha de Sousa Felix[2]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Redenção, CE, Brasil
https://orcid.org/0009-0009-6237-6242, http://lattes.cnpq.br/7206692720756650

Resumo: Neste trabalho, revisitamos a equação pitagórica e as suas soluções com coordenadas naturais, chamadas de *ternos pitagóricos*, bem como algumas das suas conhecidas generalizações. Para além disso, realizamos um estudo sobre as soluções com coordenadas naturais de uma equação quadrática que estende a equação pitagórica, obtendo expressões que nos permitem caracterizar algebricamente essas soluções e apresentar uma nova generalização dos ternos pitagóricos.

Palavras-chave: equação pitagórica; ternos pitagóricos; generalizações.

Abstract: In this work, we revisit the Pythagorean equation and its solutions with natural coordinates, called *Pythagorean triples*, as well as some of its well-known generalizations. Moreover, we realize a study on the solutions with natural coordinates of a quadratic equation that extends the Pythagorean equation, obtaining expressions that allow us to characterize algebraically these solutions and present a new generalization of the Pythagorean triples.

Keywords: pythagorean equation; pythagorean triples; generalizations.

Resumen: En este trabajo, revisitamos la ecuación pitagórica y sus soluciones con coordenadas naturales, llamadas *ternas pitagóricas*, así como algunas de sus conocidas generalizaciones. Además, realizamos un estudio sobre las soluciones con coordenadas naturales de una ecuación cuadrática que extiende la ecuación pitagórica, obteniendo expresiones que permiten caracterizar algebraicamente esas soluciones y presentar una nueva generalización de las ternas pitagóricas.

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Ciências pela Universidade Regional do Cariri, mestre e doutor em Matemática pela Universidade Federal do Ceará. Docente da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia e Supervisão. **Contato**: joaofilho@unilab.edu.br.

[2]**Currículo sucinto**: Discente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira. Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da UNILAB. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação e Metodologia. **Contato**: elenithasousa@gmail.com.

Palabras clave: ecuación pitagórica; ternas pitagóricas; generalizaciones.

Data de submissão: 30 de janeiro de 2024.

Data de aprovação: 1 de julho de 2024.

1 Introdução

Dizemos que *ternos pitagóricos* são ternos (x, y, z) constituídos por coordenadas pertencente aos naturais que satisfazem a equação quadrática, dada por

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

conhecida por *equação pitagórica* e que pode ser obtida através do famoso Teorema de Pitágoras, pois esta equação é satisfeita pelos comprimentos dos três lados de um mesmo triângulo retângulo (Barbosa, 2006; Muniz Neto, 2013). Dados um terno pitagórico (x, y, z) e um número $k \in \mathbb{N}$, verifica-se direto pela definição que (kx, ky, kz) também é um terno pitagórico e nessas condições, os referidos ternos são ditos *equivalentes*.

Um terno pitagórico é dito *primitivo* se as suas coordenadas são constituídas por naturais primos entre si (ou *relativamente primos*). Na obra *Os Elementos*, Euclides (300 a.C.) obteve uma caracterização dos ternos pitagóricos, mostrando assim uma maneira prática de calculá-los, que evidencia a infinidade de ternos pitagóricos primitivos não equivalentes. Basicamente, Euclides observou que dados $a, b \in \mathbb{N}$ com $a > b$, tem-se que

$$x = a^2 + b^2, \qquad y = a^2 - b^2 \qquad \text{e} \qquad z = 2ab$$

constituem um terno pitagórico e que todos os ternos pitagóricos primitivos podem ser obtidos através dessas expressões (Hefez, 2016).

Diversos trabalhos versam sobre os ternos pitagóricos, podemos mencionar os trabalhos de Rothbart e Pausell (1985) e Rocha (2004) que abordam expressões que nos permitem obter ternos pitagóricos. Em uma outra perspectiva, destaca-se o artigo de Bandeira e Silva Filho (2020) que apresenta um método geométrico para construção de ternos pitagóricos, baseado em construções geométricas elementares. Finalmente, destaca-se ainda o artigo de Maia e Silva Filho (2020) que estabelece uma interessante relação entre ternos pitagóricos e números complexos que possuem partes real e imaginária inteiras.

Neste trabalho, revisitamos algumas generalizações conhecidas da equação pitagórica e dos ternos pitagóricos e inspiradas nelas, apresentamos uma nova generalização dos ternos pitagóricos, através do estudo das soluções com coordenadas naturais de uma equação quadrática que corresponde a um generalização da equação pitagórica. Mais precisamente, vamos obter expressões algébricas que estendem as expressões de Euclides e nos permitem caracterizar algebricamente as soluções com coordenadas naturais da equação quadrática mencionada.

2 Caracterizando os Ternos Pitagóricos

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados preliminares sobre Teoria dos Números, que serão aplicados na obtenção de informações acerca dos ternos pitagóricos e na dedução das expressões de Euclides (300 a.C.), que permitem obter os ternos pitagóricos e caracterizá-los algebricamente. Mais informações sobre o assunto e sobre os resultados aqui apresentados podem ser encontradas em Hefez (2016).

Inicialmente, enunciamos um conhecido resultado devido a Carl Friedrich Gauss (1777–1855) que será usado na demonstração de resultados posteriores.

Lema 2.1 (Gauss)**.** *Dados inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}$ arbitrários, tais que a divide o produto bc e $mdc(a, b) = 1$, então a divide c.*

Demonstração. Pode ser encontrada em Hefez (2016, capítulo 5, p. 82).

Antes de enunciarmos o próximo lema, recordamos a definição de número quadrado perfeito.

Definição 2.2. *Dizemos que $a \in \mathbb{Z}_+$ é um quadrado perfeito se existe $b \in \mathbb{Z}$, tal que $a = b^2$.*

Agora, apresentamos um resultado que pode ser facilmente deduzido como uma aplicação do Teorema Fundamental da Aritmética (Hefez, 2016), conforme exposto a seguir.

Lema 2.3. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ relativamente primos, tais que o produto ab é um quadrado perfeito, então a e b são quadrados perfeitos.*

Demonstração. Inicialmente, observe que o resultado é trivial para os casos em que $a = 1$ ou $b = 1$, portanto vamos admitir que $a, b \in \mathbb{N} - \{1\}$. Por hipótese, tem-se que ab é quadrado perfeito e assim

$$ab = c^2,$$

para algum $c \in \mathbb{N} - \{1\}$. Usando o Teorema Fundamental da Aritmética (Hefez, 2016, p. 123), obtemos

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}, \quad b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_n^{\beta_n} \quad \text{e} \quad c = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \cdots r_l^{\gamma_l}, \tag{1}$$

onde $p_i, \alpha_i, q_j, \beta_j, r_k, \gamma_k \in \mathbb{N}$ com p_i, q_j e r_k primos ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq l$).

Combinando as duas últimas igualdades, vamos ter

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_n^{\beta_n} = r_1^{2\gamma_1} r_2^{2\gamma_2} \cdots r_l^{2\gamma_l},$$

porém os naturais a e b não possuem nenhum fator primo comum por serem relativamente primos, então segue-se da unicidade garantida pelo Teorema Fundamental da Aritmética que $l = m + n$, consequentemente os expoentes de a e b nas decomposições constantes em (1) são todos pares.

Diante do exposto, podemos adotar as notações

$$\alpha_i' = \frac{\alpha_i}{2} \quad \text{e} \quad \beta_j' = \frac{\beta_j}{2},$$

para índices $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, implicando que

$$a = \left(p_1^{\alpha_1'} p_2^{\alpha_2'} \cdots p_m^{\alpha_m'}\right)^2 \quad \text{e} \quad b = \left(q_1^{\beta_1'} q_2^{\beta_2'} \cdots q_n^{\beta_n'}\right),$$

concluindo assim que a e b são quadrados perfeitos. □

Nesse momento, enunciamos um conhecido resultado sobre ternos pitagóricos primitivos com ênfase em relações existentes entre as suas coordenadas, que nos auxiliam na dedução das expressões de Euclides.

Proposição 2.4. *Seja (x, y, z) um terno pitagórico primitivo, então valem as afirmações:*

(a) x*,* y *e* z *são dois a dois relativamente primos;*

(b) y *e* z *possuem paridades distintas.*

Demonstração. Faremos a demonstração de cada item separadamente:

(a) Suponha por contradição que x, y e z não são dois a dois relativamente primos, então existe um número primo $p \in \mathbb{N}$ que divide dois desses números, implicando pelo Lema 2.1 e pela relação

$$x^2 = y^2 + z^2, \tag{2}$$

que p divide os três números e isso contradiz o fato de (x, y, z) ser primitivo.

SILVA FILHO, João Francisco da; FELIX, Elenitha de Sousa. Uma Nova Generalização dos Ternos Pitagóricos. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3009, 24 de novembro de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7083.

(b) Suponha por absurdo que y e z possuem mesma paridade, então ambos não podem ser pares, pois isso implicaria que x também é par, contradizendo assim a hipótese de que (x, y, z) é primitivo. Se y e z são impares, segue-se que x é par e podemos escrever

$$x = 2q_0, \quad y = 2q_1 + 1 \quad \text{e} \quad z = 2q_2 + 1,$$

com $q_0, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$. Nessas condições, obtemos da relação (2) que

$$4q_0^2 = (2q_1 + 1)^2 + (2q_2 + 1)^2 = 4(q_1^2 + q_2^2 + q_1 + q_2) + 2,$$

portanto 4 divide 2, chegando novamente a uma contradição. □

Finalmente, vamos deduzir uma conhecida caracterização algébrica dos ternos pitagóricos que nos remete às expressões de Euclides.

Proposição 2.5. *Dado um terno pitagórico (x, y, z) arbitrário, podemos expressar suas coordenadas de modo único (a menos de ordem das segunda e terceira coordenadas) na forma*

$$x = k(a^2 + b^2), \quad y = k(a^2 - b^2) \quad \text{e} \quad z = 2kab,$$

onde $a, b, k \in \mathbb{N}$ com a e b relativamente primos de paridades distintas, tais que $a > b$.

Demonstração. Inicialmente, denote $k = mdc(x, y, z)$ e considere os números naturais, dados por

$$x_0 = \frac{x}{k}, \qquad y_0 = \frac{y}{k} \qquad \text{e} \qquad z_0 = \frac{z}{k}, \tag{3}$$

em particular, verifica-se diretamente que

$$x_0^2 = y_0^2 + z_0^2,$$

logo (x_0, y_0, z_0) é um terno pitagórico primitivo.

Diante da Proposição 2.4(b) e da última igualdade, podemos admitir x_0 e y_0 impares e z_0 par, bem como obter a relação

$$x_0^2 - y_0^2 = z_0^2,$$

que pode ser reescrita na forma

$$\left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right)\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right) = \left(\frac{z_0}{2}\right)^2, \tag{4}$$

observando ainda que $\dfrac{x_0 + y_0}{2}$, $\dfrac{x_0 - y_0}{2}$ e $\dfrac{z_0}{2}$ são naturais.

Adotando a notação $d = mdc\left(\frac{x_0+y_0}{2}, \frac{x_0-y_0}{2}\right)$, vamos ter

$$md = \frac{x_0+y_0}{2} \quad \text{e} \quad nd = \frac{x_0-y_0}{2},$$

para alguns $m, n \in \mathbb{N}$. Decorre das relações imediatamente anteriores que

$$(m+n)d = \frac{x_0+y_0}{2} + \frac{x_0-y_0}{2} = x_0 \qquad \text{e} \qquad (m-n)d = \frac{x_0+y_0}{2} - \frac{x_0-y_0}{2} = y_0,$$

portanto segue da Proposição 2.4(a) que $d = 1$, ou ainda, $\frac{x_0+y_0}{2}$ e $\frac{x_0-y_0}{2}$ são relativamente primos.

Aplicando os Lemas 2.1 e 2.3 à igualdade (4), deduzimos que $\frac{x_0+y_0}{2} = a^2$ e $\frac{x_0-y_0}{2} = b^2$, consequentemente,

$$x_0 = a^2 + b^2, \qquad y_0 = a^2 - b^2 \qquad \text{e} \qquad z_0 = 2ab,$$

onde $a, b \in \mathbb{N}$ são naturais relativamente primos. Finalmente, basta combinar as expressões obtidas anteriormente com as relações (3) para concluir a demonstração do resultado. □

Observação 2.6. *Por um cálculo direto, verifica-se que ternos que assumem a forma enunciada na Proposição 2.5 são pitagóricos (Burton, 2011; Hefez, 2016).*

3 Generalizações Conhecidas

Nesta seção, vamos apresentar três generalizações conhecidas da equação pitagórica e dos ternos pitagóricos, descritas em forma de proposições e que motivam os resultados principais do trabalho a serem enunciados na quarta seção. Iniciamos com uma generalização bem simples, contida no resultado a seguir.

Proposição 3.1 (Blez; Silva Filho, 2019, p. 4)**.** *Dado um número $s = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, tem-se para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ que os números inteiros, dados por*

$$x_s = pa^2 + qb^2 \qquad y_s = 2qab \qquad \textit{e} \qquad t_s = pa^2 - qb^2$$

satisfazem a equação quadrática $x^2 = sy^2 + t^2$. Em particular, conclui-se que x_s, y_s e t_s são naturais se, e somente se, valem as desigualdades $ab > 0$ e $sa^2 > b^2 > 0$.

Demonstração. Por um cálculo direto, verifica-se que

$$x_s^2 = (pa^2 + qb^2)^2 = p^2a^4 + q^2b^4 + 2pqa^2b^2,$$

ou ainda,

$$x_s^2 = s(2qab)^2 + (pa^2 - qb^2)^2 = sy_s^2 + t_s^2,$$

portanto $x_s = pa^2 + qb^2$, $y_s = 2qab$ e $t_s = pa^2 - qb^2$ satisfazem a equação quadrática $x^2 = sy^2 + t^2$.

Por outro lado, admitindo que x_s, y_s e t_s são naturais, obtemos

$$pa^2 + qb^2 > 0, \qquad qab > 0 \qquad \text{e} \qquad pa^2 - qb^2 > 0,$$

consequentemente,

$$ab > 0 \qquad \text{e} \qquad sa^2 > b^2 > 0,$$

visto que $s = \dfrac{p}{q}$ e $q \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, observa-se que se $ab > 0$ e $sa^2 > b^2 > 0$, então

$$y_s = 2qab > 0 \qquad \text{e} \qquad t_s = q(sa^2 - b^2) > 0,$$

enquanto isso,

$$x_s = pa^2 + qb^2 = t_s + 2qb^2 > 0,$$

implicando que x_s, y_s e t_s são naturais e concluindo a demonstração. $\square$

Na sequência, apresentamos mais uma generalização da equação pitagórica e dos ternos pitagóricos constante no trabalho de Blez e Silva Filho (2019).

Proposição 3.2 (Blez; Silva Filho, 2019, p. 5)**.** *Considere* $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *com* $|r| < 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então para quaisquer* $a, b \in \mathbb{N}$ *satisfazendo* $b > (1-r)a$*, tem-se que*

$$x_r = (n^2 - m^2)a^2 + n^2b^2, \qquad y_r = 2n^2ab \qquad \text{e} \qquad z_r = (ma + nb)^2 - n^2a^2$$

são números naturais que satisfazem a equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$.

Demonstração. Inicialmente, reescrevemos a equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$ como

$$x^2 = (1 - r^2)y^2 + (ry - z)^2,$$

ou equivalentemente,

$$x^2 = sy^2 + t^2, \tag{5}$$

onde $s = 1 - r^2$ e $t = ry - z$.

Além disso, observa-se que

$$s = \frac{n^2 - m^2}{n^2},$$

então segue-se da Proposição 3.1 que

$$x_r = (n^2 - m^2)a^2 + n^2b^2, \qquad y_r = 2n^2ab \qquad \text{e} \qquad t_r = (n^2 - m^2)a^2 - n^2b^2$$

satisfazem a equação quadrática (5).

Recordando a substituição $t = ry - z$, vamos ter

$$ry_r - z_r = t_r = (n^2 - m^2)a^2 - n^2b^2,$$

no entanto $y_r = 2n^2ab$ e assim $z_r = (ma + nb)^2 - n^2a^2$. Diante do exposto, conclui-se que

$$x_r = (n^2 - m^2)a^2 + n^2b^2, \qquad y_r = 2n^2ab \qquad \text{e} \qquad z_r = (ma + nb)^2 - n^2a^2$$

são números inteiros que satisfazem a equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$.

Sabendo que $|r| < 1$, segue-se que $n^2 > m^2$ e assim

$$x_r = (n^2 - m^2)a^2 + n^2b^2 > 0 \qquad \text{e} \qquad y_r = 2n^2ab > 0,$$

enquanto a condição $b > (1 - r)\,a$ equivale a $b + ra > a$ e implica que

$$z_r = (ma + nb)^2 - n^2a^2 = n^2[(ra + b)^2 - a^2] > 0,$$

portanto x_r, y_r e z_r são naturais que satisfazem a equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$. □

Finalmente, apresentamos um resultado que fornece uma generalização bem intuitiva da equação pitagórica e dos ternos pitagóricos, cuja demonstração pode ser deduzida diretamente de uma identidade que encontra-se em Burton (2011, capítulo 13, p. 280).

Proposição 3.3. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ *arbitrários com* $n \geq 2$ *e* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 > a_n^2$, *então*

$$x_1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2, \qquad x_2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - a_n^2,$$
$$x_3 = 2a_1a_n, \quad x_4 = 2a_2a_n, \quad \ldots \quad, x_n = 2a_{n-2}a_n \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 2a_{n-1}a_n$$

são naturais que satisfazem a equação quadrática $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n+1}^2$.

Demonstração. Primeiro, adotamos as notações $\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2$ e $\beta = a_n^2$ para deduzir que

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) + 4\alpha\beta$$

ou ainda,

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta,$$

visto que $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2$.

Substituindo as expressões de α e β na última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2)^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - a_n^2)^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2)a_n^2, \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - a_n^2)^2 + (2a_1a_n)^2 + \cdots + (2a_{n-1}a_n)^2,\end{aligned}$$

donde concluímos que $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n+1}^2$, conforme queríamos provar. □

4 Uma Nova Generalização

Nesta seção, apresentamos conceitos preliminares, resultados chave e resultados principais, que consistem no estudo das soluções com coordenadas naturais de uma equação quadrática que generaliza a equação pitagórica e nos permite obter uma nova generalização dos ternos pitagóricos, culminando com aplicação dos resultados principais na resolução de exemplos.

4.1 Conceitos Preliminares e Resultados Chave

Inicialmente, vamos introduzir uma definição que generaliza os ternos pitagóricos de maneira bastante intuitiva.

Definição 4.1. *Dizemos que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ $(n \geq 3)$ é pitagórico (ou uma n-úpla pitagórica) quando verifica-se que as suas coordenadas satisfazem a igualdade $x_1^2 + \cdots + x_r^2 = x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2$, para algum $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.*

Observação 4.2. *No contexto da Definição 4.1, dizemos que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ é pitagórico trivial (ou n-úpla pitagórica trivial) se é pitagórico e suas coordenadas são todas iguais.*

Para ilustrar a Definição 4.1, apresentamos alguns exemplos de fácil verificação.

Exemplo 4.3. $(7, 3, 6, 2) \in \mathbb{N}^4$ *é pitagórico, pois satisfaz* $7^2 = 3^2 + 6^2 + 2^2$.

SILVA FILHO, João Francisco da; FELIX, Elenitha de Sousa. Uma Nova Generalização dos Ternos Pitagóricos. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3009, 24 de novembro de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7083.

Exemplo 4.4. $(7, 1, 5, 4, 3) \in \mathbb{N}^5$ *é pitagórico, visto que* $7^2 + 1^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2$.

Exemplo 4.5. $(5, 29, 21, 3, 4, 20) \in \mathbb{N}^6$ *é pitagórico, pois satisfaz* $5^2 + 29^2 = 21^2 + 3^2 + 4^2 + 20^2$.

Exemplo 4.6. $(17, 7, 1, 15, 5, 8, 3, 4) \in \mathbb{N}^8$ *é pitagórico, visto que* $17^2 + 7^2 + 1^2 = 15^2 + 5^2 + 8^2 + 3^2 + 4^2$.

Na sequência, enunciamos um resultado que contém propriedades das n-úplas pitagóricas.

Proposição 4.7. *Sejam* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \, (n \geq 3)$ *e* $\lambda \in \mathbb{N}$ *arbitrários, então valem as afirmações:*

(a) x *é pitagórico se, e somente se,* λx *é pitagórico.*

(b) *Se* x *é pitagórico com* $x_1^2 + \cdots + x_r^2 = x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2$, *então também é pitagórico o elemento*

$$(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(r)}, x_{\tau(r+1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) \in \mathbb{N}^n,$$

onde $\sigma : \{1, 2, \ldots, r\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$ *e* $\tau : \{r+1, r+2, \ldots, n\} \to \{r+1, r+2, \ldots, n\}$ *são permutações.*

Demonstração. Faremos a prova de cada item separadamente:

(a) Denote $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e admita que este é pitagórico, então

$$x_1^2 + \cdots + x_r^2 = x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

para algum $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Dessa forma, segue-se que

$$(\lambda x_1)^2 + \cdots + (\lambda x_r)^2 = (\lambda x_{r+1})^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2,$$

portanto λx é pitagórico.

De forma recíproca, admitindo que λx é pitagórico, vamos ter

$$(\lambda x_1)^2 + \cdots + (\lambda x_r)^2 = (\lambda x_{r+1})^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2,$$

implicando que $x_1^2 + \cdots + x_r^2 = x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2$, que significa afirmar que x é pitagórico.

(b) Desde que σ e τ são permutações, tem-se que

$$\begin{aligned} x_{\sigma(1)}^2 + \cdots + x_{\sigma(r)}^2 &= x_1^2 + \cdots + x_r^2 \\ &= x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2 \\ &= x_{\sigma(r+1)}^2 + \cdots + x_{\sigma(n)}^2, \end{aligned}$$

portanto $(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(r)}, x_{\tau(r+1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) \in \mathbb{N}^n$ é pitagórico. $\square$

Em analogia à noção de ternos pitagóricos primitivos, apresentamos a definição a seguir.

Definição 4.8. *Dizemos que $x \in \mathbb{N}^n$ é uma n-úpla pitagórica primitiva se suas coordenadas são formadas por naturais relativamente primos.*

Motivados pela Proposição 4.7, introduzimos mais uma definição sobre n-úplas pitagóricas.

Definição 4.9. *Dizemos que $x, y \in \mathbb{N}^n$ são n-úplas pitagóricas equivalentes se existe $\lambda \in \mathbb{N}$, tal que $\lambda x = y$ ou $x = \lambda y$.*

Diante das considerações realizadas, observa-se que o problema de obter n-úplas pitagóricas resume-se a estudar soluções com coordenadas naturais da equação quadrática

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = x_{m+2}^2 + x_{m+3}^2 + \cdots + x_n^2,$$

que pode ser reescrita na forma

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2, \tag{6}$$

onde $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ satisfazem a igualdade $m + k = n - 2$.

Desde que a equação quadrática (6) corresponde à equação pitagórica para $k = 0$ e $m = 1$, então introduzimos a definição a seguir.

Definição 4.10. *Dados números $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ com $m + k \geq 1$, dizemos que:*

(a) *Toda equação quadrática do tipo $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2$ é uma equação pitagórica generalizada.*

(b) *Supondo $m = k$ na equação do item (a), então uma solução com coordenadas naturais iguais é chamada de solução trivial.*

4.2 Resultados Principais

Nesta seção, apresentamos os resultados principais do trabalho, que fornecem expressões para determinar e caracterizar soluções nos naturais para as equações pitagóricas generalizadas. Em outras palavras, os referidos resultados nos permitem determinar e caracterizar algebricamente as n-úplas pitagóricas.

Nosso primeiro teorema fornece expressões que permitem obter soluções nos naturais de equações pitagóricas generalizadas. No intuito de simplificar as notações, vamos adotar $|\cdot|$ para representar a norma usual do espaço Euclidiano.

Teorema 4.11. *Sejam* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{N}^m$ *e* $c \in \mathbb{N}$ *com* $|a|^2 > |b|^2 + c^2$, *então os números naturais, dados por*

$$x_i = \begin{cases} |a|^2 - |b|^2 + c^2, & \textit{se} \quad i = 1 \\ 2b_{i-1}c, & \textit{se} \quad 2 \leq i \leq m+1 \end{cases} \quad \textit{e} \quad y_j = \begin{cases} |a|^2 - |b|^2 - c^2, & \textit{se} \quad j = 1 \\ 2a_{j-1}c, & \textit{se} \quad 2 \leq j \leq k+1 \end{cases}$$

satisfazem a equação quadrática $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2$.

Demonstração. Fazendo um cálculo direto, observa-se que

$$(|a|^2 - |b|^2 + c^2)^2 = (|a|^2 - |b|^2)^2 + 2(|a|^2 - |b|^2)c^2 + c^4,$$

então somamos e subtraímos $4(|a|^2 - |b|^2)c^2$ no segundo membro, obtendo

$$(|a|^2 - |b|^2 + c^2)^2 = [(|a|^2 - |b|^2)^2 - 2(|a|^2 - |b|^2)c^2 + c^4] + 4(|a|^2 - |b|^2)c^2,$$

onde $|a| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_k^2}$ e $|b| = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_m^2}$ com $k, m \in \mathbb{N}$ arbitrários.

Por outro lado, podemos escrever

$$(|a|^2 - |b|^2)^2 - 2(|a|^2 - |b|^2)c^2 + c^4 = (|a|^2 - |b|^2 - c^2)^2,$$

que substituída na igualdade anterior nos fornece

$$(|a|^2 - |b|^2 + c^2)^2 = (|a|^2 - |b|^2 - c^2)^2 + 4(|a|^2 - |b|^2)c^2.$$

Reorganizando os termos da última igualdade, chegamos em

$$(|a|^2 - |b|^2 + c^2)^2 + 4|b|^2c^2 = (|a|^2 - |b|^2 - c^2)^2 + 4|a|^2c^2,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} & (|a|^2 - |b|^2 + c^2)^2 + (2b_1c)^2 + (2b_2c)^2 + \cdots + (2b_mc)^2 \\ = \quad & (|a|^2 - |b|^2 - c^2)^2 + (2a_1c)^2 + (2a_2c)^2 + \cdots + (2a_kc)^2, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Nosso segundo teorema mostra que toda solução não-trivial com coordenadas naturais de equações pitagóricas generalizadas é equivalente a uma solução que pode ser obtida a partir das expressões apresentadas no Teorema 4.11.

Teorema 4.12. *Sejam* $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1} \in \mathbb{N}$ *com* $x_1 > y_1$ *e que satisfazem*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2,$$

então existem $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{N}^m$ *e* $c, \lambda \in \mathbb{N}$*, tais que*

$$\lambda x_i = \begin{cases} |a|^2 - |b|^2 + c^2, & \textit{se} \quad i = 1 \\ 2b_{i-1}c, & \textit{se} \quad 2 \le i \le m+1 \end{cases} \quad \textit{e} \quad \lambda y_j = \begin{cases} |a|^2 - |b|^2 - c^2, & \textit{se} \quad j = 1 \\ 2a_{j-1}c, & \textit{se} \quad 2 \le j \le k+1 \end{cases}.$$

Demonstração. Inicialmente, vamos considerar o número natural $\lambda = 2(x_1 - y_1)$ e assim

$$\lambda x_1 = 2(x_1 - y_1)x_1 = 2x_1^2 - 2x_1y_1 = x_1^2 + x_1^2 - 2x_1y_1,$$

consequentemente,

$$\lambda x_1 = (y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2) - (x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2) + (x_1 - y_1)^2, \tag{7}$$

onde usamos a relação $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2$.

Observe que a igualdade (7) pode ser reescrita na forma

$$\lambda x_1 = |a|^2 - |b|^2 + c^2,$$

onde $a = (y_2, \dots, y_{k+1}) \in \mathbb{N}^k$, $b = (x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{N}^m$ e $c = x_1 - y_1 \in \mathbb{N}$. De modo análogo, obtemos

$$\lambda y_1 = (y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2) - (x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2) - (x_1 - y_1)^2,$$

que equivale a $\lambda y_1 = |a|^2 - |b|^2 - c^2$.

Para concluir a demonstração, verifica-se diretamente que

$$\lambda x_i = 2(x_1 - y_1)x_i = 2b_{i-1}c \quad \text{e} \quad \lambda y_j = 2(x_1 - y_1)y_j = 2a_{j-1}c,$$

onde $i = 2, 3, \dots, m+1$ e $j = 2, 3, \dots, k+1$. □

Observação 4.13. *Em qualquer solução não-trivial com coordenadas naturais da equação quadrática* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2$*, pode-se supor satisfeitas as condições* $m \le k$ *e* $x_1 > y_1$*, bastando (se necessário) reordenar membros e/ou parcelas e renomear as incógnitas.*

Deve-se ainda ressaltar que as soluções em $\mathbb{Z}$ de uma equação pitagórica generalizada podem ser obtidas a partir das soluções em $\mathbb{N}$ desse mesmo tipo de equação. Mais precisamente, observa-se que se $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, y_1, y_2, \dots, y_{k+1} \in \mathbb{Z}$ não são todos nulos e satisfazem

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2,$$

então os módulos $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{m+1}|, |y_1|, |y_2|, \dots, |y_{k+1}| \in \mathbb{Z}_+$ satisfazem a mesma igualdade acima e os elementos não nulos de $C = \{|x_1|, \dots, |x_{m+1}|, |y_1|, \dots, |y_{k+1}|\}$ constituem uma solução em $\mathbb{N}$ de uma equação pitagórica generalizada.

4.3 Aplicação dos Resultados Principais

Na perspectiva de mostrar a praticidade das expressões apresentadas no Teorema 4.11 e a aplicabilidade do Teorema 4.12, nesta última seção, trazemos alguns exemplos que consistem na resolução nos naturais de equações que assumem a forma $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{m+1}^2 = y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{k+1}^2$, adotando a condição $m \leq k$ por mera conveniência.

Diante das considerações iniciais, passamos agora aos exemplos mencionados.

Exemplo 4.14. *Determine uma solução em* $\mathbb{N}$ *para a equação* $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

Solução: Conforme o Teorema 4.11, escolhendo $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$ e $b, c \in \mathbb{N}$ que satisfazem

$$|a|^2 > b^2 + c^2,$$

verifica-se que as expressões

$$x_1 = |a|^2 - |b|^2 + c^2, \quad x_2 = 2bc, \quad y_1 = |a|^2 - |b|^2 - c^2, \quad y_2 = 2a_1c \quad \text{e} \quad y_3 = 2a_2c,$$

determinam soluções em $\mathbb{N}$ da equação em questão.

Em particular, podemos fazer $a = (4, 3)$, $b = 2$ e $c = 1$ para obter

$$x_1 = (4^2 + 3^2) - 2^2 + 1^2 \qquad \text{e} \qquad x_2 = 2 \cdot 2 \cdot 1,$$

bem como,

$$y_1 = (4^2 + 3^2) - 2^2 - 1^2, \qquad y_2 = 2 \cdot 4 \cdot 1 \qquad \text{e} \qquad y_3 = 2 \cdot 3 \cdot 1,$$

que resulta em $x_1 = 22$, $x_2 = 4$, $y_1 = 20$, $y_2 = 8$ e $y_3 = 6$.

Diante dos cálculos realizados, tem-se que os naturais obtidos satisfazem

$$22^2 + 4^2 = 20^2 + 8^2 + 6^2,$$

fornecendo uma solução da equação $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ no conjunto dos números naturais.

Exemplo 4.15. *Obtenha uma solução em* $\mathbb{N}$ *para a equação* $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$.

Solução: Escolhendo $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ e $b, c \in \mathbb{N}$ que satisfazem $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > b^2 + c^2$, decorre do Teorema 4.11 que as expressões

$$x_1 = |a|^2 - |b|^2 + c^2, \quad x_2 = 2bc, \quad y_1 = |a|^2 - |b|^2 - c^2, \quad y_2 = 2a_1c, \quad y_3 = 2a_2c \quad \text{e} \quad y_4 = 2a_3c,$$

determinam soluções em $\mathbb{N}$ da equação em questão.

Nessas condições, fazemos $a = (5, 3, 2)$, $b = 4$ e $c = 1$ para obter

$$x_1 = (5^2 + 3^2 + 2^2) - 4^2 + 1^2, \qquad x_2 = 2 \cdot 4 \cdot 1,$$

bem como,

$$y_1 = (5^2 + 3^2 + 2^2) - 4^2 - 1^2, \quad y_2 = 2 \cdot 5 \cdot 1, \quad y_3 = 2 \cdot 3 \cdot 1 \quad \text{e} \quad y_4 = 2 \cdot 2 \cdot 1,$$

que resulta em $x_1 = 23$, $x_2 = 8$, $y_1 = 21$, $y_2 = 10$, $y_3 = 6$ e $y_4 = 4$.

Finalmente, conclui-se dos valores encontrados que

$$23^2 + 8^2 = 21^2 + 10^2 + 6^2 + 4^2,$$

obtendo assim uma solução da equação $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ no conjunto dos naturais.

Exemplo 4.16. *Calcule uma solução em* $\mathbb{N}$ *da equação* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2$.

Solução: Escolhendo $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{N}^2$ e $c \in \mathbb{N}$, tais que $|a|^2 > |b|^2 + c^2$, segue-se do Teorema 4.11 que as expressões

$$x_1 = |a|^2 - |b|^2 + c^2, \qquad x_2 = 2b_1c, \qquad x_3 = 2b_2c,$$
$$y_1 = |a|^2 - |b|^2 - c^2, \quad y_2 = 2a_1c, \qquad y_3 = 2a_2c, \qquad y_4 = 2a_3c \quad \text{e} \quad y_5 = 2a_4c,$$

determinam soluções em $\mathbb{N}$ da equação em questão.

Fazendo $a = (6, 5, 4, 3)$, $b = (8, 2)$ e $c = 1$, obtemos

$$x_1 = (6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2) - (8^2 + 2^2) + 1^2, \qquad x_2 = 2 \cdot 8 \cdot 1, \qquad x_3 = 2 \cdot 2 \cdot 1,$$

bem como,

$$y_1 = (6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2) - (8^2 + 2^2) - 1^2,\ y_2 = 2 \cdot 6 \cdot 1, \quad y_3 = 2 \cdot 5 \cdot 1, \quad y_4 = 2 \cdot 4 \cdot 1 \text{ e } y_5 = 2 \cdot 3 \cdot 1,$$

que nos fornece $x_1 = 19$, $x_2 = 16$, $x_3 = 4$, $y_1 = 17$, $y_2 = 12$, $y_3 = 10$, $y_4 = 8$ e $y_5 = 6$.

Nessas condições, conclui-se que os valores obtidos satisfazem

$$19^2 + 16^2 + 4^2 = 17^2 + 12^2 + 10^2 + 8^2 + 6^2,$$

correspondendo a uma solução da equação $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2$ no conjunto dos números naturais.

Em contrapartida, observa-se que as expressões do Teorema 4.11 geram soluções com pelo menos $m+k$ coordenadas pares, então os Exemplos 4.4, 4.5 e 4.6 não podem ser obtidos direto dessas expressões. Por essa razão, aplicamos o Teorema 4.12 para mostrar que as soluções desses exemplos são equivalentes a soluções que podem ser obtidas das expressões do Teorema 4.11.

Exemplo 4.17. *Demonstre que* $(7,1,5,4,3) \in \mathbb{N}^5$ *é equivalente a uma solução da equação*

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

que pode ser obtida diretamente pelas expressões do Teorema 4.11.

Solução: Sabendo que as coordenadas de $(7,1,5,4,3)$ satisfazem a igualdade

$$7^2 + 1^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2,$$

então adotamos as notações

$$x_1 = 7, \qquad x_2 = 1, \qquad y_1 = 5, \qquad y_2 = 4 \qquad \text{e} \qquad y_3 = 3,$$

onde a escolha da notação deve observar a condição $x_1 > y_1$.

Conforme a prova do Teorema 4.12, vamos definir $\lambda = 2(7-5) = 4$ e efetuar o produto

$$4 \cdot (7,1,5,4,3) = (28,4,20,16,12),$$

então escolhemos $a = (4,3) \in \mathbb{N}^2$, $b = 1 \in \mathbb{N}$ e $c = 7-5 \in \mathbb{N}$ que satisfazem

$$|a|^2 - |b|^2 + c^2 = 28, \quad 2bc = 4, \quad |a|^2 - |b|^2 - c^2 = 20, \quad 2a_1c = 16 \quad \text{e} \quad 2a_2c = 12,$$

portanto $(7,1,5,4,3)$ é equivalente a $(28,4,20,16,12)$ e este pode ser obtido do Teorema 4.11.

Exemplo 4.18. *Verifique que* $(5,29,21,3,4,20) \in \mathbb{N}^6$ *é equivalente a uma solução da equação*

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2,$$

que pode ser obtida diretamente pelas expressões do Teorema 4.11.

Solução: Sabendo que as coordenadas de $(5,29,21,3,4,20)$ satisfazem a igualdade

$$5^2 + 29^2 = 21^2 + 3^2 + 4^2 + 20^2 \qquad \text{ou} \qquad 29^2 + 5^2 = 21^2 + 3^2 + 4^2 + 20^2,$$

então adotamos as notações

$$x_1 = 29, \qquad x_2 = 5, \qquad y_1 = 21, \qquad y_2 = 3, \qquad y_3 = 4 \qquad \text{e} \qquad y_4 = 20,$$

onde a escolha da notação deve observar a condição $x_1 > y_1$.

De modo similar ao Exemplo 4.17, vamos definir $\lambda = 2(29 - 21) = 16$ e efetuamos o produto

$$16 \cdot (5, 29, 21, 3, 4, 20) = (80, 464, 336, 48, 64, 320),$$

daí escolhemos $a = (3, 4, 20) \in \mathbb{N}^3$, $b = 5 \in \mathbb{N}$ e $c = 29 - 21 \in \mathbb{N}$ que nos fornece

$$2bc = 80, \quad |a|^2 - |b|^2 + c^2 = 464, \quad |a|^2 - |b|^2 - c^2 = 336, \quad 2a_1c = 48, \quad 2a_2c = 64 \quad \text{e} \quad 2a_3c = 320,$$

então $(5, 29, 21, 3, 4, 20)$ é equivalente a $(80, 464, 336, 48, 64, 320)$ que obtém-se do Teorema 4.11.

Exemplo 4.19. *Mostre que* $(17, 7, 1, 15, 5, 8, 3, 4) \in \mathbb{N}^8$ *é equivalente a uma solução da equação*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2,$$

que pode ser obtida diretamente pelas expressões do Teorema 4.11.

Solução: Sabendo que as coordenadas de $(17, 7, 1, 15, 5, 8, 3, 4)$ satisfazem a igualdade

$$17^2 + 7^2 + 1^2 = 15^2 + 5^2 + 8^2 + 3^2 + 4^2,$$

daí adotamos as notações

$$x_1 = 17, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = 1, \quad y_1 = 15, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 8, \quad y_4 = 3 \quad \text{e} \quad y_5 = 4,$$

onde a escolha deve observar a condição $x_1 > y_1$.

De modo análogo aos Exemplos 4.18, vamos definir $\lambda = 2(17 - 15) = 4$ e efetuar o produto

$$4 \cdot (17, 7, 1, 15, 5, 8, 3, 4) = (68, 28, 4, 60, 20, 32, 12, 16),$$

então tomamos $a = (5, 8, 3, 4) \in \mathbb{N}^4$, $b = (7, 1) \in \mathbb{N}^2$ e $c = 17 - 15 \in \mathbb{N}$ para verificar que

$$|a|^2 - |b|^2 + c^2 = 68, \qquad 2b_1c = 28, \qquad 2b_2c = 4,$$
$$|a|^2 - |b|^2 - c^2 = 60, \quad 2a_1c = 20, \qquad 2a_2c = 32, \qquad 2a_3c = 12 \quad \text{e} \quad 2a_4c = 16,$$

logo $(17, 7, 1, 15, 5, 8, 3, 4)$ é equivalente a $(68, 28, 4, 60, 20, 32, 12, 16)$ que obtém-se do Teorema 4.11.

SILVA FILHO, João Francisco da; FELIX, Elenitha de Sousa. Uma Nova Generalização dos Ternos Pitagóricos. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3009, 24 de novembro de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7083.

5 Considerações Finais

No presente trabalho, introduzimos uma nova generalização dos famosos ternos pitagóricos, nomeada por n-úplas pitagóricas e que possuem algumas propriedades semelhantes aos ternos supracitados (Proposição 4.7). Nesse contexto, apresentamos expressões que estendem as expressões obtidas por Euclides (300 a.C.) e permitem obter exemplos de n-úplas pitagóricas (Teorema 4.11), conforme ilustrado nos Exemplos 4.14, 4.15 e 4.16. Na sequência, mostramos que toda n-úpla pitagórica é equivalente a uma n-úpla pitagórica que pode ser obtida pelas expressões constantes no Teorema 4.11, fornecendo uma caracterização algébrica para as n-úplas pitagóricas (Teorema 4.12) que foi ilustrada através dos Exemplos 4.17, 4.18 e 4.19. Acreditamos que os resultados aqui obtidos devem motivar trabalhos futuros a explorarem as diversas propriedades já conhecidas na literatura sobre os ternos pitagóricos, na perspectiva de verificar quais também são válidas para as n-úplas pitagóricas.

Referências

BANDEIRA, M. O.; SILVA FILHO, J. F. Um método geométrico para construção de ternos pitagóricos. **Professor de Matemática Online**. v. 8, n. 2, p. 222-235, 2020. DOI: https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo817.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BLEZ, M. A.; SILVA FILHO, J. F. Generalizando os Ternos Pitagóricos. **Revista do Professor de Matemática**. v. 98, p. 3-5, 2019.

BURTON, D. M. **Elementary Number Theory**. 7. ed. New York: Mc Graw Hill, 2011.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MAIA, J. E. S. B.; SILVA FILHO, J. F. Construindo Ternos Pitagóricos com Números Complexos. **Revista do Professor de Matemática**. v. 101, p. 19-21, 2020.

MUNIZ Neto, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção Profmat.

ROCHA, S. Fábrica de Ternos Pitagóricos. **Revista do Professor de Matemática**. v. 55, 2004. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/55/6.htm. Acesso em: 30 jan. 2024.

ROTHBART A.; PAUSELL, B. Números Pitagóricos: Uma fórmula de fácil dedução e algumas aplicações geométricas. **Revista do Professor de Matemática**. v. 7, p. 49-51, 1985.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos avaliadores pelas valiosas contribuições e à Revista Eletrônica da Matemática pela oportunidade. Ademais, Elenitha de Sousa Felix agradece ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da UNILAB pelo suporte financeiro.