

Comportamento do número de condicionamento na Formulação Variacional Ultra Fraca, com funções de Bessel como base para a equação de Helmholtz não homogênea¹

Behavior of the conditioning number in the Ultra-Weak Variational Formulation, with Bessel functions as a basis for the non-homogeneous Helmholtz equation

Comportamiento del número de condicionamiento en la Formulación Variacional Ultra Débil, con funciones de Bessel como base para la ecuación de Helmholtz no homogénea

Julius Monteiro de Barros Filho²

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), Nova Iguaçu, RJ
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-2688-920X>,  <http://lattes.cnpq.br/9004019590106442>

Fernanda Lúcia Sá Ferreira³

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), Nova Iguaçu, RJ
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-0921-2494>,  <http://lattes.cnpq.br/5576155484322896>

Amaury Alvarez Cruz⁴

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Programa de Pós-Graduação em Informática (PPGI), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-5513-7974>,  <http://lattes.cnpq.br/0370476774197561>

Daniel Gregorio Alfaro Vigo⁵

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), PPGI, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-3280-8720>,  <http://lattes.cnpq.br/8694890749217765>

¹ Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

² **Currículo sucinto:** Bacharel e mestre em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, mestre em Modelagem Matemática e Computacional pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, especialista em Planejamento, Gestão e Implementação da Educação a Distância pela Universidade Federal Fluminense e doutorando do Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Docente do CEFET-RJ. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Metodologia, Software, Validação, Análise formal, Investigação, Escrita – primeira redação, Escrita – revisão e edição. **Contato:** julius.filho@cefet-rj.br.

³ **Currículo sucinto:** Bacharel e mestra em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, mestra em Modelagem Matemática e Computacional pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, especialista em Planejamento, Gestão e Implementação da Educação a Distância pela Universidade Federal Fluminense e doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Docente do CEFET-RJ. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Metodologia, Software, Validação, Análise formal, Investigação, Escrita – primeira redação, Escrita – revisão e edição. **Contato:** fernanda.ferreira@cefet-rj.br.

⁴ **Currículo sucinto:** Graduado e mestre em Matemática pela Universidade de Havana, doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Realizou pós-doutorado no IMPA. Docente do Instituto de Computação da UFRJ. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Metodologia, Software, Validação, Análise formal, Investigação, Escrita – primeira redação, Escrita – revisão e edição. **Contato:** amaury@dcc.ufrj.br.

⁵ **Currículo sucinto:** Graduado em Mecânica-Matemática pela *Moscow State University*, mestre em Matemática Aplicada pela *Universidad Central de Las Villas* e doutor em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Docente no Instituto de Computação da UFRJ. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Metodologia, Escrita – revisão e edição. **Contato:** dgalfaro@ic.ufrj.br.



Resumo: A Formulação Variacional Ultra Fraca (*Ultra Weak Variational Formulation – UWVF*) se apresenta como uma metodologia promissora para a simulação de vários fenômenos ondulatórios. No entanto, o sistema linear oriundo da discretização dessa formulação pode ser bastante mal condicionado, comprometendo assim as estratégias para a estimativa de erro da solução aproximada. Nesta pesquisa, é feita uma análise do condicionamento do sistema linear subjacente em relação à escolha de certas famílias de funções de base, incluindo as clássicas ondas planas, na UWVF aplicada a um problema de valor de contorno (PVC) para a equação de Helmholtz. Dentre as famílias implementadas, a formada por ondas cilíndricas baseadas em funções de Bessel, escaladas com um fator global também baseado em função de Bessel, se destacou por implicar em um número de condicionamento bastante menor do que os produzidos pelas demais famílias. Esse destaque foi observado em todos os experimentos numéricos realizados, tanto para o caso da equação Helmholtz homogênea quanto para o caso não homogêneo, variando-se tanto o número de funções da família em questão quanto o refinamento das malhas computacionais utilizadas.

Palavras-chave: formulação variacional ultra fraca; equação de Helmholtz; sistemas mal condicionados; ondas cilíndricas; funções de Bessel.

Abstract: The Ultra Weak Variational Formulation (UWVF) emerges as a promising methodology for simulating various wave phenomena. However, the linear system resulting from the discretization of this formulation can be highly ill-conditioned, compromising strategies for estimating the error of the approximate solution. In this research, we analyze the conditioning of the underlying linear system concerning the choice of certain families of basis functions, including classical plane waves, in the UWVF applied to a boundary value problem (BVP) for the Helmholtz equation. Among the implemented families, the one formed by cylindrical waves based on Bessel functions, scaled by a global factor also based on Bessel functions, stood out for implying a significantly lower conditioning number than those produced by other families. This prominence was observed in all numerical experiments conducted, both for the case of the homogeneous Helmholtz equation and for the non-homogeneous case, while varying both the number of functions in the family in question and the refinement of the computational meshes used.

Keywords: ultra weak variational formulation; Helmholtz equation; ill-conditioned systems; cylindrical waves; Bessel functions.

Resumen: La Formulación Variacional Ultra Débil (*Ultra Weak Variational Formulation – UWVF*) se presenta como una metodología prometedor para la simulación de varios fenómenos ondulatorios. Sin embargo, el sistema lineal resultante de la discretización de esta formulación puede ser bastante mal condicionado, comprometiendo así las estrategias para la estimación del error de la solución aproximada. En esta investigación, se realiza un análisis del condicionamiento del sistema lineal subyacente en relación con la elección de ciertas familias de funciones de base, incluyendo las clásicas ondas planas, en la UWVF aplicada a un problema de valor de contorno (PVC) para la ecuación de Helmholtz. Entre las familias implementadas, la formada por ondas cilíndricas basadas en funciones de Bessel, escaladas con un factor global también basado en funciones de Bessel, se destacó por implicar en un número de condicionamiento significativamente menor que los producidos por las demás familias. Este destacado se observó en todos los experimentos numéricos realiza-



dos, tanto para el caso de la ecuación de Helmholtz homogénea como para el caso no homogéneo, variando tanto el número de funciones en la familia en cuestión como el refinamiento de las mallas computacionales utilizadas.

Palabras clave: formulación variacional ultra débil; ecuación de Helmholtz; sistemas mal condicionados; ondas cilíndricas; funciones de Bessel.

Data de submissão: 11 de janeiro de 2024.

Data de aprovação: 27 de abril de 2024.

1 Introdução

A aproximação numérica de problemas de propagação de ondas é um tema de grande relevância científica. A fidelidade da modelagem matemática em relação ao fenômeno físico e a complexidade computacional dos algoritmos utilizados são pontos de discussão fundamentais, como mostram os trabalhos de Bayliss, Goldstein e Turkel (1985), Hiptmair, Moiola e Perugia (2016) e Juraev *et al.* (2024), por exemplo. Muitos desses modelos recaem em uma Equação Diferencial Parcial (EDP), conhecida por equação de Helmholtz.

Neste artigo vamos analisar alguns aspectos numéricos de uma metodologia usada na simulação de fenômenos ondulatórios conhecida por formulação variacional ultra fraca (*Ultra Weak Variational Formulation* – UWVF), introduzida originalmente por Cessenat e Després (1998). A UWVF foi desenvolvida primeiramente com ondas planas como funções de base. Esta ferramenta computacional mostrou-se útil para a solução numérica das equações de Helmholtz e Maxwell.

Métodos numéricos que utilizam ondas planas como funções de base têm sido amplamente estudados em física computacional e análise numérica, com o objetivo de aproximar a solução da equação de Helmholtz (Farhat; Harari; Hetmaniuk (2003); Gittelsohn; Perugia (2008); Hiptmair; Ledger (2003); Laghrouche; Bettess; Astley (2002); Tezaur; Farhat (2006), para alguns exemplos). O interesse por métodos que utilizam funções de base mais sofisticadas aumentou recentemente, visando os desafios encontrados em problemas de alta frequência. O uso de outras famílias de funções como base para a UWVF foi explorado em trabalhos como Luostari, Huttunen e Monk (2012) e Howarth, Childs e Moiola (2014). Além disso, sua aplicação tem sido estendida a outras equações (veja o trabalho de Alvarez, García e Sarkis (2017), para um exemplo). No entanto, o sistema linear oriundo da discretização dessa formulação pode ser bastante mal condicionado, comprometendo assim as estratégias para a estimativa de erro da solução aproximada.



Na presente pesquisa, investiga-se o uso de algumas famílias de funções como base na UWVF para a equação de Helmholtz homogênea e não homogênea, buscando soluções aproximadas altamente precisas. Em particular, são consideradas funções de Bessel de primeira espécie e funções de Hankel (funções de Bessel de terceira espécie) como funções de base. Detalhes sobre essas funções podem ser vistos no livro de Watson (1966). A ideia é explorar o comportamento do número de condicionamento do sistema linear em relação ao tipo e número de funções de base escolhidas, bem como o tipo de elemento finito utilizado na discretização do domínio computacional.

O artigo está estruturado da seguinte maneira: na Seção 2 é feita uma descrição do problema de valor de contorno para a equação de Helmholtz. Na Seção 3 é apresentado a UWVF, desenvolvendo os detalhes necessários para a resolução numérica do problema de Helmholtz proposto. Na Seção 4 são apresentadas as famílias de funções que foram usadas na UWVF. Na Seção 5 são desenvolvidos os detalhes sobre condicionamento de sistemas lineares, necessários para as análises dos experimentos numéricos realizados no trabalho. Na Seção 6 são apresentadas as simulações e os experimentos numéricos, bem como suas discussões e análise. Por fim, na Seção 7, as conclusões do estudo são destacadas.

2 O Problema de Helmholtz

Seja Ω um meio não homogêneo. A equação de Helmholtz para uma função desconhecida u se apresenta como

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) + \frac{\kappa^2}{\rho} u = f,$$

onde ρ e f são funções reais, com ρ positiva, e κ é uma função complexa, todas definidas em Ω . Trata-se de uma importante EDP elíptica amplamente utilizada nas áreas de Acústica e Eletromagnetismo, como retratado no livro de Nédélec (2001).

Na Acústica, trata-se de uma representação da equação da onda no domínio da frequência e, por isso, ρ representa a densidade do meio, κ o número de onda e u o campo de pressão acústica, para um determinado valor de frequência. Maiores detalhes da construção do modelo podem ser vistos no livro de Auld (1973).

Além das áreas supracitadas, a equação de Helmholtz não homogênea surge em vários outros problemas relevantes, como problemas inversos (Borges; Gillman; Greengard, 2017), geofísica computacional (Howarth; Childs; Moiola, 2014), esquemas de diferenças para a equação de difu-



são (Luostari; Huttunen; Monk, 2012). Naturalmente, são produzidos problemas com valores de contorno.

Neste trabalho, o seguinte problema de Helmholtz para uma função desconhecida u é considerado:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) + \frac{\kappa^2}{\rho} u = f, \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - i\sigma u \right) = Q \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - i\sigma u \right) + g, \quad \text{em } \partial\Omega \quad (2)$$

onde Ω é um domínio de Lipschitz. A densidade ρ é uma função real positiva e o número de onda κ é uma função complexa, ambas definidas em Ω . O parâmetro σ é um número real positivo e \mathbf{n} é o vetor normal apontando para o exterior de $\partial\Omega$. Note que, se o parâmetro $Q \in \mathbb{C}$ é tal que $Q = -1$, a condição de fronteira é do tipo Dirichlet, se $Q = 1$ a condição de fronteira é do tipo Neumann, enquanto que, se $Q = 0$, a condição de fronteira é do tipo Robin. Na primeira equação, o termo fonte f é uma função conhecida, assim como a função g na segunda equação.

3 Formulação Variacional Ultra Fraca

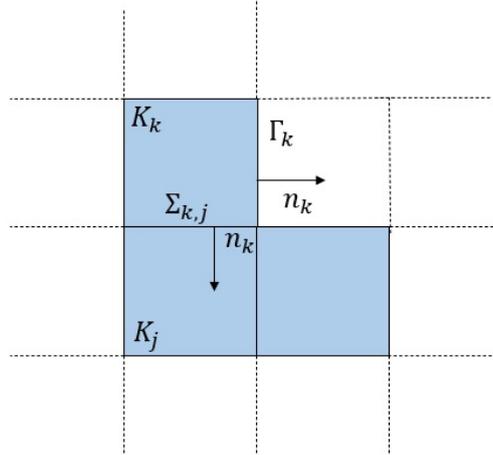
Dentre as várias metodologias numéricas que utilizam ondas planas como funções de base, este trabalho aborda o método da Formulação Variacional Ultra Fraca, introduzido originalmente por Cessenat e Després (1998). Como o foco da pesquisa é a simulação computacional, é feita uma construção direta do método, bastante próxima à feita na formulação original. No entanto, a UWVF pode ser concebida como um caso de método de Galerkin descontínuo, que se mostra mais interessante para as análises de estimativa de erro, como está feito no trabalho de Gittelsohn, Hiptmair e Perugia (2009), por exemplo.

Na Formulação Variacional Ultra Fraca (UWVF), o domínio do problema é particionado em um conjunto de elementos finitos $\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$, dois a dois disjuntos, formando uma malha (ver Figura 1). A solução exata do problema de contorno é aproximada por uma combinação linear específica de funções de base que, no interior de cada elemento da malha, são soluções da equação de Helmholtz homogênea. Essa exigência leva, inevitavelmente, à adoção de funções de base não polinomiais. Com isso, incorpora-se o comportamento oscilatório das soluções da equação de Helmholtz na combinação linear aproximante. A borda entre os elementos K_k e K_j é denotada por $\sum_{k,j}$, o vetor normal em ∂K_k por \mathbf{n}_k , e a borda exterior por $\Gamma_k = \partial\Omega \cap \partial K_k$. Além das caracterís-



ticas geométricas, a malha para a UWVF é construída de tal forma que, em cada elemento K_k , os parâmetros físicos ρ e k sejam constantes.

Figura 1 – Malha particionada em elementos finitos



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Essa abordagem de particionar o domínio em elementos finitos permite uma representação mais localizada e adaptável da solução, permitindo uma melhor resolução do problema em regiões de interesse. A malha pode ser refinada, adicionando-se mais elementos finitos onde necessário, para obter uma solução mais precisa.

Com isso, o problema de Helmholtz pode ser decomposto em subproblemas, todos em meios homogêneos, obtendo-se assim

$$\Delta u_k + \kappa_k^2 u_k = f \quad \text{em } K_k, \tag{3}$$

$$\left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma u_k \right) = Q \left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma u_k \right) + g \quad \text{em } \Gamma_k, \tag{4}$$

com condições de transmissão através de uma borda $\Sigma_{k,j}$ dadas por

$$u_k = u_j, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}_k} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{n}_j}. \tag{6}$$

Essas condições garantem a continuidade do campo u através das interfaces entre os elementos da malha.

Então, para cada elemento K_k , temos o problema dado pelas equações (3) e (4), juntamente com as condições (5) e (6) em $\Sigma_{k,j}$.



Daqui em diante, fixa-se a seguinte notação: para um domínio limitado $D \subset \mathbb{R}^d$, $H^s(D)$, $s \in \mathbb{N}$, denota o espaço de Sobolev *standard* de ordem s de funções complexas. Para $s = 0$, escreve-se $L^2(D)$ ao invés de $H^0(D)$. Para detalhes sobre os espaços de Sobolev, é indicado o livro de Medeiros e Miranda (2010).

Supondo $u_k \in H^2(K_k)$ e definindo uma nova função χ_k no “esqueleto” da malha,

$$\chi_k = \left(\left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) u_k \right) \Big|_{\partial K_k} \quad k = 1, 2, 3, \dots, N$$

obtemos, por integração,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\partial K_k} \frac{1}{\sigma_k} \overline{\chi_k \left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) v_k} &= \sum_{k=1}^N \int_{\partial K_k} \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) u_k \overline{\left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) v_k} \\ &\quad - \sum_{k=1}^N -2i \int_{K_k} f \overline{v_k}, \end{aligned}$$

para todas as funções teste v_k que satisfaçam a equação de Helmholtz adjunta, ou seja,

$$\Delta \overline{v_k} + \kappa_k^2 \overline{v_k} = 0. \tag{7}$$

Como $\partial K_k = \cup_j \Sigma_{k,j} \cup \Gamma_k$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\partial K_k} \frac{1}{\sigma_k} \overline{\chi_k \left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) v_k} &= \sum_{k=1}^N \sum_j \int_{\Sigma_{k,j}} \frac{1}{\sigma_k} \overline{\chi_j \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) v_k} \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[\int_{\Gamma_k} \frac{Q}{\sigma_k} \overline{\chi_k \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) v_k} + \int_{\Gamma_k} \frac{g}{\sigma_k} \overline{\left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) v_k} \right] - \sum_{k=1}^N -2i \int_{K_k} f \overline{v_k}, \end{aligned}$$

que é a formulação variacional ultra fraca para o problema de Helmholtz em meios heterogêneos.

Define-se, ainda, $F_k : L^2(\partial K_k) \rightarrow L^2(\partial K_k)$ por

$$F_k(y_k) = \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) v_k \Big|_{\partial K_k},$$



onde $v_k \in H^1(K_k)$ satisfaz a equação de Helmholtz e $\left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k\right) v_k = y_k$ em ∂K_k . Com isso, a UWVF se apresenta como:

$$\sum_{k=1}^N \int_{\partial K_k} \frac{1}{\sigma_k} \chi_k \overline{y_k} - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_k} \chi_k \overline{F_K(y_K)} - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{Q}{\sigma_k} \chi_k \overline{F_K(y_K)} = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{g}{\sigma_k} \overline{F_K(y_K)} - 2i \sum_{k=1}^N \int_{K_k} f \overline{v_k}.$$

Nessa formulação UWVF, as funções desconhecidas χ_k são calculadas em ∂K_k usando as funções teste y_k , que também são funções em ∂K_k . Uma vez que cada χ_k foi calculado, tem-se, pelas condições de transmissão,

$$\chi_k + \chi_j = -2i\sigma u_j \quad \text{em } \Sigma_{k,j}.$$

Portanto,

$$u|_{\Sigma_{k,j}} = \frac{i}{2\sigma} (\chi_k + \chi_j).$$

3.1 Discretização

Ainda seguindo a apresentação feita no trabalho original de Cessenat e Després (1998), a UWVF é discretizada usando o método de Galerkin. Então, deve-se escolher subespaços de dimensão finita dos espaços $L^2(\partial K_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Para cada elemento K_k da malha, uma família finita de funções $\phi_{k,l}$, $l = 1, 2, \dots, n_k$ é escolhida de modo a satisfazer a equação de Helmholtz adjunta em K_k e $\phi_{k,l} = 0$ em $\Omega - \overline{K_k}$. O espaço aproximante discreto de $L^2(\partial K_k)$ é formado por todas as funções y_k^a tais que

$$y_k^a = \sum_{l=1}^{N_k} y_{k,l} \left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k\right) \phi_{k,l} \quad \text{em } \Sigma_{k,j} \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Analogamente,

$$\chi_{k,l} = \sum_{l=1}^{N_k} \chi_{k,l} \left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k\right) \phi_{k,l} \quad \text{em } \Sigma_{k,j} \quad k = 1, 2, \dots, N,$$



onde $\{\chi_{k,l}\}_{l=1}^{N_k}$ são os parâmetros a serem calculados. Note que $F_k(y_k^a) = \sum_{l=1}^{N_k} \chi_{k,l} \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) \phi_{k,l}$.

O problema aproximado para a UWVF é obtido substituindo-se χ_k por χ_k^a e y_k por y_k^a , tendo a seguinte escrita matricial:

$$(D - C)X = b, \tag{8}$$

onde $X = (\chi_{11}, \dots, \chi_{1N_k}, \chi_{21}, \dots, \chi_{2N_k}, \dots, \chi_{N1}, \dots, \chi_{NN_k})^T$ e

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_N \end{bmatrix}, \tag{9}$$

em que D é uma matriz hermitiana, positiva definida, estruturada por blocos D_k dados por

$$D_k^{l,m} = \int_{\partial K_k} \frac{1}{\sigma_k} \left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \phi_{k,m}}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \phi_{k,m} \right) \overline{\left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) \phi_{k,l}}. \tag{10}$$

A matriz C também é estruturada por blocos, sendo dada por

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1N_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_k1} & \dots & C_{N_kN_k} \end{bmatrix} \tag{11}$$

onde

$$C_{k,j}^{l,m} = \int_{\Sigma_{k,j}} \frac{1}{\sigma_k} \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \phi_{j,m}}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \phi_{j,m} \right) \overline{\left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \right) \phi_{k,l}} + \int_{\Gamma_k} \frac{Q}{\sigma_k} \left(-\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \phi_{k,m}}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \phi_{k,m} \right) \overline{\left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \phi_{k,l} \right)}. \tag{12}$$

E, por fim,

$$b_j^k = \int_{\Gamma_k} \frac{g}{\sigma_k} \overline{\left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k \phi_{k,l} \right)} - 2i \int_{K_k} f \overline{\phi_{k,l}}.$$

Uma vez resolvido o sistema, a solução aproximada fica:

$$u = \sum_{l=1}^{N_k} \chi_{k,l} \phi_{k,l}, \quad \text{em } K_k.$$



4 Funções de Base

A seguir, são apresentadas as famílias de funções de base investigadas nos experimentos numéricos 2-D da presente pesquisa. Todas essas funções satisfazem a equação (7). Para a implementação das matrizes (9) e (11), é necessário o cálculo do gradiente dessas funções para o uso nas equações (10) e (12).

A base de ondas planas foi a família introduzida nos trabalhos originais de Cessenat e Després (1998). A principal vantagem é que suas funções podem ser integradas analiticamente. Elas são dadas por

$$\phi_{k,l}(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{i\bar{\kappa}_k d_{k,l} \cdot \mathbf{x}} & \text{em } K_k, \\ 0 & \text{em } \Omega - K_k, \end{cases}$$

onde $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$ e

$$d_{k,l} = \left(\cos \left(2\pi \frac{l-1}{n_k} \right), \sin \left(2\pi \frac{l-1}{n_k} \right) \right) \quad l = 1, 2, \dots, n_k,$$

em que n_k representa o número de funções de base. Os gradientes são dados por

$$\nabla \phi_{k,l} = i\bar{\kappa}_k e^{i\bar{\kappa}_k d_{k,l} \cdot \mathbf{x}} \left(\cos \left(2\pi \frac{l-1}{n_k} \right), \sin \left(2\pi \frac{l-1}{n_k} \right) \right).$$

No trabalho de Gittelson, Hiptmair e Perugia (2009) é observado que este tipo de família tende a produzir sistemas muito mal condicionados para valores altos do número de funções n_k .

Na base de ondas cilíndricas, que usa funções de Bessel de 1ª espécie, temos

$$\phi_{k,l}(\mathbf{x}) = \begin{cases} J_l(\bar{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|) e^{il\theta} & \text{em } K_k, \\ 0 & \text{em } \Omega - K_k, \end{cases}$$

onde $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$, l é a ordem da função de Bessel J_l e θ é o ângulo polar sobre o baricentro do elemento $\mathbf{x}_{0,k} = (x_{0,k}, y_{0,k})$. Os gradientes são dados por

$$\frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial x} = \frac{e^{il\theta}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|} \left(\frac{\kappa_k(x - x_{0,k})}{2} [J_{l-1}(\bar{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|) - J_{l+1}(\bar{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|)] - \frac{il(y - y_{0,k})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|} J_l(\bar{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|) \right)$$



e

$$\frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial y} = \frac{e^{il\theta}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|} \left(\frac{\kappa_k(y - y_{0,k})}{2} [J_{l-1}(\overline{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|) - J_{l+1}(\overline{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|)] - \frac{il(x - x_{0,k})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|} J_l(\overline{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|) \right).$$

A base de ondas cilíndricas com fator de escala é uma redefinição da família anterior. Seguindo a sugestão dada nos trabalhos de Gittelson, Hiptmair e Perugia (2009) e de Luostari, Huttunen e Monk (2012), temos

$$\phi_{k,l}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{J_l(\overline{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,k}\|)}{J_l(\overline{\kappa}_k L_k)} e^{il\theta} & \text{em } K_k \\ 0 & \text{em } \Omega - K_k \end{cases},$$

onde L_k é um fator de escala.

A base de Trefftz, que é construída a partir de funções de Hankel, foi utilizada no trabalho de Howarth, Childs e Moiola (2014) para um problema não homogêneo específico. Suas funções são dadas por

$$\phi_{k,l}(\mathbf{x}) = \begin{cases} H_0^1(\overline{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{k,l}\|) & \text{em } K_k, \\ 0 & \text{em } \Omega - K_k \end{cases},$$

onde H_0^1 é a função de Hankel, $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$,

$$\mathbf{y}_{k,l} = \left(x_{0,k} + R \cos\left(2\pi \frac{l}{n_k}\right), y_{0,k} + R \sin\left(2\pi \frac{l}{n_k}\right) \right) \quad l = 1, 2, \dots, n_k,$$

$\mathbf{x}_{0,k} = (x_{0,k}, y_{0,k})$ é o baricentro do elemento, e R é um escalar real.

Os gradientes são dados por

$$\frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial x} = \frac{\kappa_k \left(x - x_{0,k} + R \cos\left(\frac{2\pi l}{n_k}\right) \right)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{k,l}\|} H_1^1(\overline{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{k,l}\|) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial y} = \frac{\kappa_k \left(y - y_{0,k} + R \cos\left(\frac{2\pi l}{n_k}\right) \right)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{k,l}\|} H_1^1(\overline{\kappa}_k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{k,l}\|).$$



5 Condicionamento de Matrizes

Como o foco do trabalho é analisar o condicionamento do sistema linear dado por (8), apresentam-se os conceitos básicos e fundamentais sobre condicionamento matricial. O assunto é amplamente abordado na literatura dedicada à Álgebra Linear Computacional. Como referência, e maior profundidade, dos conceitos e resultados apresentados nesta seção, recomenda-se o livro de Cheney e Kincaid (2007).

Considere um sistema de equações lineares na forma matricial $Ax = b$, onde a matriz quadrada A é não singular. Seja x_{ex} a (única) solução deste sistema ($x_{ex} = A^{-1}b$, onde A^{-1} denota a inversa da matriz A). Em métodos aproximados, não se tem, na prática, acesso a esta solução exata. Seja \tilde{x} uma solução aproximada para o problema. Então, define-se o erro (absoluto) cometido pela solução aproximada por $e = x_{ex} - \tilde{x}$ e o resíduo da solução aproximada como $r = b - A\tilde{x}$. Note que o resíduo, como definido acima, sempre pode ser calculado. Além disso, $r = Ae$. Como, na prática, não é possível o acesso direto ao valor do erro cometido, usa-se, como medida indireta da acurácia da aproximação, o valor do resíduo. Portanto, é necessário o entendimento quantitativo de como essa estimativa se apresenta em relação ao valor do erro.

Considerando o espaço vetorial das matrizes munido de uma norma induzida, $\| \cdot \|$, pode-se escrever

$$r = Ae \Rightarrow \begin{cases} \| r \| \leq \| A \| \| e \| \\ \| e \| \leq \| A^{-1} \| \| r \| \end{cases} \Rightarrow \frac{\| r \|}{\| A \|} \leq \| e \| \leq \| A^{-1} \| \| r \| .$$

Por outro lado,

$$b = Ax_{ex} \Rightarrow \begin{cases} \| b \| \leq \| A \| \| x_{ex} \| \\ \| x_{ex} \| \leq \| A^{-1} \| \| b \| \end{cases} \Rightarrow \frac{\| b \|}{\| A \|} \leq \| x_{ex} \| \leq \| A^{-1} \| \| b \| .$$

Portanto,

$$\frac{1}{\| A \| \| A^{-1} \|} \frac{\| r \|}{\| b \|} \leq \frac{\| e \|}{\| x_{ex} \|} \leq \| A \| \| A^{-1} \| \frac{\| r \|}{\| b \|} .$$

O número de condicionamento da matriz A (ou do sistema $Ax = b$) é definido como sendo o seguinte número real: $cond(A) = \| A \| \| A^{-1} \|$. No presente trabalho, é usada a norma induzida pela norma euclidiana. Na norma euclidiana induzida, o número de condicionamento se apresenta,



explicitamente, como

$$\text{cond}(A) = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}, \tag{13}$$

onde $\sigma_{\max}(A)$ representa o maior valor singular de A e $\sigma_{\min}(A)$ o menor valor singular.

Uma vez que $\| \cdot \|$ é uma norma induzida, sempre vale $\text{cond}(A) \geq 1$. Sob esta definição, a última inequação é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\| r \|}{\| b \|} \leq \frac{\| e \|}{\| x_{ex} \|} \leq \text{cond}(A) \frac{\| r \|}{\| b \|}.$$

Com isso, o resíduo da solução aproximada só se apresenta como um majorante útil para o erro (relativo) da aproximação quando o número de condicionamento da matriz A é um valor próximo de 1. Uma matriz A é dita bem condicionada quando $\text{cond}(A) \approx 1$. Se $\text{cond}(A) \gg 1$, a matriz A é dita mal condicionada.

No sistema linear $(D - C)X = b$, resultante da UWVF (equação (8)), a matriz D (9) é, em geral, extremamente mal condicionada. O número de condicionamento desta matriz depende de vários fatores. No trabalho de Cessenat e Després (1998), mostrou-se que os blocos D_k (equação (10)) da matriz D têm seus números de condicionamento limitados inferiormente por

$$Ch_k^{-2\text{int}(\frac{n_k}{2} + 2)}, \tag{14}$$

onde C é uma constante positiva, h_k é o diâmetro dos elementos finitos e $\text{int}(\frac{n_k}{2} + 2)$ é a parte inteira de $\frac{n_k}{2} + 2$. A equação (14) revela que o condicionamento da matriz D se deteriora quando a malha vai sendo refinada ou quando o número de funções de base aumenta. Simulações numéricas feitas no trabalho de Howarth, Childs e Moiola (2014) mostram que o número de condicionamento também depende no número de onda usado na equação (3). Com isso, vê-se que o comportamento do condicionamento do sistema dado por (8) exige a avaliação de várias variáveis independentes. Na tese de doutorado de Cessenat (1996), recomenda-se a forma preconditionada

$$(I - D^{-1}C)X = D^{-1}b. \tag{15}$$

Nos experimentos numéricos a seguir, é investigada a influência do tipo de função de base e do diâmetro h da malha de elementos finitos no condicionamento do sistema linear dado por (8).



6 Simulações Numéricas

Na presente seção, são realizados experimentos numéricos para investigar tanto o caso homogêneo quanto o não homogêneo. O objetivo principal é analisar como o tamanho da malha de elementos finitos, o tipo e a quantidade de funções de base influenciam o número de condicionamento dos sistemas lineares associados à UWVF em cada cenário experimental. Todos os domínios considerados são retangulares, e os números de onda são mantidos constantes. As condições de contorno dadas em (2) para os problemas de Helmholtz são obtidas a partir de soluções analíticas correspondentes à equação(1).

As implementações computacionais foram realizadas na plataforma MATLAB (MATLAB, 2020), permitindo a seleção das diferentes famílias de funções de base abordadas neste estudo. As matrizes dadas em (9) e (11) foram implementadas utilizando computação paralela. Exceto no caso da base de ondas planas, onde as integrais necessárias para as matrizes D , C , e b podem ser resolvidas analiticamente, as integrais das equações (10) e (12) foram aproximadas usando o método da quadratura de Gauss-Legendre, com 50 pontos. O esquema numérico foi calibrado e validado usando soluções analíticas para ambos os casos, homogêneo e não homogêneo, com bons resultados para todas as famílias de funções discutidas.

Para as funções da família de ondas cilíndricas, os fatores de escala foram definidos como a maior das arestas em cada elemento da malha de elementos finitos. A resolução dos sistemas lineares foi realizada utilizando o método dos Resíduos Mínimos Generalizados e o método do Gradiente Biconjugado Estabilizado. Destes, o último demonstrou resultados superiores. O número de condicionamento das matrizes foi avaliado na norma 2 (equação (13)).

Inicialmente, para o caso homogêneo, foram usados parâmetros ligados ao modelo apresentado como aplicação ao imageamento sísmico, no trabalho de Howarth, Childs e Moiola (2014), conforme segue: considere a equação de Helmholtz homogênea:

$$\nabla \cdot (\nabla u) + 0,25u = 0, \quad \text{em } \Omega.$$

Para as condições de fronteira dadas por (2), impõe-se a solução exata

$$u(x) = \frac{i}{4} H_0^1(0,5 \|x - x_0\|), \quad \text{onde } \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega.$$



Para o caso não homogêneo, considere

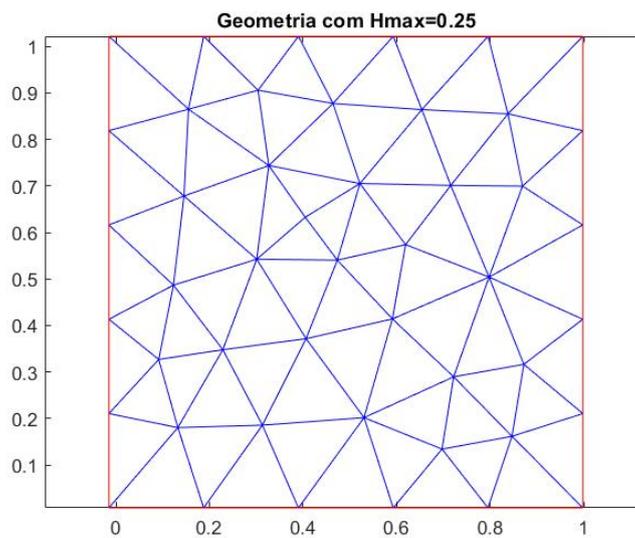
$$\nabla \cdot (\nabla u) - 25u = x^3y^4, \quad \text{em } \Omega.$$

Neste caso, para as condições de fronteira, impõe-se a solução exata, tal qual obtida no artigo de Muleshkov *et al.* (2000):

$$u(x, y) = -\frac{1}{25}x^3y^4 - \frac{-12}{625}x^3y^2 - \frac{24}{15625}x^3 - \frac{6}{25}xy^4 - \frac{144}{15625}xy^2 - \frac{432}{390625}x.$$

Para ambos os casos, o domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ foi particionado em uma malha de elementos finitos com comprimento (diâmetro máximo dos elementos) 0,25, para posteriores refinamentos, como representado na Figura 2.

Figura 2 – Malha inicial com aresta máxima 0.25



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Quando se aplica a UWVF, fixa-se uma malha e varia-se o número de funções de base. Nos experimentos que se seguem, foram produzidas variações no tamanho da malha e no número de funções de base, para cada família fixada. Para melhor visualização dos resultados, são apresentados os logaritmos decimais dos números de condicionamento devido ao forte mal condicionamento das matrizes envolvidas. Como já observado no trabalho original de Cessenat e Després (1998), esta é uma característica inerente da UWVF.

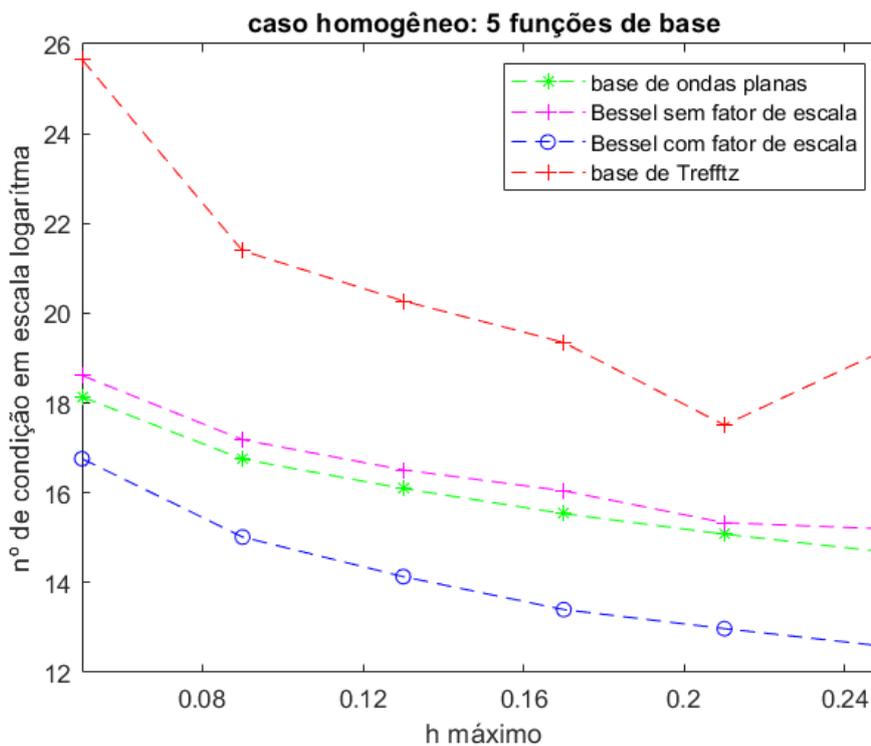


6.1 Número de Condicionamento x Malha: caso homogêneo

Aqui, seguindo a sugestão dada na tese de doutorado de Cessenat (1996), analisa-se o condicionamento do sistema linear $(D - C)X = b$ (equação 8), em sua forma preconditionada $(I - D^{-1}C)X = D^{-1}b$ (equação 15).

Partindo-se da malha inicial (apresentada na Figura 2) e usando um número fixo de funções de base, aplicou-se sucessivos refinamentos, resolvendo a UWVF para cada família de funções considerada. O número de condicionamento da matriz $(I - D^{-1}C)$ foi armazenado em cada processamento. Os gráficos desses processos, para cada uma das famílias, foram feitos em um mesmo sistema de eixos e apresentados nas Figuras 3, 4, 5 e 6.

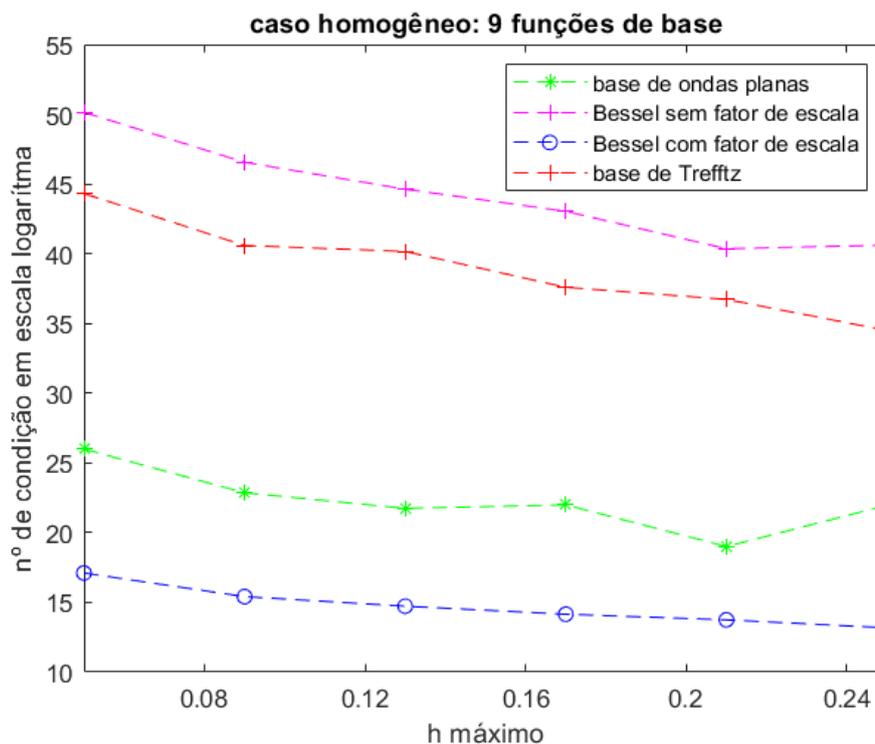
Figura 3 – Condicionamento em função da densidade da malha



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

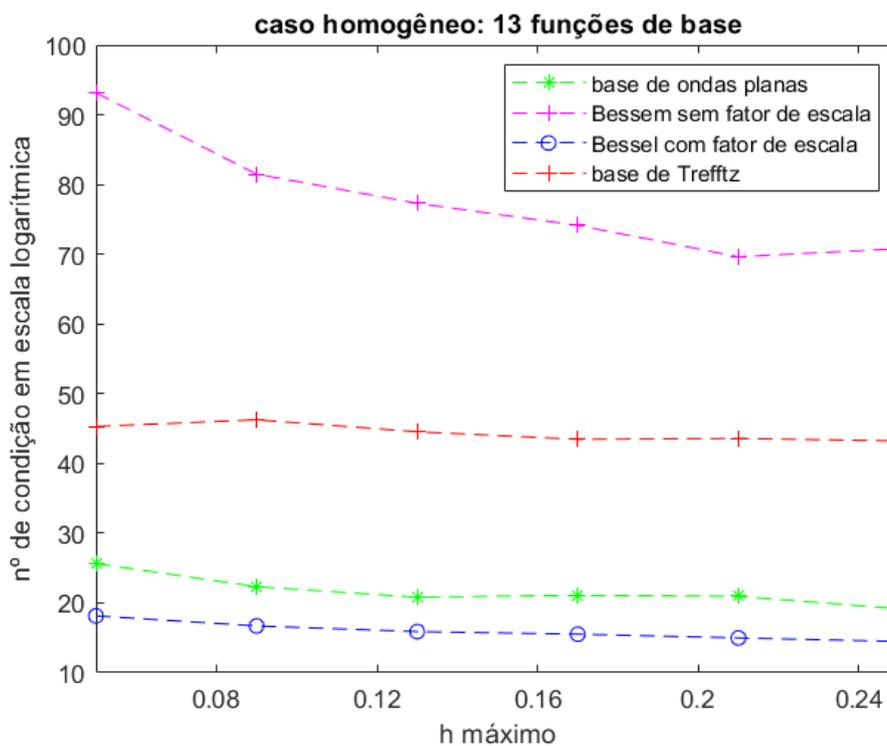


Figura 4 – Condicionamento em função da densidade da malha



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

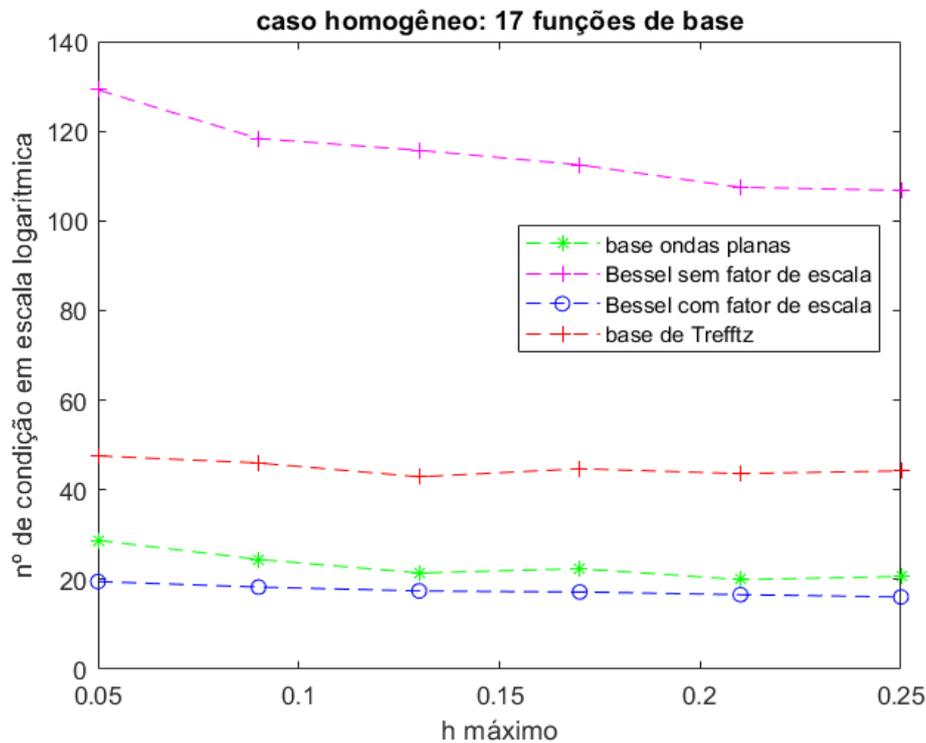
Figura 5 – Condicionamento em função da densidade da malha



Fonte: Elaboração dos autores (2023).



Figura 6 – Condicionamento em função da densidade da malha



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

No primeiro caso, representado na Figura 3, cada uma das bases definidas na Seção 4 foi considerada com cinco funções. Ainda que não se possa fazer uso direto da relação 14, pois o preconditionamento está em uso, pode-se observar uma deterioração no condicionamento à medida que a malha é refinada. A base de ondas cilíndricas com fator de escala apresentou os melhores números de condicionamento, produzindo resultados sensivelmente superiores aos gerados pela clássica base de ondas planas em malhas menos finas, embora, na malha mais fina, essa diferença caia para ordem de 10 unidades. A base de Trefftz apresentou os piores resultados. Nota-se que a introdução do fator de escala foi fundamental para a redução do mal condicionamento, uma vez que a base de ondas cilíndricas não escalada gerou resultados ligeiramente piores que a base de ondas planas. Vale notar que, na malha mais fina, a base de ondas cilíndricas não escalada apresenta valores da ordem de 10^{10} unidades menores do que os gerados pela base de Trefftz.

O gráfico da Figura 4 representa o experimento com nove funções para cada família discutida. Embora, qualitativamente, os comportamentos individuais de cada família sejam, em geral, bastante similares ao caso anterior, vê-se que as distâncias relativas entre os números de condicionamento das famílias de ondas cilíndricas com fator de escala e ondas planas aumenta: a base de ondas cilíndricas com fator de escala tem, na malha mais fina, valores na ordem de 10^{10} unidades mais



baixos do que a base de ondas planas. Além disso, a base de Trefftz supera a base de ondas cilíndricas não escalada. Novamente, vê-se que o uso de funções de Bessel, por si só, não foi capaz de reduzir o condicionamento dos sistemas discutidos, sendo fundamental o uso do fator de escala para esse propósito. Com 9 funções nas bases estudadas, a base de ondas cilíndricas não escaladas apresentou os piores resultados. Vale notar que os números de condicionamento são maiores do que no experimento anterior, quando se tinha menos funções de base.

Nos gráficos das Figuras 5 e 6 observa-se um comportamento qualitativo do grupo de famílias analisadas similar ao apresentado no gráfico da Figura 4, com algumas diferenças quantitativas marcantes. Primeiro, observa-se que os valores dos números de condicionamento gerados pela família de ondas cilíndricas não escaladas se tornam drasticamente maiores, principalmente nas malhas mais finas. Embora esse aumento seja esperado para números de funções de base mais altos na UWVF, pode-se notar que as demais famílias apresentam um aumento consideravelmente menor e bem mais estável.

A base de ondas cilíndricas com fator de escala apresentou os melhores resultados em relação ao condicionamento. A base de Trefftz, a partir de nove funções na base, se apresenta como uma melhor escolha em relação à base de ondas cilíndricas (sem fator de escala), embora ainda apresente resultados inferiores aos produzidos com a clássica base de ondas planas. A base de ondas planas apresenta resultados menos discrepantes dos produzidos pela base de ondas cilíndricas, conforme se aumenta o número de funções de base. No entanto, notando que os resultados para o número de condicionamento estão em escala logarítmica, esta última base ainda apresenta resultados sensivelmente superiores aos produzidos pela base clássica, como apresentado no gráfico da Figura 6. Os resultados também deixam claro que a introdução do fator de escala nas ondas cilíndricas é fundamental para o melhor desempenho do condicionamento, uma vez que a família baseada nas funções de Bessel sem fator de escala se mostrou uma escolha pior do que as ondas planas em todos os casos.

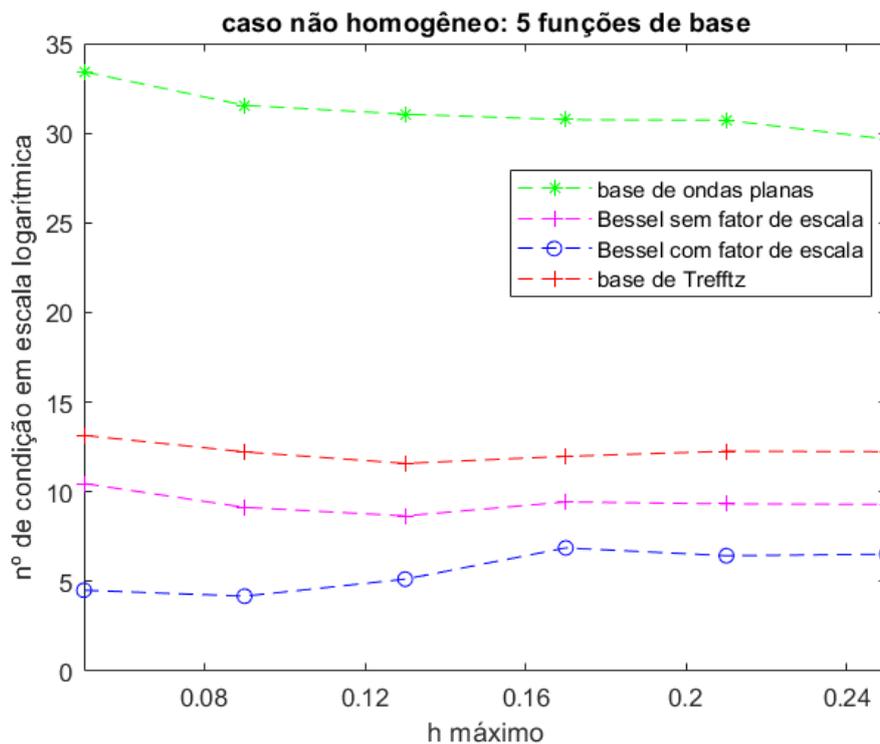
6.2 Número de Condicionamento x Malha: caso não homogêneo

Nos experimentos para o caso não homogêneo, a matriz D , dada em (9), ficou muito próxima de uma matriz singular, tornando o processo de preconditionamento, dado por (15), instável. Portanto, a sugestão de preconditionamento dada na tese de Cessenat (1996) (recomendada apenas para o caso homogêneo) não se mostrou adequada para este caso. Com isso, foi analisado o



número de condicionamento da matriz D em função do tamanho da malha e do tipo de função de base. Assim como no caso homogêneo, partiu-se da mesma malha inicial (Figura 1) e, fixado-se um número de funções de base, foram aplicados sucessivos refinamentos e a UWVF foi resolvida para o problema de Helmholtz não homogêneo, para cada família de funções considerada. Em todos os cenários experimentais, foi observada a deterioração do número de condicionamento à medida que a malhas se tornou cada vez mais fina, como previsto pela relação (14).

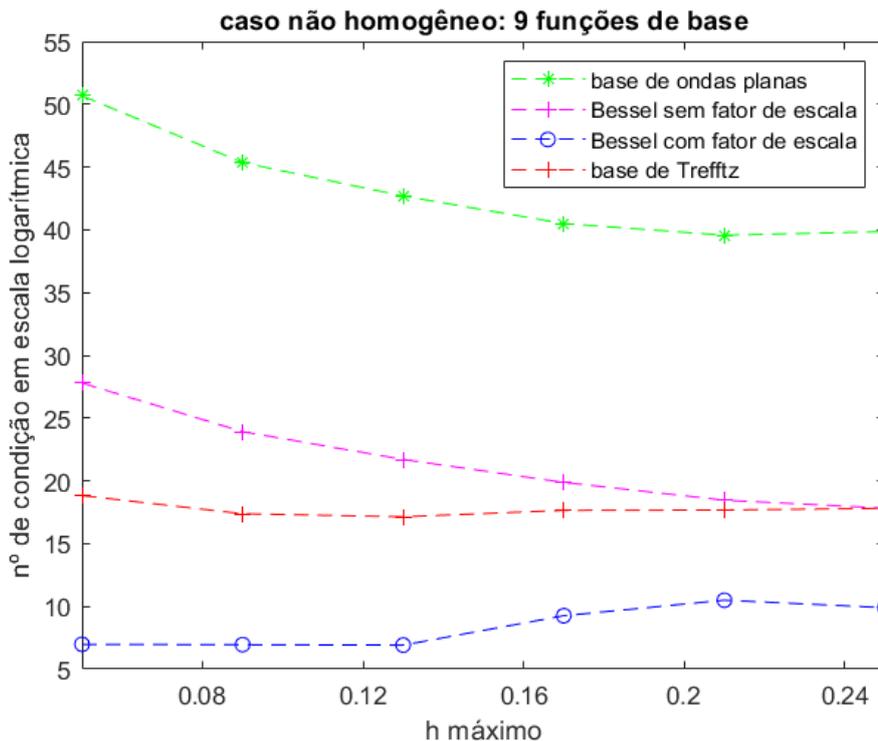
Figura 7 – Condicionamento em função da densidade da malha



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

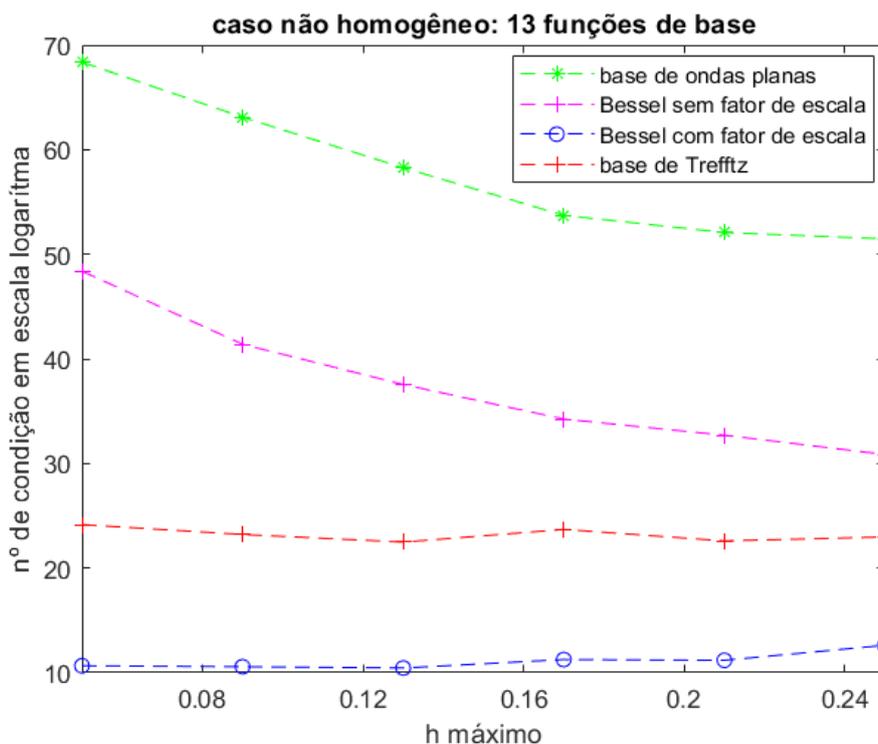


Figura 8 – Condicionamento em função da densidade da malha



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

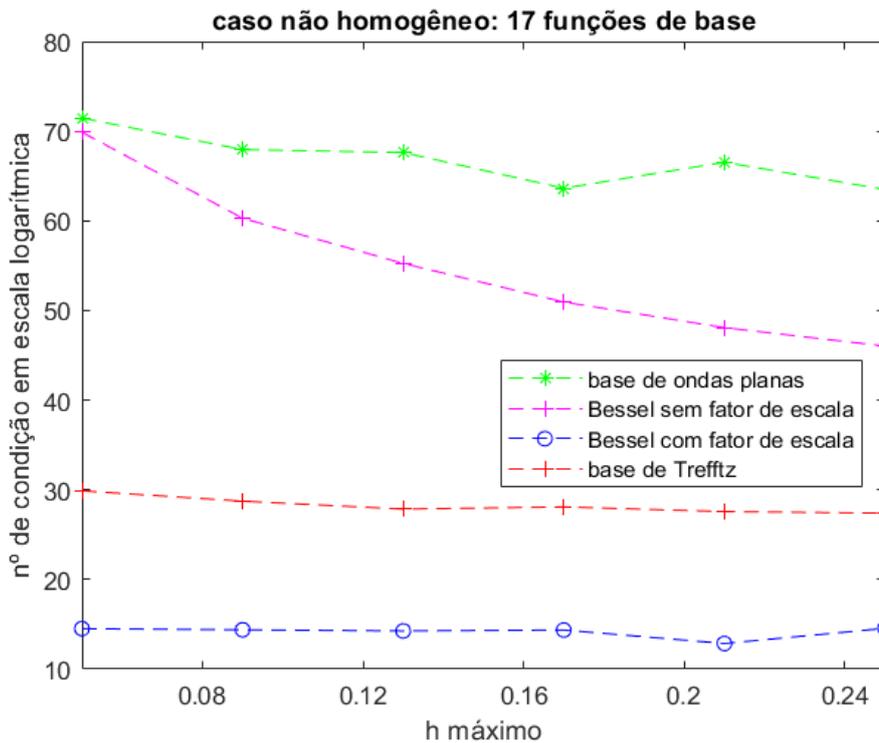
Figura 9 – Condicionamento em função da densidade da malha



Fonte: Elaboração dos autores (2023).



Figura 10 – Condicionamento em função da densidade da malha



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Uma outra característica numérica drasticamente diferente, quando comparado com o caso homogêneo é que, embora em todos os casos analisados, a base de ondas cilíndricas com fator de escala tenha também apresentado os melhores resultados em relação ao condicionamento do sistema linear, a clássica base de ondas planas apresentou o pior resultado dentre todas as famílias implementadas. Em particular, chama atenção a discrepância entre os números de condicionamento gerados pelas ondas cilíndricas com fator de escala e as ondas planas. As últimas apresentam valores de número de condicionamento, no mínimo, 10^{30} vezes maiores do que os gerados pelas ondas cilíndricas com escala (lembrando que os resultados estão indicados em escala logarítmica). Esses resultados sugerem a não utilização das ondas planas para problemas deste tipo, se o mal condicionamento for um fator limitante. Ainda comparando com o caso homogêneo, quando fixado um número de funções de base, o condicionamento do sistema linear produzido pela família de ondas cilíndricas com fator de escala piora levemente para malhas cada vez mais finas.

Os casos com 13 (Figura 9) e 17 (Figura 10) funções de base apresentaram os resultados mais estáveis, com destaque para o caso de 13 funções de base, por apresentar sistemas menos mal condicionados. Ondas cilíndricas não escaladas confirmaram, assim como no caso homogêneo, que não são capazes de fornecer resultado tão bons, embora, neste caso não homogêneo, se



apresentem como uma melhor opção do que as ondas planas. A base de Trefftz, a partir de nove funções na base, se apresenta como a segunda melhor escolha, embora ainda gere resultados extremamente inferiores aos produzidos com a base de ondas cilíndricas com fator de escala.

7 Conclusões

A metodologia UWVF foi inicialmente proposta como um método baseado em ondas planas para a solução aproximada do problema de Helmholtz. Recentemente, para mitigar o fato do sistema linear resultante ser mal condicionado o uso de outras classes de funções de base tem sido objeto de investigação. Neste artigo, a partir de uma série de experimentos numéricos para o problema de Helmholtz no caso homogêneo e não homogêneo, foi realizada uma análise do condicionamento do sistema linear subjacente em relação à escolha de certas famílias de funções de base e ao tamanho dos elementos da malha.

Os experimentos computacionais apresentados revelaram que a introdução do fator de escala, particularmente utilizando famílias de ondas cilíndricas construídas a partir de funções de Bessel, demonstrou uma redução significativa no número de condicionamento do sistema linear subjacente, em comparação com outras famílias de funções de base. Enquanto a clássica base de ondas planas exibiu desempenho inadequado em termos de condicionamento, especialmente no caso não homogêneo, a base de ondas cilíndricas com fator de escala emergiu como a mais promissora, em ambas as configurações.

No entanto, vale ressaltar que a base de ondas planas pode ser uma opção viável em casos onde a integração analítica é prioritária e o tempo de computação é um fator limitante. Sugere-se, portanto, que análises adicionais e mais aprofundadas sejam direcionadas ao aprimoramento da formulação com funções de Bessel escaladas, dada sua relevância na otimização do condicionamento do sistema e, por consequência, na aplicabilidade efetiva da UWVF em diversos problemas relevantes da matemática, engenharia e ciências aplicadas.

Referências

ALVAREZ, A. C.; GARCÍA, G. C.; SARKIS, M. The ultra weak variational formulation for the modified mild-slope equation. **Applied Mathematical Modelling**. v. 52, p. 28-41, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.018>.



AULD, B. A. **Acoustic fields and waves in solids**. New York: John Wiley and Sons, 1973. v. I, v. II.

BAYLISS, A.; GOLDSTEIN, C. I., TURKEL, E. The numerical solution of the Helmholtz Equation for wave propagation problems in underwater acoustics. **Computers & Mathematics with Applications**. v. 11, n. 7-8, p. 655-665, 1985. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(85\)90162-2](https://doi.org/10.1016/0898-1221(85)90162-2).

BORGES, C.; GILLMAN, A.; GREENGARD, L. High resolution inverse scattering in two dimensions using recursive linearization. **SIAM Journal on Imaging Sciences**. v. 10, n. 2, p. 641-664, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1137/16M1093562>.

CESSENAT, O. **Application d'une nouvelle formulation variationnelle aux équations d'ondes harmoniques: problèmes de Helmholtz 2D et de Maxwell 3D**. Orientador: Patrick Joly. 1996. 250 f. Tese (Doutorado) – Université Paris Dauphine, Paris, 1996. Disponível em: <https://www.sudoc.fr/043878121>. Acesso em: 26 jun. 2024.

CESSENAT, O.; DESPRÉS, B. Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. v. 35, n. 1, p. 255-299, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036142995285873>.

CHENEY, W.; KINCAID, D. **Numerical Mathematics and Computing**. USA: Thomson Brooks/Cole, 2007.

FARHAT, C.; HARARI, I.; HETMANIUK, U. A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 192, n. 11-12, p. 1389-1419, 2003. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00646-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00646-1).

GITTELSON, C. J.; HIPTMAIR, R.; PERUGIA, I. Plane wave discontinuous Galerkin methods: Analysis of the h-version. **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis**. v. 43, n. 2, p. 297-331, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1051/m2an/2009002>.

GITTELSON, C. J.; HIPTMAIR, R.; PERUGIA, I. **Plane Wave Discontinuous Galerkin Methods**. Research Report No. 2008-04. May 2008. Seminar für Angewandte Mathematik. Eidgenössische Technische Hochschule, CH-8092 Zürich, Switzerland, 2008. Disponível em: https://www.sam.math.ethz.ch/sam_reports/reports_final/reports2008/2008-04_fp.pdf. Acesso em: 26 jun. 2024.

HIPTMAIR, R.; LEDGER, P. D. **A quadrilateral edge element scheme with minimum dispersion**. Research Report No. 2003-17. December 2003. Seminar für Angewandte Mathematik. Eidgenössische Technische Hochschule, CH-8092 Zürich, Switzerland, 2003. Disponível em: https://www.sam.math.ethz.ch/sam_reports/reports_final/reports2003/2003-17_fp.pdf. Acesso em: 26 jun. 2024.



HIPTMAIR, R.; MOIOLA, A.; PERUGIA, I. A Survey of Trefftz Methods for the Helmholtz Equation. *In: BARRENECHEA, G.; BREZZI, F.; CANGIANI, A.; GEORGOULIS, E. (ed.). **Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations***. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2016. v. 114. p. 237-279. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-41640-3_8.

HOWARTH, C. J.; CHILDS, P. N.; MOIOLA, A. Implementation of an interior point source in the ultra weak variational formulation through source extraction. **Journal of Computational and Applied Mathematics**. v. 271, p. 295-306, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.04.017>.

JURAEV, D. A.; AGARWAL, P.; ELSAYED, E. E.; TARGYN, N. **Helmholtz equations and their applications in solving physical problems**. Advanced Engineering Science. Atlas Akademi, 2024. v. 4, p. 54-64, 2024. Disponível em: <https://publish.mersin.edu.tr/index.php/ades/article/view/1500>. Acesso em: 26 jun. 2024.

LAGHROUCHE, O.; BETTESS, P.; ASTLEY, R. J. Modelling of short wave diffraction problems using approximating systems of plane waves. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 54, n. 10, p. 1501-1533, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.478>.

LUOSTARI, T.; HUTTUNEN, T.; MONK, P. The ultra weak variational formulation using bessel basis functions. **Communications in Computational Physics**. v. 11, n. 2, p. 400-414, 2012. DOI: <https://doi.org/10.4208/cicp.121209.040111s>.

MATLAB. Version 9.8.0.1323502 (R2020a). The MathWorks Inc., 2020. Disponível em: <https://www.mathworks.com>. Acesso em: 26 jun. 2024.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev**: Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos. [S. l.]: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

MULESHKOV, A. S.; CHEN, C. S.; GOLBERG, M. A.; CHENG, A. H.-D. Analytic Particular Solutions for Inhomogeneous Helmholtz-Type Equations. *In: ATLURI, S. N.; BRUST, F. W. (ed.). **Advanced Computational Methods in Science and Engineering***. Tech Science Press, 2000. p. 27-32.

NÉDÉLEC, J.-C. **Acoustic and Electromagnetic Equations**: Integral Representations for Harmonic Problems. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2001. v. 144.

TEZAUER, R.; FARHAT, C. Three-dimensional discontinuous Galerkin elements with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of mid-frequency Helmholtz problems. **International Journal for Numerical Methods for Engineering**. v. 66, n. 5, p. 796-815, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1575>.

WATSON, G. N. **A Treatise on Theory of Bessel Functions**. USA: Cambridge University Press, 1966.



Agradecimentos

Agradecemos ao Comitê Organizador do ERMAC-2023, Volta Redonda/RJ, e aos revisores da REMAT, que contribuíram para a melhoria do texto aqui apresentado.

