

Um modelo para a competição entre o mexilhão dourado e sua versão geneticamente modificada¹

A model for competition between the golden mussel and its genetically modified version

Un modelo para la competencia entre el mejillón dorado y su versión genéticamente modificada

Charles Henrique Xavier Barreto Barbosa²

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), Seropédica, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-5926-2126>,  <http://lattes.cnpq.br/4770644090480283>

Claudia Mazza Dias³

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), Nova Iguaçu, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-7376-1554>,  <http://lattes.cnpq.br/3801901177718984>

Dayse Haime Pastore⁴

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas (PPRO), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-0905-0085>,  <http://lattes.cnpq.br/3142092367803598>

Resumo: A presença do invasor mexilhão dourado em águas brasileiras acarreta em impactos ecológicos ou econômicos. Uma alternativa de controle populacional é promissora: a imersão de uma espécie geneticamente modificada com o objetivo de, em contato com o molusco selvagem, produzir gerações inférteis. Uma proposta de modelo matemático que contemple tal competição torna-se importante, uma vez que pode fornecer informações para nortear futuros experimentos. Contudo, o modelo de competição necessita de uma dinâmica de crescimento bem estabelecida. Este trabalho apresenta dois modelos para a dinâmica do

¹ Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

² **Currículo sucinto:** Graduado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal Fluminense e mestre em Modelagem Matemática e Computacional pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. **Contribuição de autoria:** Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia. **Contato:** charles.hxbb@gmail.com.

³ **Currículo sucinto:** Graduada em Engenharia Civil pela Universidade Santa Úrsula, mestra e doutora em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Curso pós-doutorado em Matemática Aplicada e Computacional no Laboratório Nacional de Computação Científica. Atualmente é professora no Instituto Multidisciplinar e no Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional da UFRRJ. **Contribuição de autoria:** Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato:** mazza@ufrrj.br.

⁴ **Currículo sucinto:** Graduada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo, mestra e doutora em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Curso Pós-Doutorado no Laboratório Nacional de Computação Científica e na University of California. Atualmente é professora do CEFET/RJ. **Contribuição de autoria:** Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Validação e Visualização. **Contato:** dayse.pastore@cefet-rj.br.



mexilhão selvagem, estudados de forma analítica. O estudo expõe as soluções de equilíbrio, sua estabilidade local nos pontos estacionários e uma análise de sensibilidade do números de reprodução basal (R'_0s). Por meio desses resultados, define-se o modelo mais adequado para receber as parcelas que modelem a competição. São realizadas simulações numéricas a fim de aferir possíveis desfechos da competição, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. O estudo é capaz de apresentar dois pontos conclusivos importantes: que através da competição planejada a erradicação pode ser atingida e que há necessidade de vantagens competitivas para que a estratégia funcione. Este estudo ressalta a necessidade de vantagens competitivas para o mexilhão modificado. Das possíveis vantagens, o trabalho indica a eficiência reprodutiva e a taxa de mortalidade do mexilhão modificado como as mais promissoras. À vista de um tópico tão importante, este trabalho é necessário para que essa estratégia de controle populacional seja estudada e testada para auxiliar no desenvolvimento da espécie modificada de forma a respeitar a ecologia.

Palavras-chave: modelagem matemática; modelo de competição; dinâmica populacional; análise de estabilidade; biomatemática.

Abstract: The presence of the invasive golden mussel in Brazilian waters brings ecological or economic consequences. An alternative and promising populational control is the immersion of a genetically modified species with the aim of, upon contact with wild mollusks, producing infertile generations. A proposed mathematical model that encompasses such competition becomes important, as it can provide information to guide future experiments. However, the competition model requires a well-established growth dynamics. This work presents two models for the dynamics of wild mussels, studied analytically. The study exposes equilibrium solutions, their local stability at stationary points, and a sensitivity analysis of the basic reproduction numbers (R'_0s). Through these results, the most suitable model for incorporating competition components is defined. Numerical simulations are performed to gauge possible competition outcomes, using the fourth-order Runge-Kutta method. The study is able to present two important conclusive points: that eradication can be achieved through planned competition and that there is a need for competitive advantages for the strategy to work. This study highlights the need for competitive advantages for the modified mussel. Among the possible advantages, the study indicates reproductive efficiency and the mortality rate of the modified mussel as the most promising ones. Given such an important topic, this work is necessary for this population control strategy to be studied and tested to assist in the development of the modified species in a way that respects ecology.

Keywords: mathematical modeling; competition model; population dynamics; stability analysis; biomathematics.

Resumen: La presencia del mejillón dorado invasor en aguas brasilenãs conlleva impactos ecológicos o económicos. Una alternativa prometedora de control poblacional es la inmersión de una especie genéticamente modificada con el objetivo de producir generaciones estériles al entrar en contacto con los moluscos silvestres.



Una propuesta de modelo matemático que considere esta competencia se vuelve importante, ya que puede proporcionar información para orientar futuros experimentos. Sin embargo, el modelo de competencia requiere una dinámica de crecimiento bien establecida. Este trabajo presenta dos modelos para la dinámica del mejillón salvaje, estudiados de manera analítica. El estudio expone las soluciones de equilibrio, su estabilidad local en los puntos estacionarios y un análisis de sensibilidad de los números de reproducción básica (R'_0 's). A través de estos resultados, se define el modelo más adecuado para incorporar las parcelas que modelen la competencia. Se realizan simulaciones numéricas para evaluar posibles resultados de la competencia, utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. El estudio es capaz de presentar dos conclusiones importantes: que la erradicación puede lograrse mediante la competencia planificada y que se necesita de beneficios competitivos para que la estrategia funcione. Este estudio resalta la necesidad de ventajas competitivas para el mejillón modificado. Entre las potenciales ganancias, el estudio indica la eficiencia reproductiva y la tasa de mortalidad del mejillón modificado como las más prometedoras. Dado lo crucial del tema, este trabajo es necesario para estudiar y probar esta estrategia de control poblacional con el fin de ayudar al desarrollo de la especie modificada de manera que respete la ecología.

Palabras clave: modelado matemático; modelo de competencia; dinámica poblacional; análisis de estabilidad; biomatemática.

Data de submissão: 26 de janeiro de 2024.

Data de aprovação: 5 de abril de 2024.

1 Introdução

O equilíbrio de um ecossistema é dado pelas contínuas adaptações das espécies que vivem nele. A invasão de uma nova espécie tem o potencial de perturbar esse meio, por causa de uma competição por recursos com as espécies nativas. Quando os invasores não encontram predadores naturais e mostram-se resilientes ao meio, desequilibram a cadeia trófica e acarretam danos à biodiversidade e às atividades econômicas (Boltovskoy *et al.*, 2006; Ricciardi, 1998; Souza *et al.*, 2009). Este trabalho estuda a espécie invasora *Limnoperna fortunei* (Dunker, 1857), conhecida como mexilhão dourado. Trata-se de um molusco bivalve e de água doce que foi registrado pela primeira vez na América Latina em 1996 (Boltovskoy *et al.*, 2006). A reprodução do molusco é externa, dá-se após o encontro dos gametas na água e, em sequência, inicia-se a fase larval, que pode durar até 30 dias (Cataldo *et al.*, 2005). Com o fim da fase larval, o mexilhão se estabelece como recruta e busca um substrato liso e sólido para aderência. Com frequência, ambientes antrópicos oferecem esse substrato, implicando em problemas de coexistência (Boltovskoy *et al.*, 2006; Cataldo *et al.*,



2005; Ricciardi, 1998). Como as larvas são direcionadas pelo fluxo de corrente, são admitidas com facilidade em plantas industriais hidrelétricas. Nessas plantas, encontram um constante fluxo de água que facilita a filtração, além dos substratos antrópicos para aderência (Boltovskoy *et al.*, 2015; Silva *et al.*, 2016). Conseqüentemente, a presença de altas densidades do mexilhão nas plantas hidroelétricas, principalmente em tubulações, acarreta em perdas de carga e frequentes paradas para limpeza (Simeão *et al.*, 2011). Além das usinas hidrelétricas, a alta densidade populacional desequilibra os níveis de nutrientes do meio, fitoplâncton e microalgas, atingindo a cadeia trófica e prejudicando a atividade de pesca (Boltovskoy *et al.*, 2015; Silva *et al.*, 2016).

Dada a dificuldade de combater a infestação por meios convencionais, novas estratégias se destacam, como a contenção (ou erradicação) da infestação de uma espécie invasora por meio de uma competição planejada, como em Hastings (1994), Ndi *et al.* (2012), Schraiber *et al.* (2012) e Zhang *et al.* (2015). Este trabalho estuda a competição planejada entre o mexilhão dourado selvagem e um modificado geneticamente. A estratégia admite uma competição na qual o encontro dos gametas selvagens com os modificados promovam larvas modificadas. Tais larvas podem produzir mexilhões modificados, que transmitem a infertilidade, culminando na redução populacional. A estratégia se encontra em desenvolvimento por meio do projeto de P&D ANEEL: Controle da Infestação do Mexilhão Dourado por Indução Genética de Infertilidade (PD-10381-0419/2019). Este trabalho tem como objetivo estudar a viabilidade desta técnica, embora admita considerações próprias para analisar essa competição, uma vez que maiores informações sobre a espécie modificada encontram-se indisponíveis.

2 Modelos de Crescimento das Populações de Mexilhões

Serão considerados dois modelos de crescimento da população de mexilhões, denominados Modelo I e Modelo II. O Modelo I consiste em um sistema com três equações diferenciais ordinárias, elaborado a partir dos fatores que influenciam na variação populacional dos envolvidos: larvas, mexilhões adultos e algas, respectivamente L , M e A . As algas são entendidas como principal fonte de alimento do mexilhão, como apontam Karatayed, Burlakova e Padilla (1997).

Entende-se que a variação populacional das larvas depende da reprodutividade, r_1 , do mexilhão e seu nível populacional. E seu crescimento populacional é arrefecido por uma capacidade suporte, K_L . Também se admite perdas relativas às taxas de mortalidade e maturação, μ e λ .



Para os mexilhões, admite-se a variação positiva de acordo com a taxa de maturação e o nível populacional das larvas, assim como variam de acordo com o encontro mexilhão-alga, modelado pela resposta funcional de Michaelis-Menten (Edelstein-Keshet, 2005; Murray, 2002), sob uma taxa máxima de predação β e uma constante de saturação média c . A variação populacional do mexilhão sofre perdas pela taxa de mortalidade, b .

As algas sofrem variação positiva de acordo com sua taxa de crescimento, r_2 , e negativas de acordo com a taxa de predação, p . As equações (1)-(3) apresentam o Modelo I (Barbosa *et al.*, 2022).

$$\frac{dL}{dt} = r_1 M \left(1 - \frac{L}{K_L} \right) - (\mu + \lambda) L, \tag{1}$$

$$\frac{dM}{dt} = \lambda L + \beta \left(\frac{MA}{c + A} \right) - bM, \tag{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = r_2 A \left(1 - \frac{A}{K_A} \right) - p \left(\frac{AM}{c + A} \right). \tag{3}$$

Para o Modelo I, foram encontradas analiticamente três soluções estacionárias:

$$P_1 = (0, 0, 0), \tag{4}$$

$$P_2 = \left(\frac{K_L(r_1\lambda - bs)}{r_1\lambda}, \frac{K_L(r_1\lambda - bs)}{r_1b}, 0 \right), \tag{5}$$

$$P_3 = (0, 0, K_A). \tag{6}$$

A primeira solução estacionária, P_1 (equação (4)), não desperta interesse, uma vez que representa a extinção de todas as populações envolvidas. P_2 , por outro lado, representa a extinção apenas das algas. Observe que essa é uma direta consequência da modelagem do problema, uma vez que o modelo entende que a interação mexilhão-alga é benéfica ao mexilhão, mas não necessária para sua subsistência. P_3 representa uma solução interessante, que mostra a extinção do invasor e o prevalectimento das algas. Esse cenário pode exemplificar o meio antes da infestação e a estabilidade dessa solução estacionária pode contribuir para o entendimento da infestação.

A análise de estabilidade é realizada localmente, na região próxima às soluções estacionárias, de modo a, através da aplicação da Matriz Jacobiana, obter as partes reais dos autovalores associados às soluções (Edelstein-Keshet, 2005; Murray, 2002). A desigualdade (7) apresenta a condição encontrada para que P_3 seja localmente estável e consiga resistir à infestação, devidamente atrelada às partes reais de seus autovalores associados. Trata-se do número de reprodução basal do Modelo I, representado por R_0^1 , que implica no Teorema 1.



Teorema 1: Se $R_0^1 < 1$, então o ponto de equilíbrio $P_3 = (0, 0, K_A)$ possui três autovalores reais negativos, sendo portanto estável. Quando $R_0^1 > 1$, temos dois autovalores negativos e um autovalor positivo, sendo consequentemente instável.

$$R_0^1 = \frac{\beta s K_A + r_1 \lambda (c + K_A)}{(c + K_A) b s} < 1. \tag{7}$$

As taxas de crescimento das larvas (reprodutividade dos mexilhões), de mortalidade e maturação foram adotadas com base nas referências Cataldo *et al.* (2005), Paolucci *et al.* (2010) e Vanderploeg *et al.* (1996). A Tabela 1 apresenta os valores para as simulações que serão apresentadas adiante; ressalta-se que os demais valores foram estimados. Destaca-se que o objetivo é analisar qualitativamente a dinâmica de infestação do Modelo I. Para tal, o conjunto dos valores apresentados pela Tabela 1, quando substituídos na equação (7) resultam em $R_0^1 > 1$ e, portanto, na infestação do invasor, como indica o Teorema 1. Note que valores distintos podem implicar na condição $R_0^1 < 1$ e alterar a dinâmica das populações.

Tabela 1 – Valores adotados dos parâmetros da simulação do Modelo I

Parâmetro	r_1	μ	λ	β	b	r_2	p	K_L	K_A	c
Valor	0,07	0,004	0,03	0,01	0,01	0,12	0,02	20	0,01	0,001
Unidade	dia^{-1}	g/l	g/l	g/l						

Fonte: Elaboração dos autores.

As equações (8)-(10) formam o sistema relacionado ao Modelo II.

$$\frac{dL}{dt} = r_1 M \left(1 - \frac{L}{K_L} \right) - \mu L - \lambda L, \tag{8}$$

$$\frac{dM}{dt} = \lambda \frac{A^2}{c + A^2} L \left(1 - \frac{M}{K_M} \right) - b M, \tag{9}$$

$$\frac{dA}{dt} = r_2 A \left(1 - \frac{A}{K_A} \right) - p \frac{A^2}{c^2 + A^2} M. \tag{10}$$

Para o Modelo II, as soluções estacionárias são: $S_1 = (0, 0, 0)$ e $S_2 = (0, 0, K_A)$.

Ao tornar necessária a existência de alga para o desenvolvimento do mexilhão, a possibilidade de uma solução estacionária que culmine na extinção das algas é eliminada. Realizando o mesmo procedimento de avaliação da estabilidade local das soluções de equilíbrio para o Modelo II, S_1 e S_2 , encontra-se a condição expressa pela desigualdade (11) para que S_2 seja localmente estável. Trata-se do número de reprodução basal para o Modelo II, R_0^2 , que acarreta no Teorema 2.



Teorema 2: Se $R_0^2 < 1$, então o ponto de equilíbrio $S_2 = (0, 0, K_A)$ possui três autovalores reais negativos, sendo portanto estável. Quando $R_0^2 > 1$, temos dois autovalores negativos e um autovalor positivo, sendo conseqüentemente instável.

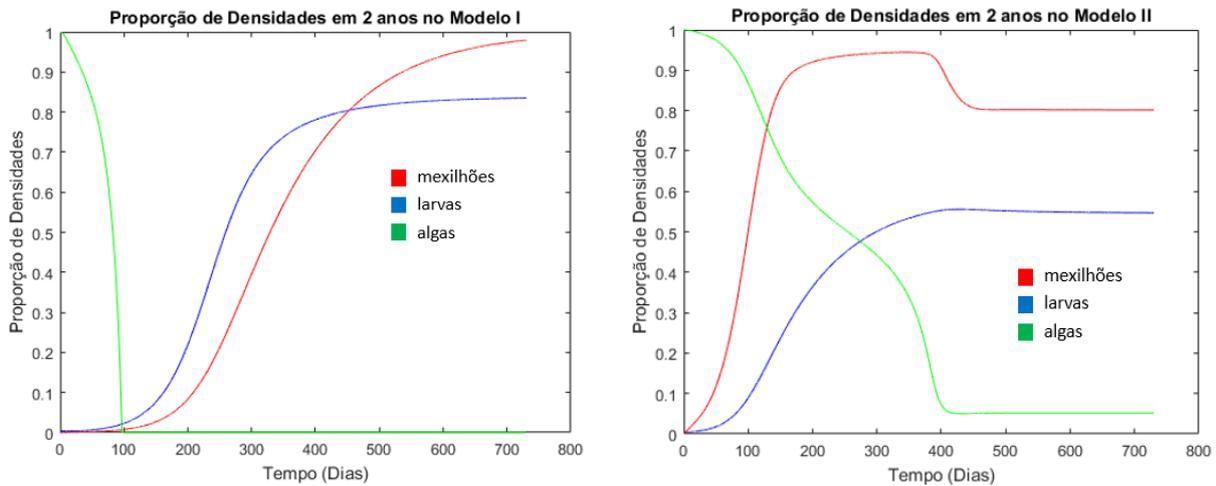
$$R_0^2 = \frac{r_1 \lambda K_A^2}{(K_A^2 + c_1^2) b (\lambda + \mu)} < 1. \quad (11)$$

Diferentemente do Modelo I, o Modelo II (Barbosa *et al.*, 2023; Silva *et al.*, 2022) admite a interação mexilhão-alga na parcela de crescimento do molusco, tornando-a necessária para seu desenvolvimento. A capacidade suporte adotada para o Modelo II foi de 1732 gm^{-2} , que exigiu um ajuste dimensional para as simulações numéricas. Além disso, a taxa p para o segundo modelo foi adotada em $0,2 \text{ dia}^{-1}$, por semelhante ajuste. Os demais parâmetros permaneceram os mesmos da Tabela 1.

A Figura 1 apresenta a dinâmica populacional, evidenciando a proporção da capacidade suporte no tempo, visando uma análise qualitativa do comportamento. Como condições iniciais, considera-se a população de algas em sua capacidade suporte K_A , sem a presença de mexilhões adultos e a entrada de $0,5\%K_L$. Como esperado, o Modelo I não representa a realidade, uma vez que, para os atuais parâmetros, as algas são extintas e a solução caminha para P_2 . Por outro lado, o Modelo II apresenta a coexistência entre as três populações, o que é observado na prática. A queda da densidade de algas culmina em um declínio para as demais populações. Essa consequência tem importância quando o problema é analisado em uma região, de modo que a presença do invasor pode ser confirmada de acordo com a maior ausência de algas (Silva *et al.*, 2022).



Figura 1 – Resultados para proporção de densidade das populações de mexilhões selvagens, larvas e algas em 2 anos de simulação



(a) Comportamento da proporção de densidades popula- (b) Comportamento da proporção de densidades populaci-
 cionais em 2 anos de simulação para o Modelo I onais em 2 anos de simulação para o Modelo II

Fonte: Elaboração dos autores.

3 Modelo de Competição

Para a elaboração do Modelo de Competição, escolheu-se o Modelo II para servir de base por adequar melhor a realidade. Sobre a estratégia de competição que deu origem à modelagem do problema, considera-se que a infertilidade será promovida da seguinte forma: as larvas selvagens são modeladas em função do encontro entre os gametas do mexilhão macho selvagem e da fêmea selvagem. Dado que não há informações disponíveis sobre o desenvolvimento da técnica de modificação genética, foram necessárias hipóteses de modelagem. Considera-se que o encontro dos gametas liberados no meio é proporcional ao encontro das populações envolvidas para cada caso. As larvas selvagens foram modeladas em função do encontro dos gametas macho selvagem e fêmea selvagem, enquanto que as larvas modificadas foram modeladas em função do encontro dos gametas do mexilhão macho modificado com os da fêmea selvagem. Nesse contexto, os gametas do mexilhão macho modificado não produzem prole. As equações (12)-(16) apresentam o modelo



proposto,

$$\frac{dL_s}{dt} = r_1 \frac{M_s^2}{M_s + M_m} \left(1 - \frac{L_s + L_m}{K_L} \right) - \mu L_s - \lambda L_s, \tag{12}$$

$$\frac{dM_s}{dt} = (L_s + (1 - \chi)L_m) \lambda \frac{A^2}{c^2 + A^2} \left(1 - \frac{M_s + M_m}{K_M} \right) - bM_s, \tag{13}$$

$$\frac{dL_m}{dt} = \bar{r}_1 \frac{M_s M_m}{M_s + M_m} \left(1 - \frac{L_s + L_m}{K_L} \right) - \bar{\mu} L_m - \bar{\lambda} L_m, \tag{14}$$

$$\frac{dM_m}{dt} = \chi L_m \lambda \frac{A^2}{c^2 + A^2} \left(1 - \frac{P}{K_M} \right) - \bar{b} M_m, \tag{15}$$

$$\frac{dA}{dt} = r_2 A \left(1 - \frac{A}{K_A} \right) - p \frac{A^2}{c^2 + A^2} (M_s + M_m). \tag{16}$$

Os mexilhões modificados são representados por M_m , os selvagens por M_s . A representação é análoga para as larvas. O parâmetro χ é entendido como a proporção (efetividade) de transmissão dessa modificação genética para futuras gerações. Embora a engenharia genética para controle populacional de algumas espécies já venha sendo discutida há certo tempo no meio acadêmico (Burt, 2003; Hammond *et al.*, 2016; Hastings, 1994), a obtenção de χ está relacionada a diversos fatores de experimentação.

Diversos experimentos numéricos foram realizados. Simulações que avaliavam um cenário sem vantagens competitivas, isso é, o qual todas as características dos selvagens (valores de parâmetros) são mantidas para os modificados, e casos, os quais, foram atribuídas à espécie modificada vantagens competitivas. A Tabela 2 apresenta a sensibilidade padrão dos parâmetros do R_0^2 (Barbosa *et al.*, 2023). Note que os pares r_1 e b_2 , λ e μ e K_A e c devem perturbar de forma análoga a dinâmica de competição.

Tabela 2 – Sensibilidade dos parâmetros que compõem o R_0^2

Parâmetro	r_1	b	λ	μ	K_A	c
Sensibilidade Padrão	1	-1	$\frac{\mu}{\mu + \lambda}$	$-\frac{\mu}{\mu + \lambda}$	$\frac{2c^2}{K_A^2 + c^2}$	$-\frac{2c^2}{K_A^2 + c^2}$

Fonte: Elaboração dos autores.

3.1 Simulações Numéricas

Para as simulações, foi considerado um passo de tempo de um dia (comprimento de passo). O método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (Burden; Faires, 2011) foi utilizado para resolver o sistema de equações. Salvo estipulação contrária de específica simulação, todos os parâmetros dos mexilhões e larvas modificadas são iguais aos do selvagem (\bar{r}_1 , $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$ e \bar{b}). Além



disso, foi considerado a taxa de transmissão $\chi = 0,97$ para os experimentos. A Tabela 3 apresenta as condições iniciais utilizadas nas simulações numéricas.

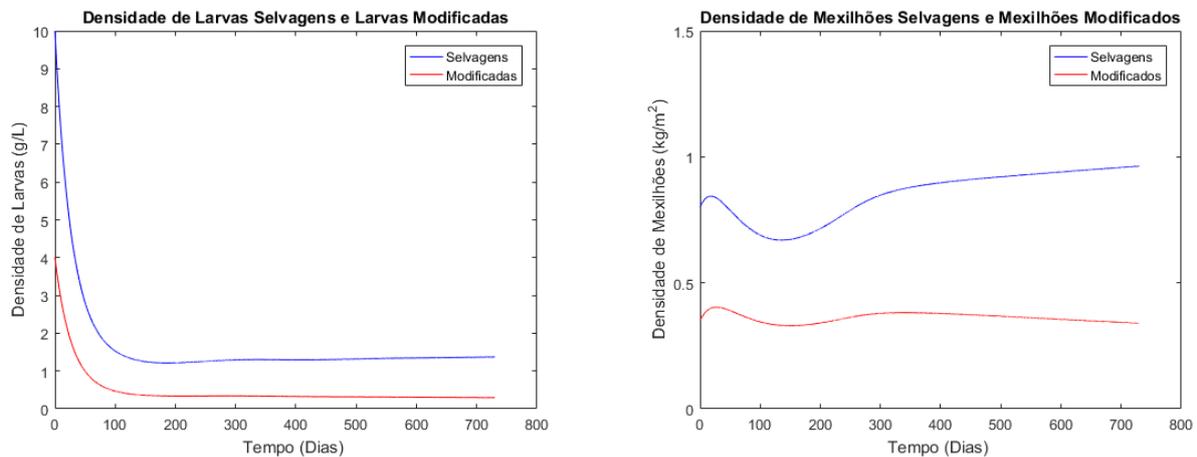
Tabela 3 – Condições iniciais utilizadas nas simulações numéricas de interação entre mexilhões selvagens e mexilhões geneticamente modificados

População	Densidade Populacional
Algas	$0,5 \text{ mgl}^{-1}$
Larvas Selvagens	10 gl^{-1}
Larvas Modificadas	2 gl^{-1}
Mexilhões Selvagens	$1,35 \text{ kgm}^{-2}$
Mexilhões Modificados	$0,175 \text{ kgm}^{-2}$

Fonte: Elaboração dos autores.

A Figura 2 apresenta o cenário sem vantagens competitivas. Observou-se, para larvas e mexilhões, que a admissão da espécie modificada no meio acarreta em uma perturbação. No entanto, o resultado não evidencia controle populacional ou erradicação. Pelo contrário, depois de dois anos de simulação é observada uma indicação de declínio dos modificados.

Figura 2 – Simulação de 2 anos da interação entre mexilhões geneticamente modificados e mexilhões selvagens sem vantagens competitivas



(a) Densidade das larvas selvagens e modificadas

(b) Densidade dos mexilhões selvagens e modificados

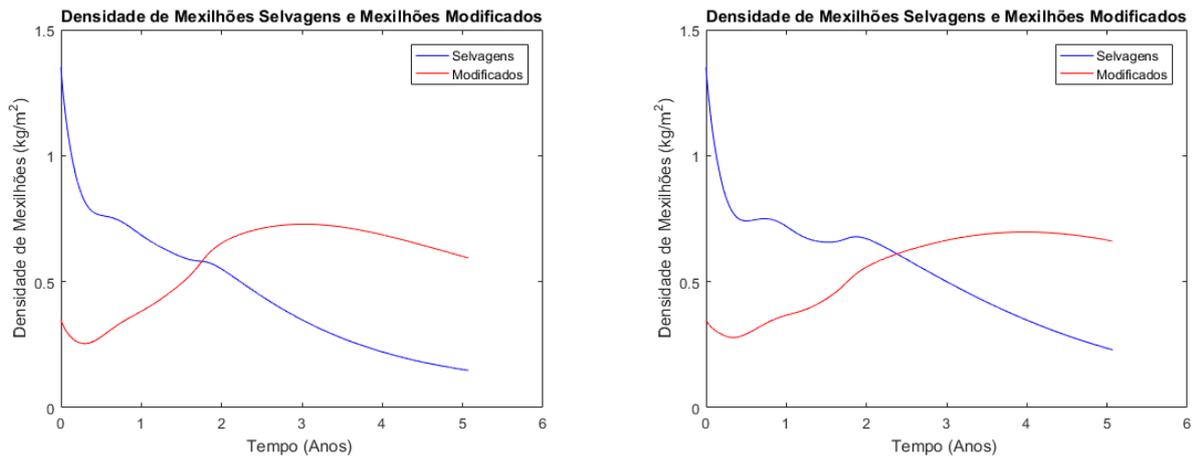
Fonte: Elaboração dos autores.

A Figura 3 apresenta o resultado para o par de vantagens competitivas r_1 e b_2 , que significa mexilhões modificados mais eficientes na reprodução e mais resistentes, respectivamente (veja Tabela 3). Observou-se que em ambos os casos houve uma alternância das populações envolvidas. Depois de cinco anos de simulação, também são observados indícios de queda em ambas as



populações. O que faz sentido, haja vista que, pelas considerações de modelagem do problema, para o modificado se desenvolver é necessário mexilhões selvagens no meio.

Figura 3 – Simulação de 5 anos da interação entre mexilhões geneticamente modificados e mexilhões selvagens com vantagem competitiva para os mexilhões modificados mais eficientes na reprodução e mais resistentes, respectivamente

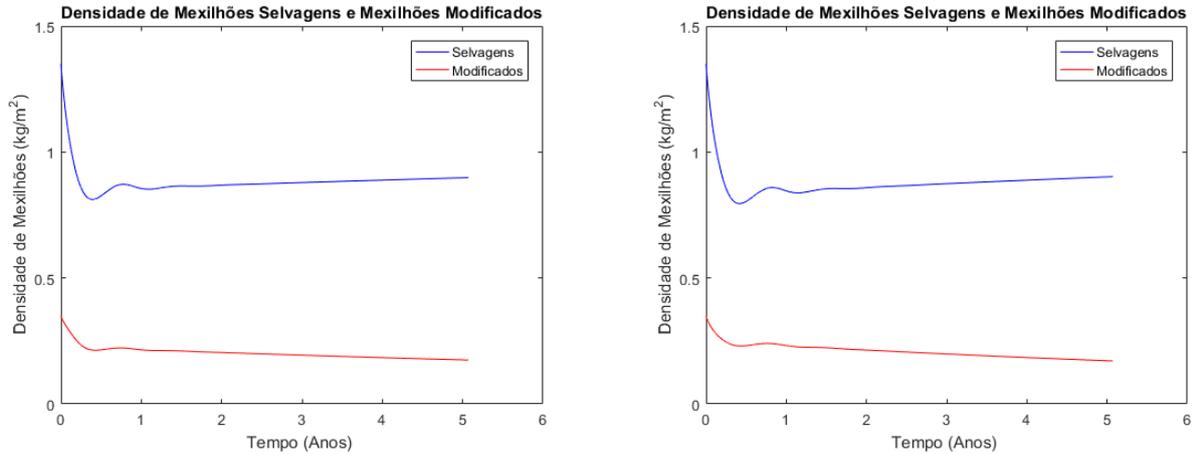


(a) Com $\bar{r}_1 = 0,1 \text{ dia}^{-1}$ como vantagem ao modificado (b) Com $\bar{b} = 0,0075 \text{ dia}^{-1}$ como vantagem ao modificado
 Fonte: Elaboração dos autores.

A Figura 4 apresenta a vantagem competitiva do par λ e μ , maior taxa de maturação larval e larvas mais resistentes, respectivamente. Observou-se que há uma pequena perturbação dos selvagens com a inserção dos modificados no meio. Porém, em cinco anos de simulação os modificados não conseguiram se estabelecer e a simulação já indica declínio dos modificados, um desfecho semelhante ao resultado sem as vantagens competitivas.



Figura 4 – Simulação de 5 anos da interação entre mexilhões geneticamente modificados e mexilhões selvagens com vantagem competitiva para os mexilhões modificados em sua taxa de maturação e mortalidade das larvas, respectivamente



(a) Com $\bar{\lambda} = 0,045 \text{ dia}^{-1}$ como vantagem ao modificado (b) Com $\bar{\mu} = 0,003 \text{ dia}^{-1}$ como vantagem ao modificado

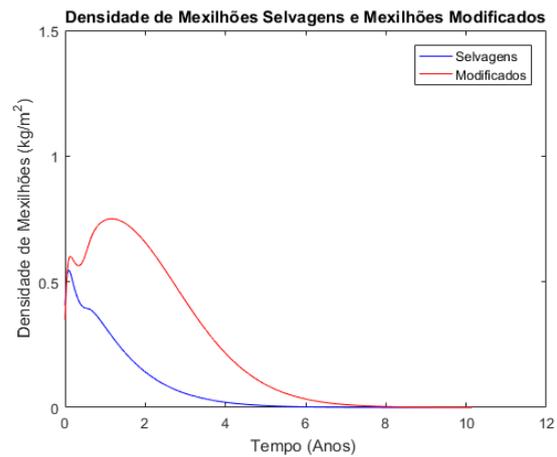
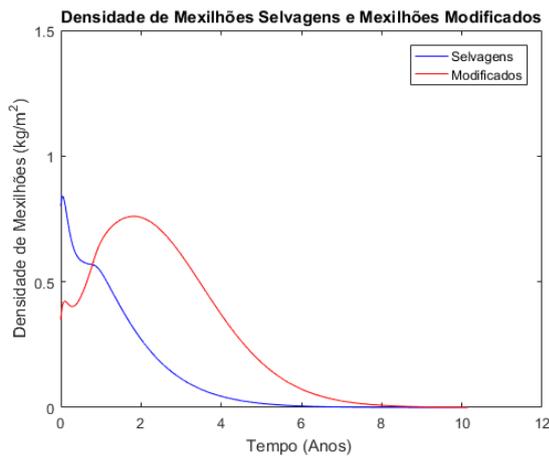
Fonte: Elaboração dos autores.

A Figura 5 apresenta diferentes condições iniciais para o mexilhão selvagem, o que pode ser entendido como uma limpeza do meio antes de admitir nele os mexilhões modificados. Essa simulação também combina as duas vantagens competitivas mais significativas, um modificado mais eficiente na reprodução e também mais resistente. Observou-se que, para esse desfecho, obteve-se a erradicação dos mexilhões modificados. Também foi observado que a limpeza pode acelerar a dinâmica da competição. Ressalta-se que para uma redução de 40% dos selvagens a erradicação foi obtida entre a faixa de oito a dez anos, enquanto que para uma redução de 90%, a erradicação é obtida na faixa de seis a oito anos.

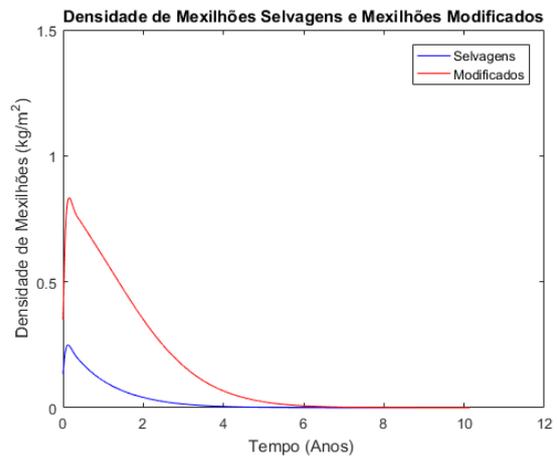
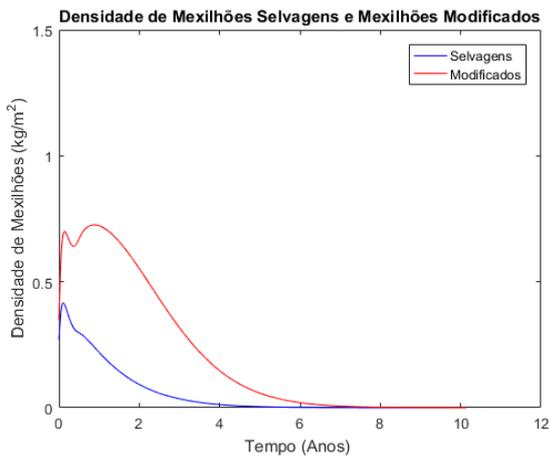
A Figura 6 apresenta a densidade populacional de todas as populações envolvidas, considerando $\bar{r}_1 = 0,09$, $\bar{b} = 0,0085$ e $\chi = 0,97$. Observou-se que em ambos os casos a erradicação é atingida, porém, com maior proporção de limpeza, acelera-se a dinâmica e a erradicação. Embora para as últimas simulações a erradicação foi atingida depois de um longo tempo (pelo menos 6 anos em um cenário ideal), as simulações apresentam baixos níveis populacionais depois de quatro anos, o que já pode indicar uma melhora em um ambiente infestado.



Figura 5 – Simulação de 10 anos da interação entre mexilhões geneticamente modificados e mexilhões selvagens com vantagem competitiva para os mexilhões modificados mais eficientes na reprodução e mais resistentes ($r_1 = 0,09 \text{ dia}^{-1}$ e $\bar{b} = 0,0085 \text{ dia}^{-1}$), respectivamente, para diferentes condições iniciais do mexilhão selvagem



(a) Redução de 40% nas populações de larvas e mexilhões selvagens (b) Redução de 70% nas populações de larvas e mexilhões selvagens

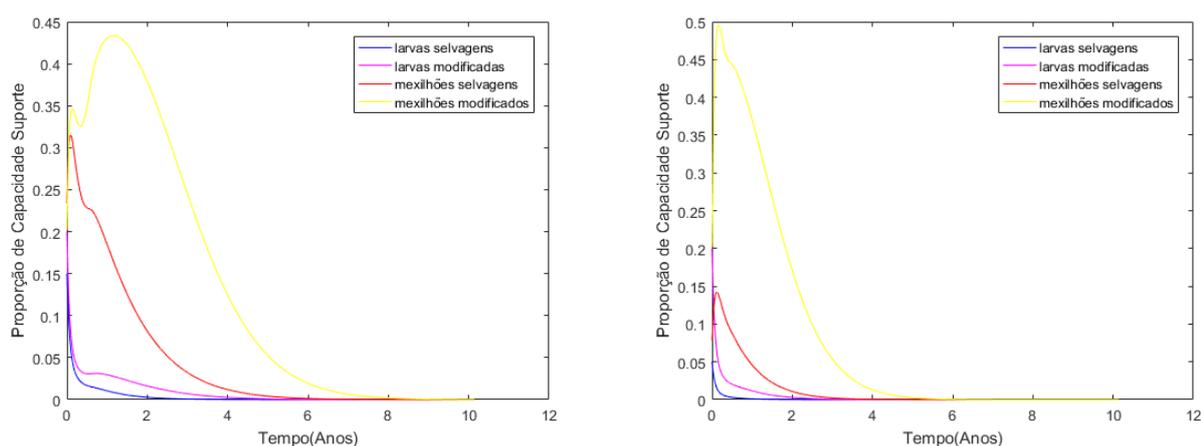


(c) Redução de 80% nas populações de larvas e mexilhões selvagens (d) Redução de 90% nas populações de larvas e mexilhões selvagens

Fonte: Elaboração dos autores.



Figura 6 – Simulação de 10 anos da proporção de larvas geneticamente modificadas e selvagens e de mexilhões geneticamente modificados e selvagens



(a) Com redução de 70% da população de selvagens

(b) Com redução de 90% da população de selvagens

Fonte: Elaboração dos autores.



4 Conclusões

Este trabalho analisou como inferências de modelagem podem atuar sobre a dinâmica de infestação nos modelos de crescimento populacional de mexilhões dourados e estudou a viabilidade da estratégia de contenção proposta pela inserção de uma espécie geneticamente modificada em um meio. Nota-se que os teoremas obtidos na análise de estabilidade local das soluções de equilíbrio estão de acordo com os resultados obtidos pelas simulações numéricas dos modelos de crescimento (veja Figura 1), uma vez que o conjunto de parâmetros, em ambos os modelos, apontaram para a condição $R_0 > 1$. Ressalta-se que a primeira parte deste trabalho, análise da estabilidade local e simulação numérica dos modelos de crescimento populacional, é de fundamental importância, haja vista que é necessário um modelo de crescimento bem estabelecido para se propor o modelo de competição.

Dadas as simulações numéricas das populações de mexilhões selvagens e modificados apresentadas para os diferentes cenários a fim de avaliar a estratégia de competição planejada, constatou-se a necessidade de vantagens competitivas para os mexilhões modificados para que esta seja eficiente. Além disso, os resultados apresentados pelas Figuras 3 e 4 apontaram como cada vantagem competitiva, eficiência reprodutiva, mortalidade dos mexilhões, maturação das larvas e mortalidade larval, altera a dinâmica da competição. O trabalho também evidenciou que, ainda que a erradicação dos mexilhões como um todo seja obtida sob condições ideais, a estratégia demanda um longo prazo de tempo. No entanto, baixos níveis populacionais do invasor podem ser obtidos em menor tempo e com vantagens competitivas mais razoáveis (maior eficiência reprodutiva e um mexilhão modificado menos suscetível à predação).

Ainda que os parâmetros tenham sido estimados, o perfil qualitativo dos resultados está de acordo com o sugerido pela análise de sensibilidade dos parâmetros. Vale ressaltar que os pontos discutidos e as simulações obtidas, aliadas ao estudo analítico, podem nortear discussões de laboratório. Bem como o modelo de competição proposto pode ser utilizado como passo prévio a um experimento de campo, de modo a antecipar questionamentos e, até mesmo, discutir viabilidade. Por fim, ressalta-se que não foram avaliados casos de reinserção de modificados no meio, o que poderia acelerar a dinâmica de competição.



Referências

BARBOSA, Charles H. X. B.; DIAS, Claudia M.; PASTORE, Dayse H.; SILVA, José C. R.; COSTA, Anna R. C.; SANTOS, Isaac P.; AZEVEDO, Ramoni Z. S.; FIGUEIRA, Raquel M. A.; FORTUNATO, Humberto F. M. Analysis of a mathematical model for golden mussels infestation. **Ecological Modelling**. v. 486, p. 110502, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2023.110502>.

BARBOSA, Charles H. X. B. **Um estudo hipotético baseado em modelos de crescimento e competição para a dinâmica populacional do mexilhão dourado**. Orientadora: Claudia Mazza Dias. Coorientadora: Dayse Haime Pastore. 2022. 133 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2022. Disponível em: <https://rima.ufrrj.br/jspui/handle/20.500.14407/14351>. Acesso em: 27 jun. 2024.

BOLTOVSKOY, Demetrio; CORREA, Nancy M.; CATALDO, Daniel; SYLVESTER, Francisco. Dispersion and Ecological Impact of the Invasive Freshwater Bivalve *Limnoperna fortunei* in the Río de la Plata Watershed and Beyond. **Biological Invasions**. v. 8, p. 947-963, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10530-005-5107-z>.

BOLTOVSKOY, Demetrio; CORREA, Nancy M.; SYLVESTER, Francisco; CATALDO, Daniel. Nutrient recycling, phytoplankton grazing, and associated impacts of *limnoperna fortunei*. In: BOLTOVSKOY, Demetrio (ed.). **Limnoperna Fortunei: The Ecology, Distribution and Control of a Swiftly Spreading Invasive Fouling Mussel**. [S. l.]: Springer, 2015. p. 153-176.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. Boston: Cengage Learning, 2011.

BURT, Austin. Site-specific selfish genes as tools for the control and genetic engineering of natural populations. **Proceedings of the Royal Society of London. Biological Sciences**. v. 270, n. 1518, p. 921-928, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspb.2002.2319>.

CATALDO, Daniel; BOLTOVSKOY, Demetrio; HERMOSA, Jose L.; CANZI, Carla. Temperature-Dependent Rates Of Larval Development In *Limnoperna Fortunei* (Bivalvia: Mytilidae). **Journal of Molluscan Studies**. v. 71, n. 1, p. 41-46, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1093/mollus/eyi005>.

EDELSYEIN-KESHET, Leah. **Mathematical Models in Biology**. [S. l.]: SIAM, 2005.

HAMMOND, Andrew; GALIZI, Roberto; KYROU, Kyros; SIMONI, Alekos; SINISCALCHI, Carla; KATSANOS, Dimitris; GRIBBLE, Matthew; BAKER, Dean; MAROIS, Eric; RUSSELL, Steven; BURT, Austin; WINDBICHLER, Nikolai; CRISANTI, Andrea; NOLAN, Tony. A crispr-cas9 gene drive system targeting female reproduction in the malaria mosquito vector *Anopheles gambiae*. **Nature Biotechnology**. v. 34, n. 1, p. 78-83, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1038/nbt.3439>.

HASTINGS, I. M. Selfish DNA as a method of pest control. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Biological Sciences**. v. 344, n. 1309, p. 313-324, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1098/rstb.1994.0069>.

KARATAYEV, A. Y.; BURLAKOVA, L. E.; PADILLA, D. K. The Effects of *Dreissena Polymorpha* (Pallas) Invasion on Aquatic Communities in Eastern Europe. **Journal of Shellfish Research**. v. 16, n. 1, p. 187-203, 1997.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology I: An Introduction**. New York: Springer, 2002.



NDII, M. Z.; HICKSON, R. I.; MERCER, G. N. Modelling the Introduction of Wolbachia into Aedes Aegypti Mosquitoes to Reduce Dengue Transmission. **The ANZIAM Journal**. v. 53, n. 3, p. 213-227, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1017/S1446181112000132>.

PAOLUCCI, E. M.; THUESEN, E. V.; CATALDO, D. H.; BOLTOVSKOY, D. Veligers of an introduced bivalve, *Limnoperna fortunei*, are a new food resource that enhances growth of larval fish in the Paraná River (South America). **Freshwater Biology**. v. 55, n. 9, p. 1831-1844, 2010. Disponível em: https://bibliotecadigital.exactas.uba.ar/collection/paper/document/paper_00465070_v55_n9_p1831_Paolucci. Acesso em: 30 jun. 2024.

RICCIARDI, Anthony. Global range expansion of the Asian mussel *Limnoperna fortunei* (Mytilidae): Another fouling threat to freshwater systems. **Biofouling**. v. 13, n. 2, p. 97-106, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1080/08927019809378374>.

SCHRAIBER, Joshua G.; KACZMARCZYK, Angela N.; KWOK, Ricky; PARK, Miran; SILVERSTEIN, Rachel; RUTAGANIRA, Florentine U.; AGGARWAL, Taruna; SCHWEMMER, Michael A.; HOM, Carole L.; GROSBURG, Richard K.; SCHREIBER, Sebastian J. Constraints on the use of lifespan-shortening Wolbachia to control dengue fever. **Journal of Theoretical Biology**. v. 297, p. 26-32, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2011.12.006>.

SILVA, F. A.; BARBOSA, N. P. U.; PAULA, R. S.; CARVALHO, V. A.; CORRÊA, A.; CARVALHO, M. D. de; CARDOSO, A. V. Mexilhão-dourado no Brasil: detecção de um perigoso invasor. **Ciência Hoje**. v. 338, n. 57, p. 38-42, 2016. Disponível em: https://cienciahoje.periodicos.capes.gov.br/storage/acervo/ch/ch_338.pdf. Acesso em: 30 jun. 2024.

SILVA, José Carlos Rubianes; DIAS, Claudia Mazza; PASTORE, Dayse Haime; COSTA, Anna Regina Corbo; FIGUEIRA, Raquel Medeiros Andrade; FORTUNATO, Humberto Freitas de Medeiros; BARBOSA, Charles Henrique Xavier Barreto; CARVALHO, Breylla Campos. Population growth of the golden mussel (*L. fortunei*) in hydroelectric power plants: a study via mathematical and computational modeling. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**. v. 27, n. e3, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1590/2318-0331.272220210124>.

SIMEÃO, Cláudia Marques Gonçalves; RESENDE, Márcio Figueiredo de; MARTINEZ, Carlos Barreira. Variação das Características Hidráulicas em Conduitos Forçados Operando sob Condições de Infestação por *Limnoperna fortunei*. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**. v. 16, n. 2, p. 13-24, 2011. Disponível em: https://www.abrhidro.org.br/SGCv3/publicacao.php?PUB=1&ID=3&SUMARIO=40&ST=variacao_das_caracteristicas_hidraulicas_em_conduitos_forcados_operando_sob_condicoes_de_infestacao_por_limnoperna_fortunei. Acesso em: 30 jun. 2024.

SOUZA, Rosa Cristina Corrêa Luz de; CALAZANS, Sálvio Henrique; SILVA, Edson Pereira. Impacto das espécies invasoras no ambiente aquático. **Ciência e Cultura**. v. 61, n. 1, p. 35-41, 2009. Disponível em: http://cienciaecultura.bvs.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0009-67252009000100014&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 30 jun. 2024.

VANDERPLOEG, Henry A.; LIEBIG, James R.; GLUCK, Amy A. Evaluation of different phytoplankton for supporting development of zebra mussel larvae (*Dreissena polymorpha*): the importance of size and polyunsaturated fatty acid content. **Journal of Great Lakes Research**. v. 22, n. 1, p. 36-45, 1996. Disponível em: https://www.reabic.net/publ/Gluck_et%20al_1996.pdf. Acesso em: 30 jun. 2024.



ZHANG, Xianghong; TANG, Sanyi; CHEKE, Robert A. Models to assess how best to replace dengue virus vectors with Wolbachia-infected mosquito populations. **Mathematical Biosciences**. v. 269, p. 164-177, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2015.09.004>.

Agradecimentos

Pesquisa realizada no âmbito do projeto “Controle da Infestação por Mexilhão Dourado através da Indução Genética de Infertilidade” (PD-10381-0419/2019). Este estudo foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código Financeiro 001.

