

Número cromático antimágico local dos grafos *firefly*¹

Local antimagic chromatic number of firefly graphs

Número cromático antimágico local de los grafos *firefly*

Lara Rodrigues Ventura²

Universidade Federal Fluminense (UFF), Volta Redonda, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0009-0001-3966-8150>,  <http://lattes.cnpq.br/0478521065258726>

André Ebling Brondani³

Universidade Federal Fluminense (UFF), Volta Redonda, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-8266-9255>,  <http://lattes.cnpq.br/1549250972147734>

Francisca Andrea Macedo França⁴

Universidade Federal Fluminense (UFF), Volta Redonda, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-5081-6361>,  <http://lattes.cnpq.br/6888310338266873>

Resumo: A rotulação de grafos é um dos tópicos de pesquisa em Teoria de Grafos que associa um elemento do grafo, como vértices ou arestas, a números inteiros denominados rótulos. Existem muitos trabalhos na literatura que investigam problemas relacionados a esse tópico. Dado um grafo conexo $G = (V, E)$ com ao menos três vértices, uma rotulação antimágica local é uma bijeção $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$ que induz, naturalmente, uma rotulação de vértices em G , de modo que vértices adjacentes não admitem o mesmo rótulo. A menor quantidade de rótulos de vértices, induzidos por todas as rotulações antimágicas locais de G , denomina-se *número cromático antimágico local* de G e, desde 2017, tal parâmetro tem recebido muita atenção dos pesquisadores. Neste artigo, construímos rotulações antimágicas locais para os grafos pertencentes à classe dos grafos *firefly* e fornecemos expressões que exibem o número cromático antimágico local para todos os grafos nessa classe.

¹Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

²**Currículo sucinto:** Bacharel em Matemática pela Universidade Federal Fluminense e mestranda do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense. **Contribuição de autoria:** Análise Formal, Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Investigação. **Contato:** laraventura@id.uff.br.

³**Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria, mestre em Matemática pela Universidade Federal Fluminense e doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Professor do Departamento de Matemática de Volta Redonda e do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da UFF. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato:** andrebrondani@id.uff.br.

⁴**Currículo sucinto:** Bacharel em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, mestra em Matemática e doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Professora do Departamento de Matemática de Volta Redonda e do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da UFF. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Obtenção de Financiamento, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato:** francisca_franca@id.uff.br.



Palavras-chave: rotulação antimágica local; número cromático antimágico local; grafos *firefly*.

Abstract: Graph labeling is one of the Graph Theory research topics that associate a graph element, such as vertices or edges, to integers called labels. There are many papers in the literature that investigate problems related to this topic. Given a connected graph $G = (V, E)$ with at least three vertices, a local antimagic labeling is a bijection $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$ which induces, naturally, a labeling of vertices in G , so that adjacent vertices do not admit the same label. The smaller number of vertex labels, induced by all local antimagic labelings of G , is called local antimagic chromatic number of G . Since 2017, this parameter has received a lot of attention from researchers. In this article, we construct local antimagic labelings for graphs belonging to the firefly graph class and provide expressions that determine the local antimagic chromatic number for all graphs in this class.

Keywords: local antimagic labeling; local antimagic chromatic number; firefly graphs.

Resumen: El etiquetado de grafos es uno de los temas de investigación de la Teoría de Grafos que asocian un elemento del grafo, como vértices o aristas, a números enteros llamados etiquetas. Hay muchos trabajos en la literatura que investigan problemas relacionados con este tema. Dado un grafo conectado $G = (V, E)$ con al menos tres vértices, el etiquetado antimágico local es una biyección $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$ que induce, naturalmente, un etiquetado de vértices en G , de modo que los vértices adyacentes no tienen la misma etiqueta. La menor cantidad de etiquetas de vértices, inducidas por todos los etiquetados antimágicos locales de G , se llama número cromático antimágico local de G y, desde 2017, este parámetro ha recibido mucha atención de los investigadores. En este artículo, construimos etiquetas antimágicas locales para los grafos de la clase *firefly* y proporcionamos expresiones que muestran el número cromático antimágico local para todos los grafos de esta clase.

Palabras clave: etiquetado antimágico local; número cromático antimágico local; grafos *firefly*.

Data de submissão: 23 de janeiro de 2024.

Data de aprovação: 25 de março de 2024.

1 Introdução

A Teoria de Grafos é usada em vários campos, como modelagem de redes, *design* de banco de dados, agendamentos, problemas do caixeiro viajante etc. (Elumalai, 2020). A rotulação de grafos é um dos tópicos de pesquisa em Teoria de Grafos que associa um elemento do grafo, como vértices ou arestas, a números inteiros denominados rótulos.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo simples e $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$ uma bijeção. Para cada $v \in V$, o peso de v é dado por $f^+(v) = \sum_{e \in E(v)} f(e)$, onde $E(v)$ denota o conjunto das arestas que



incidem em v . Se $f^+(v) \neq f^+(u)$ para todo par de vértices distintos $u, v \in V$, então f é denominada rotulação antimágica de G . Se uma tal rotulação existir, G é dito antimágico. Hartsfield e Ringel (1990) introduziram o conceito de rotulação antimágica de um grafo e conjecturaram que todo grafo conexo, com exceção do grafo completo K_2 , é antimágico. Desde então, a conjectura tem recebido muita atenção, e foi provada para várias classes especiais de grafos. Entretanto, a conjectura ainda não foi totalmente resolvida, mesmo para algumas classes de grafos particularmente simples, como árvores. Para obter mais detalhes sobre classes conhecidas de grafos antimágicos, sugerimos Gallian (2023).

Em 2017, dois grupos de pesquisadores, independentemente, consideraram uma condição mais fraca de rótulos que distingue vizinhos, ao invés de rótulos que distingue vértices. De acordo com Arumugam *et al.* (2017) e Bensmail, Senhaji e Lyngsie (2017), se $f^+(v) \neq f^+(u)$ para todo par de vértices adjacentes em G , então f é uma rotulação antimágica local de G . Ambos os grupos conjecturaram que todo grafo conexo, exceto K_2 , é antimágico local. Tal conjectura foi provada em Haslegrave (2018) usando métodos probabilísticos. Além disso, Arumugam *et al.* (2017) definiram o número cromático antimágico local para um grafo antimágico local. Tal invariante já foi estudada em algumas classes de grafos (Nazula; Slamir; Dafik, 2018; Sethuraman; Shermily, 2021). Motivados por tal definição, neste artigo construímos rotulações antimágicas locais para os grafos pertencentes à classe dos grafos *firefly* e exibimos expressões para o número cromático antimágico local em cada caso. O texto está organizado com os resultados preliminares na próxima seção e os resultados originais na seção seguinte.

2 Preliminares

Nesta seção, são apresentados alguns conceitos e resultados básicos da Teoria de Grafos e algumas definições e teoremas relacionados ao número cromático antimágico local que são necessários para compreensão do texto. Para mais detalhes, sugerimos Diestel (2017) e Merris (2001).

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E = \{v_i v_j; i \neq j, v_i, v_j \in V\}$. Indicamos por $|V|$ e $|E|$, respectivamente, a *ordem* e o *tamanho* de G . Dois vértices distintos, v_i e v_j em V , são ditos *vértices adjacentes* se $v_i v_j \in E$ (e neste caso, diz-se que a aresta $v_i v_j$ *incide* em v_i), a vizinhança de v_i é o conjunto $N_G(v_i) = \{v_j \in V; v_i v_j \in E\}$ e o grau do vértice v_i é dado por $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Os vértices de grau 1 de G , quando existem, são ditos *vértices pendentes* e uma aresta que incide em um vértice pendente é



dita *aresta pendente*. Uma sequência finita (v_1, v_2, \dots, v_k) de vértices de G é dita uma *cadeia* de v_1 a v_k quando $v_i v_{i+1} \in E$, onde $1 \leq i \leq k-1$. A cadeia é dita *fechada* quando $v_1 = v_k$, caso contrário, a cadeia é *aberta*; e a cadeia é dita *simples* quando $v_i \neq v_j$, onde $2 \leq i, j \leq k$. Um *caminho* é uma cadeia simples e aberta e um *ciclo* é uma cadeia simples e fechada. Um *subgrafo* de G é um grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$. Um grafo é dito *conexo* quando seu conjunto de vértices é unitário ou existe um caminho ligando cada par de vértices de G . Caso contrário, o grafo é denominado *desconexo*. Um grafo conexo e sem ciclos é denominado *árvore* e as suas *folhas* são os seus vértices pendentes.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Uma k -coloração de G é uma rotulação $\varphi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Os rótulos são denominados cores; os vértices com a cor i pertencem a uma classe de cor. Uma k -coloração de G é dita própria se vértices adjacentes pertencem a classes de cores distintas e G é k -colorível se admite uma k -coloração própria. O número cromático de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro k para o qual G é k -colorível. Dado $u \in V$, denotemos por $E(u)$ ao conjunto formado pelas arestas de G que incidem em u . As próximas definições são dadas, pela primeira vez, por Arumugam *et al.* (2017).

Definição 2.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de ordem $n \geq 3$ e tamanho m . Uma rotulação antimágica local de G é uma bijeção $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ tal que a rotulação de vértices induzida $f^+ : V \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f^+(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$ tem a propriedade de que quaisquer dois vértices adjacentes em G tenham rótulos induzidos distintos. Um grafo é chamado antimágico local se tem uma rotulação antimágica local.*

De acordo com Haslegrave (2018), todos os grafos conexos de ordem $n \geq 3$ admitem uma rotulação antimágica local.

Definição 2.2. *Seja G um grafo antimágico local de ordem n . O número cromático antimágico local de G , denotado por $\chi_{la}(G)$, é o número mínimo de rótulos de vértices distintos, induzidos sobre todas as rotulações antimágicas locais de G .*

Para todo grafo antimágico local G , o número cromático e o número cromático antimágico local relacionam-se pela desigualdade $\chi_{la}(G) \geq \chi(G)$ e a diferença, $\chi_{la}(G) - \chi(G)$, pode ser arbitrariamente grande, como mostra o teorema a seguir, devido a Arumugam *et al.* (2017).

Teorema 2.3. *Seja T uma árvore de ordem $n \geq 3$. Se T possui ℓ folhas, então $\chi_{la}(T) \geq \ell + 1$.*



Observação 2.4. O Teorema 2.3 foi generalizado por Bača, Semanicová-Fenovčíková e Wang (2021), onde os autores observam que a mesma desigualdade se verifica para grafos de ordem $n \geq 3$ com ℓ vértices pendentes.

3 Resultados principais

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos ao investigarmos o número cromático antimágico local dos grafos na classe *firefly* cuja definição é dada em Aouchiche, Hansen e Lucas (2011).

Definição 3.1. Um grafo *firefly*, denotado por $F_{r,s,t}$, é um grafo de ordem $n = 2r + s + 2t + 1$ e tamanho $m = 3r + s + 2t$, que consiste de r triângulos, s arestas pendentes e t caminhos pendentes de comprimento 2, todos compartilhando um vértice em comum.

Denotemos por \mathcal{F}_n o conjunto formado por todos os grafos *firefly* com n vértices. Note que \mathcal{F}_n contém a estrela, $F_{0,s,0}$, o grafo *stretched star*, $F_{0,s,t}$, o grafo da amizade, $F_{r,0,0}$, e o grafo borboleta, $F_{r,s,0}$. Além disso, para cada $n \geq 2$ temos

$$\mathcal{F}_n = \{F_{r,0,0}, F_{0,s,0}, F_{0,0,t}; r, s, t \geq 1\} \cup \{F_{r,s,0}, F_{r,0,t}, F_{0,s,t}; r, s, t \geq 1\} \cup \{F_{r,s,t}; r, s, t \geq 1\}.$$

Em Arumugam *et al.* (2017) é determinado o número cromático antimágico local de várias classes de grafos tais como caminhos, ciclos, certos grafos bipartidos completos, grafos roda e alguns grafos em \mathcal{F}_n . Em particular, os autores mostram que $\chi_{la}(F_{r,0,0}) = 3$, $\chi_{la}(F_{0,s,0}) = s + 1$ e $\chi_{la}(F_{0,1,t}) = t + 2$. A seguir, determinamos o número cromático antimágico local para os demais grafos em \mathcal{F}_n .

Teorema 3.2. Sejam s e t inteiros positivos. O número cromático antimágico local do grafo *stretched stars*, $F_{0,s,t}$, é dado por $\chi_{la}(F_{0,s,t}) = s + t + 1$.

Prova. Considerando a rotulação de vértices e arestas dada na Figura 1, particionamos os conjuntos de vértices e arestas do grafo $F_{0,s,t}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} V(F_{0,s,t}) &= \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq t\} \cup \{u_i; 1 \leq i \leq t\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq s\}; \\ E(F_{0,s,t}) &= \{cv_i; 1 \leq i \leq t\} \cup \{cw_i; 1 \leq i \leq s\} \cup \{v_iu_i; 1 \leq i \leq t\}. \end{aligned}$$



Agora, consideremos a rotulação de arestas $f : E(F_{0,s,t}) \rightarrow \{1, 2, \dots, s + 2t\}$ dada por

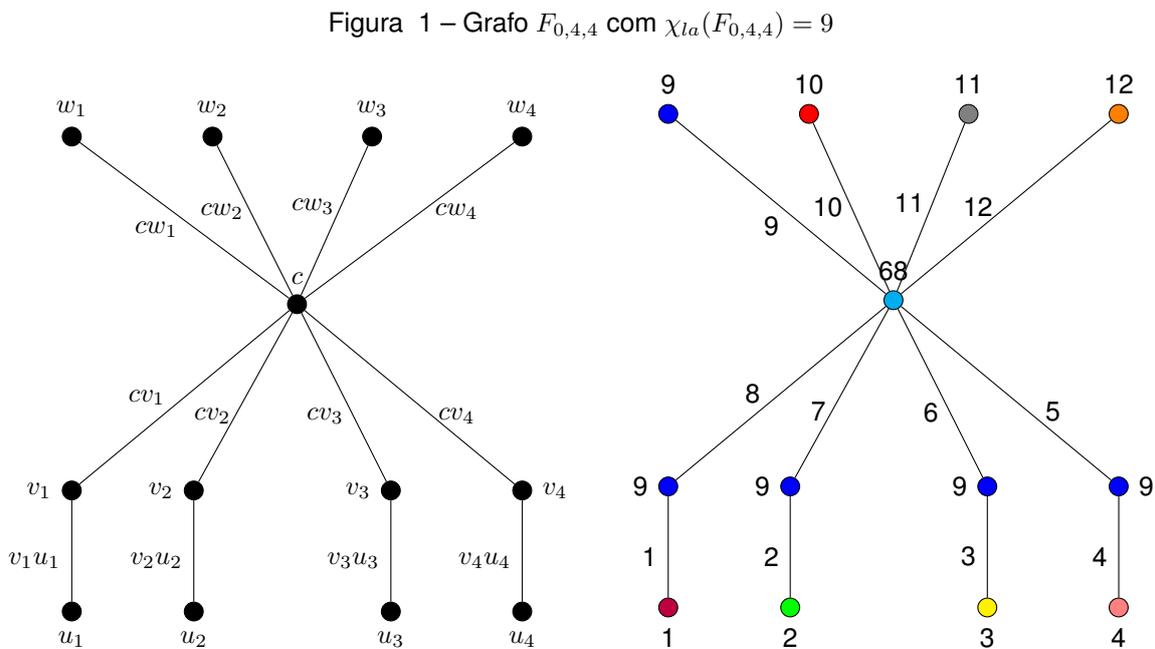
$$\begin{aligned} f(v_i u_i) &= i, & \text{se } 1 \leq i \leq t; \\ f(cv_i) &= 2t + 1 - i, & \text{se } 1 \leq i \leq t; \\ f(cw_i) &= 2t + i, & \text{se } 1 \leq i \leq s. \end{aligned}$$

Note que f é uma rotulação antimágica local para o grafo $F_{r,0,t}$, cujos rótulos de seus vértices, induzidos por f , são

$$\begin{aligned} f^+(u_i) &= i, & \text{se } 1 \leq i \leq t; \\ f^+(v_i) &= 2t + 1, & \text{se } 1 \leq i \leq t; \\ f^+(w_i) &= 2t + i, & \text{se } 1 \leq i \leq s; \\ f^+(c) &= \frac{(s+t)(s+3t+1)}{2}. \end{aligned}$$

Como $f^+(w_1) = 2t+1$, obtemos $\chi_{la}(F_{0,s,t}) \leq s+t+1$. Logo, o resultado segue da combinação desta última desigualdade com o Teorema 2.3.

Na Figura 1, mostramos a rotulação antimágica local do grafo $F_{0,4,4}$ e seu respectivo número cromático antimágico local.



Fonte: Elaboração dos autores.



Teorema 3.3. Para cada inteiro $t \geq 2$, o número cromático antimágico local do grafo starlike, $F_{0,0,t}$, é dado por

$$\chi_{la}(F_{0,0,t}) = \begin{cases} t + 1, & \text{se } t \in \{2, 3\}; \\ t + 2, & \text{se } t \geq 4. \end{cases}$$

Prova. Considerando as rotulações de vértices e arestas, indicadas na Figura 2, particionamos os conjuntos de vértices e arestas de $F_{0,0,t}$ como a seguir.

$$V(F_{0,0,t}) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq t\} \cup \{u_i; 1 \leq i \leq t\};$$

$$E(F_{0,0,t}) = \{cv_i; 1 \leq i \leq t\} \cup \{v_iu_i; 1 \leq i \leq t\}.$$

Consideremos a rotulação de arestas $f : E(F_{0,0,t}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2t\}$ dada por

$$f(cv_i) = i, \quad \text{se } 1 \leq i \leq t;$$

$$f(v_iu_i) = 2t + 1 - i, \quad \text{se } 1 \leq i \leq t.$$

Note que f é uma rotulação antimágica local para o grafo $F_{0,0,t}$, cujos rótulos de seus vértices, induzidos por f , são dados por

$$f^+(v_i) = 2t + 1, \quad \text{se } 1 \leq i \leq t;$$

$$f^+(u_i) = 2t + 1 - i, \quad \text{se } 1 \leq i \leq t;$$

$$f^+(c) = \frac{t(t+1)}{2}.$$

Note que, para $t \in \{2, 3\}$, $\chi_{la}(F_{0,0,t}) \leq t + 1$. Do Teorema 2.3, segue que $\chi_{la}(F_{0,0,t}) = t + 1$ para $t \in \{2, 3\}$.

Para $t \geq 4$, temos $f^+(c) > 2t + 1$ e, conseqüentemente,

$$\chi_{la}(F_{0,0,t}) \leq t + 2. \tag{1}$$

Seja g uma rotulação antimágica local qualquer de $F_{0,0,t}$. Assim, para $1 \leq i \leq t$,

$$g^+(c) = \sum_{k=1}^t f(v_kc) \geq \frac{t(t+1)}{2} > 2t \geq g(v_iu_i) = g^+(u_i).$$

Logo, $g^+(c) \notin \{g^+(u_i), g^+(v_i); 1 \leq i \leq t\}$, donde

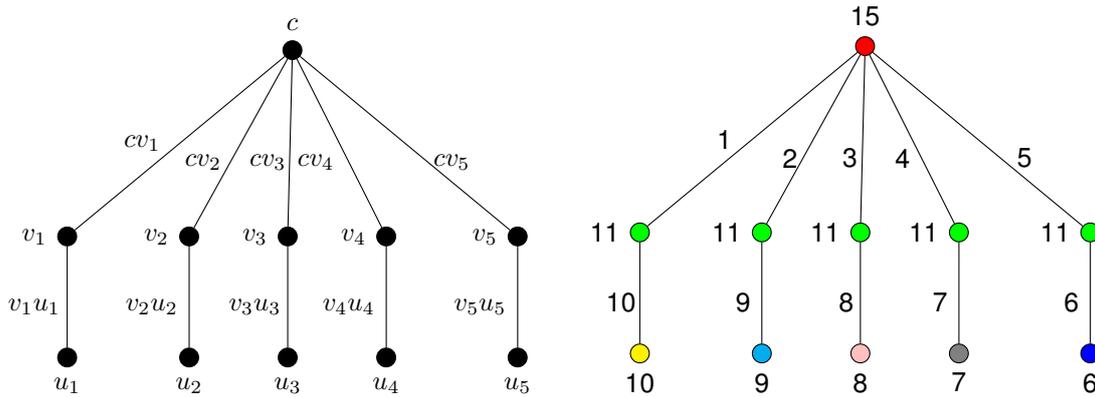
$$\chi_{la}(F_{0,0,t}) \geq t + 2. \tag{2}$$

Portanto, o resultado segue das desigualdades (1) e (2).

Na Figura 2 exibimos a rotulação antimágica local do grafo $F_{0,0,5}$ e seu respectivo número cromático antimágico local.



Figura 2 – Grafo $F_{0,0,5}$ com $\chi_{la}(F_{0,0,5}) = 7$



Fonte: Elaboração dos autores.

Teorema 3.4. *Sejam r e s inteiros positivos. O número cromático antimágico local do grafo borboleta, $F_{r,s,0}$, é dado por*

$$\chi_{la}(F_{r,s,0}) = \begin{cases} 3, & \text{se } s = 1; \\ s + 1, & \text{se } s \geq 2. \end{cases}$$

Prova. *Considerando as rotulações de vértices e arestas, indicadas na Figura 3, particionamos os conjuntos de vértices e arestas de $F_{r,s,0}$ como a seguir.*

$$V(F_{r,s,0}) = \{u_i; 1 \leq i \leq r\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq r\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq s\} \cup \{c\};$$

$$E(F_{r,s,0}) = \{u_i v_i; 1 \leq i \leq r\} \cup \{c u_i; 1 \leq i \leq r\} \cup \{c v_i; 1 \leq i \leq r\} \cup \{c w_i; 1 \leq i \leq s\}.$$

Como $F_{r,0,0}$ é um subgrafo de $F_{r,s,0}$ e $\chi_{la}(F_{r,0,0}) = 3$, obtemos

$$\chi_{la}(F_{r,s,0}) \geq 3. \tag{3}$$

Considere a rotulação de arestas $f : E(F_{r,s,0}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3r + s\}$ dada por

$$\begin{aligned} f(w_i c) &= 2r + 1, \\ f(w_i c) &= 3r + i, & \text{onde } 2 \leq i \leq s; \\ f(u_i v_i) &= i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f(c u_i) &= 2r + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f(c v_i) &= 3r + 2 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

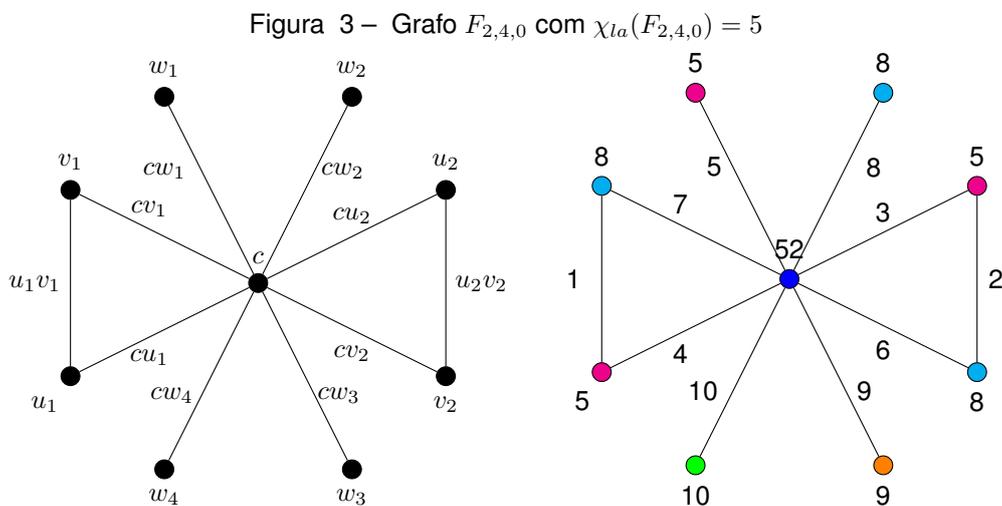


Note que f é uma rotulação antimágica local para o grafo $F_{r,s,0}$, cujos rótulos de seus vértices, induzidos por f , são dados por

$$\begin{aligned} f^+(w_1) &= 2r + 1, \\ f^+(w_i) &= 3r + i, \quad \text{onde } 2 \leq i \leq s; \\ f^+(u_i) &= 2r + 1, \quad \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f^+(v_i) &= 3r + 2, \quad \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f^+(c) &= (2r + 1)^2 + \frac{(s - 1)}{2}(6r + s + 2). \end{aligned}$$

Observe que para $s = 1$, temos $\chi_{la}(F_{r,1,0}) \leq 3$ que, combinado com a desigualdade (3), obtemos $\chi_{la}(F_{r,1,0}) = 3$. Para o caso em que $s \geq 2$, obtemos $\chi_{la}(F_{r,s,0}) \leq s + 1$ e o resultado segue da Observação 2.4.

Na Figura 3, mostramos a rotulação antimágica local do grafo $F_{2,4,0}$ e seu respectivo número cromático antimágico local.



Fonte: Elaboração dos autores.

Teorema 3.5. *Sejam r e t inteiros positivos. O número cromático antimágico local do grafo firefly $F_{r,0,t}$ é dado por*

$$\chi_{la}(F_{r,0,t}) = \begin{cases} t + 2, & \text{se } r \leq t; \\ t + 3, & \text{se } r > t. \end{cases}$$



Prova. Considere as partições dos conjuntos de vértices, $V(F_{r,0,t})$, e de arestas, $E(F_{r,0,t})$, do grafo $F_{r,0,t}$ como segue

$$\{u_i : 1 \leq i \leq t\} \cup \{v_i : 1 \leq i \leq t\} \cup \{w_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{z_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{c\}$$

$$\{v_i u_i : 1 \leq i \leq t\} \cup \{w_i z_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{c v_i : 1 \leq i \leq t\} \cup \{c w_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{c z_i : 1 \leq i \leq r\},$$

onde os vértices u_i, v_i, w_i, z_i e c são denotados de acordo com aqueles ilustrados na Figura 4.

Agora, consideremos a rotulação de arestas $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, 3r + 2t\}$ definida por

$$\begin{aligned} f(w_i z_i) &= t + i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f(v_i u_i) &= 2t + 3r + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq t; \\ f(c v_i) &= i, & \text{onde } 1 \leq i \leq t; \\ f(c w_i) &= 2r + t + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f(c z_i) &= 3r + t + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Como f é uma rotulação antimágica local para o grafo $F_{r,0,t}$, cujos rótulos de seus vértices, induzidos por f , são

$$\begin{aligned} f^+(v_i) &= 2t + 3r + 1, & \text{onde } 1 \leq i \leq t; \\ f^+(u_i) &= 2t + 3r + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq t; \\ f^+(w_i) &= 2t + 2r + 1, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f^+(z_i) &= 2t + 3r + 1, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f^+(c) &= r(4r + 2t + 1) + \frac{t(t + 1)}{2}, \end{aligned}$$

temos que

$$\chi_{la}(F_{r,0,t}) \leq t + 3. \tag{4}$$

Além disso, $f^+(w_i) - f^+(u_i) = i - r$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, donde

$$\chi_{la}(F_{r,0,t}) \leq t + 2 \tag{5}$$

sempre que $r \leq t$.

Seja g uma rotulação antimágica local qualquer de $F_{r,0,t}$. Como g é uma bijeção temos

$$g^+(c) \geq \sum_{k=1}^{2r+t} k > 3r + 2t.$$

Dado que $F_{r,0,t}$ tem tamanho $3r + 2t$, por definição de rotulação antimágica local, para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, concluímos que

$$g^+(u_i) < g^+(v_i) < g^+(c). \tag{6}$$

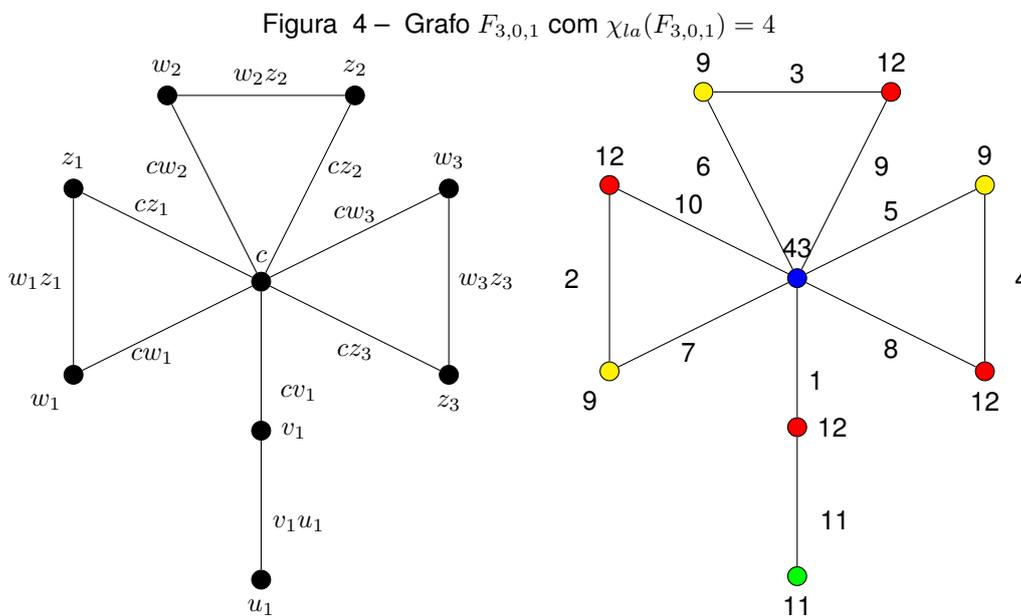


Combinando a desigualdade (6) com a Observação 2.4, obtemos

$$\chi_{la}(F_{r,0,t}) \geq t + 2 \tag{7}$$

e das desigualdades (5) e (7), $\chi_{la}(F_{r,0,t}) = t + 2$, sempre que $r \leq t$. Utilizando técnicas semelhantes à técnica usada na demonstração do Teorema 3.3, conclui-se a demonstração.

Na Figura 4, mostramos a rotulação antimágica local do grafo $F_{3,0,1}$ e seu respectivo número cromático antimágico local.



Fonte: Elaboração dos autores.

O teorema a seguir completa a descrição do número cromático antimágico local dos grafos *firefly*.

Teorema 3.6. *Sejam r, s e t inteiros positivos. O número cromático antimágico local do grafo *firefly* $F_{r,s,t}$ é dado por*

$$\chi_{la}(F_{r,s,t}) = \begin{cases} s + t + 1, & \text{se } r \leq t; \\ s + t + 2, & \text{se } r > t. \end{cases}$$



Prova. Note que o conjunto de vértices e de arestas do grafo $F_{r,s,t}$ podem ser particionados, respectivamente, por

$$V(F_{r,s,t}) = \{u_i : 1 \leq i \leq t\} \cup \{v_i : 1 \leq i \leq t\} \cup \{w_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_i : 1 \leq i \leq s\} \cup \{z_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{c\},$$

$$E(F_{r,s,t}) = \{v_i u_i : 1 \leq i \leq t\} \cup \{w_i z_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{c v_i : 1 \leq i \leq t\} \cup \{c w_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{c z_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_i : 1 \leq i \leq s\},$$

onde os vértices u_i, v_i, w_i, z_i, x_i e c são denotados de acordo com aqueles ilustrados na Figura 5.

Agora, consideremos a rotulação de arestas $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, 3r + 2t + s\}$ definida por

$$\begin{aligned} f(w_i z_i) &= t + i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f(v_i u_i) &= 2t + 3r + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq t; \\ f(c v_i) &= i, & \text{onde } 1 \leq i \leq t; \\ f(c w_i) &= 2r + t + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f(c z_i) &= 3r + t + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f(c x_i) &= 3r + 2t + i, & \text{onde } 1 \leq i \leq s. \end{aligned}$$

Note que f é uma rotulação antimágica local para o grafo $F_{r,s,t}$, cujos rótulos de seus vértices, induzidos por f , são

$$\begin{aligned} f^+(v_i) &= 2t + 3r + 1, & \text{onde } 1 \leq i \leq t; \\ f^+(u_i) &= 2t + 3r + 1 - i, & \text{onde } 1 \leq i \leq t; \\ f^+(x_i) &= 2t + 3r + i, & \text{onde } 1 \leq i \leq s; \\ f^+(w_i) &= 2t + 2r + 1, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f^+(z_i) &= 2t + 3r + 1, & \text{onde } 1 \leq i \leq r; \\ f^+(c) &= r(4r + 2t + 1) + \frac{t(t+1)}{2} + s(2t + 3r). \end{aligned}$$

Logo,

$$\chi_{la}(F_{r,s,t}) \leq s + t + 2. \tag{8}$$

Além disso, para $i = r \leq t$ obtemos $f^+(w_r) = f^+(u_r) = 2t + 3r + 1$. Assim,

$$\chi_{la}(F_{r,s,t}) \leq s + t + 1. \tag{9}$$

Combinando a desigualdade em (9) com a Observação 2.4 obtemos o resultado para $t \leq r$.



Agora, considere $r > t$ e g uma rotulação antimágica local qualquer de $F_{r,s,t}$. Como g é uma bijeção temos

$$g^+(c) > 3r + 2t + s.$$

Dado que $F_{r,s,t}$ tem tamanho $3r + 2t + s$, por definição de rotulação antimágica local, para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, concluímos que

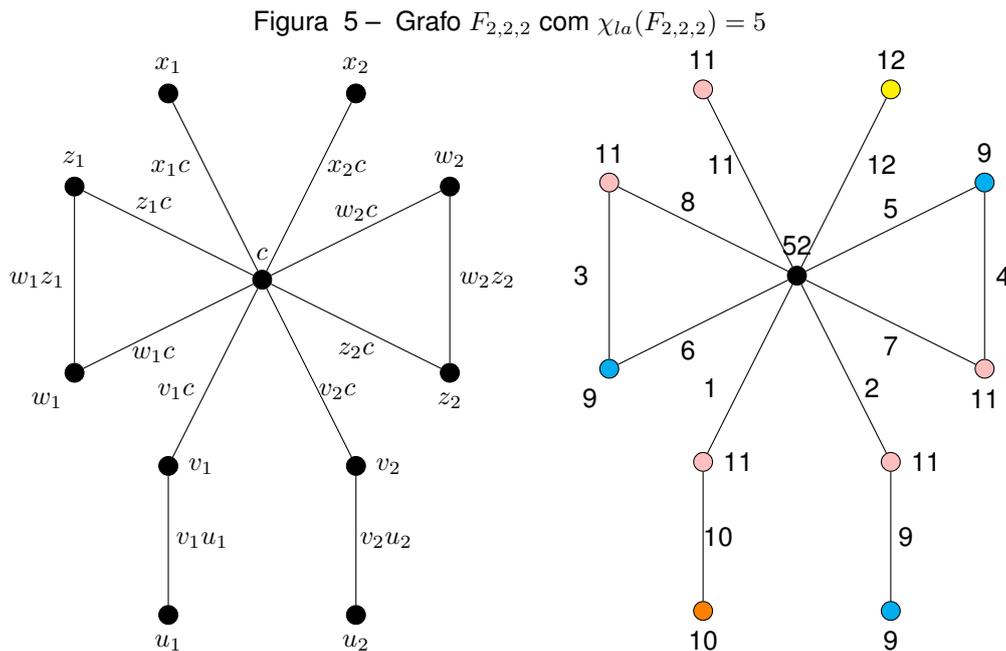
$$g^+(u_i) < g^+(v_i) < g^+(c). \tag{10}$$

Das desigualdades em (10), obtemos

$$\chi_{la}(F_{r,s,t}) \geq s + t + 2 \tag{11}$$

e das desigualdades (8) e (11), $\chi_{la}(F_{r,s,t}) = s + t + 2$, sempre que $r > t$.

Na Figura 5, mostramos a rotulação antimágica local do grafo $F_{2,2,2}$ e seu respectivo número cromático antimágico local.



Fonte: Elaboração dos autores.

4 Considerações finais

Assim como para o número cromático de um grafo, a caracterização do número cromático antimágico local de um grafo é um problema NP-completo e possui aplicações práticas (Utami; Wijaya;



Slamin, 2020), o que justifica a importância da investigação de tal invariante em classes específicas de grafos. Neste artigo, resolvemos esse problema parcialmente, investigamos e determinamos expressões que exibem o número cromático antimágico local de todos os grafos na classe *firefly*.

Referências

- AOUCHICHE, M.; HANSEN, P.; LUCAS, C. On the extremal values of the second largest Q-eigenvalue. **Linear Algebra and its Applications**. v. 435, p. 2591-2606, 2011. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2011.03.051>.
- ARUMUGAM, S.; PREMALATHA, K., BAČA, M.; SEMANIČOVÁ-FEŇOVČÍKOVÁ, A. Local antimagic vertex coloring of a graph. **Graphs and Combinatorics**. v. 33, p. 275-285, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00373-017-1758-7>.
- BAČA, M.; SEMANIČOVÁ-FEŇOVČÍKOVÁ, A.; WANG, T.-M. Local antimagic chromatic number for copies of graphs. **Mathematics**. v. 9, n. 11, p. 1230, 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9111230>.
- BENSMAIL, J.; SENHAJI, M.; LYNGSIE, K. S. On a combination of the 1-2-3 Conjecture and the Antimagic Labelling Conjecture. **Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science**. v. 19, n. 1, 2017. Disponível em: <https://dmtcs.episciences.org/3849/pdf>. Acesso em: 27 jun. 2024.
- DIESTEL, R. Colouring. In: **Graph Theory**. Graduate Texts in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2017. v. 173. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3>.
- ELUMALAI, A. Graph coloring and labelling applications in computer sciences. **Malaya Journal of Matematik**. v. 5, n. 2, p. 4039-4041, 2020. Disponível em: <https://www.malayajournal.org/articles/MJM05201048.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2024.
- GALLIAN, J. A. A dynamic survey of graph labeling. **The Electronic Journal of Combinatorics**. p. 1-644, 2023. DOI: <https://doi.org/10.37236/27>.
- HARTSFIELD, N.; RINGEL, G. **Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction**. San Diego: Academic Press, 1990.
- HASLEGRAVE, J. Proof of a local antimagic conjecture. **Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science**. v. 20, n. 1, 2018. Disponível em: <https://dmtcs.episciences.org/4550/pdf>. Acesso em: 27 jun. 2024.
- MERRIS, R. **Graph Theory**. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- NAZULA, N. H.; SLAMIN, S.; DAFIK, D. Local antimagic vertex coloring of unicyclic graphs. **Indonesian Journal of Combinatorics**. v. 2, n. 1, p. 30-34, 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.19184/ijc.2018.2.1.4>.



SETHURAMAN, G.; SHERMILY, K. M. Antimagic labeling of new classes of trees. **AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics**. v. 18, n. 2, p. 110-116, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1080/09728600.2021.1964334>.

UTAMI, W.; WIJAYA, K.; SLAMIN. Application of the local antimagic total labeling of graphs to optimise scheduling system for an expatriate assignment. **Journal of Physics: Conference Series**. v. 1538, n. 1, p. 012013, 2020. DOI: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1538/1/012013>.

Agradecimentos

Este artigo é parcialmente financiado pelo MATH-AMSUD no âmbito do projeto GSA, equipe brasileira financiada pela CAPES no projeto 88881.694479/2022-01. A primeira autora agradece o apoio da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), Processo E-26/202.105/2021. Os demais autores agradecem o apoio da FAPERJ, Processo E-20/2022-284573, e ao apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Processo 405552/2023-8.

