



# Um *framework* para solução do problema inverso do espalhamento baseado na Formulação Variacional Ultra Fraca<sup>1</sup>

## A framework for solving the inverse scattering problem based on the Ultra Weak Variational Formulation

## Un *framework* para la solución del problema inverso de dispersión basado en la Formulación Variacional Ultra Débil



Fernanda Lúcia Sá Ferreira<sup>2</sup>

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), Nova Iguaçu, RJ  
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-0921-2494>,  <http://lattes.cnpq.br/5576155484322896>


Julius Monteiro de Barros Filho<sup>3</sup>

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), Nova Iguaçu, RJ  
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-2688-920X>,  <http://lattes.cnpq.br/9004019590106442>

Amaury Alvarez Cruz<sup>4</sup>

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Programa de Pós-Graduação em Informática  
(PPGI), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-5513-7974>,  <http://lattes.cnpq.br/0370476774197561>

Daniel Gregorio Alfaro Vigo<sup>5</sup>

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Programa de Pós-Graduação em Informática  
(PPGI), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-3280-8720>,  <http://lattes.cnpq.br/8694890749217765>

<sup>1</sup> Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

<sup>2</sup> **Currículo sucinto:** Bacharel e mestra em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, mestra em Modelagem Matemática e Computacional pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, especialista em Planejamento, Gestão e Implementação da Educação a Distância pela Universidade Federal Fluminense e doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Docente do CEFET-RJ. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Metodologia, Software, Validação, Análise formal, Investigação, Escrita – primeira redação, Escrita – revisão e edição. **Contato:** fernanda.ferreira@cefet-rj.br.

<sup>3</sup> **Currículo sucinto:** Bacharel e mestre em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, mestre em Modelagem Matemática e Computacional pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, especialista em Planejamento, Gestão e Implementação da Educação a Distância pela Universidade Federal Fluminense e doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Docente do CEFET-RJ. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Metodologia, Software, Validação, Análise formal, Investigação, Escrita – primeira redação, Escrita – revisão e edição. **Contato:** julius.filho@cefet-rj.br.

<sup>4</sup> **Currículo sucinto:** Graduado e mestre em Matemática pela Universidade de Havana, doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Realizou pós-doutorado no IMPA. Docente do Instituto de Computação da UFRJ. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Metodologia, Software, Validação, Análise formal, Investigação, Escrita – primeira redação, Escrita – revisão e edição. **Contato:** amaury@ic.ufrj.br.

<sup>5</sup> **Currículo sucinto:** Graduado em Mecânica-Matemática pela *Moscow State University*, mestre em Matemática Aplicada pela *Universidad Central de Las Villas* e doutor em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Docente no Instituto de Computação da UFRJ. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Metodologia, Escrita – revisão e edição. **Contato:** dgalfaro@ic.ufrj.br.



**Resumo:** Este estudo concentra-se nos problemas inversos em propagação de ondas em duas dimensões, nos quais informações sobre uma região inacessível são inferidas a partir de medições realizadas em áreas acessíveis. O foco principal está na resolução iterativa do coeficiente de refração-difração na equação de Helmholtz, utilizando um problema de mínimos quadrados regularizado para lidar com a natureza mal-posta do problema. Para resolver o problema direto correspondente, o Método de Formulação Variacional Ultra Fraca (UWVF) foi aplicado, método este, conhecido por sua eficiência computacional, demandando menos recursos e permitindo cálculos analíticos. A metodologia desenvolvida foi aplicada com sucesso para determinar a batimetria em regiões costeiras a partir do conhecimento das ondas em águas profundas e na linha costeira, obtendo resultados confiáveis e precisos.

**Palavras-chave:** problemas inversos; equação de declive suave; formulação variacional ultra fraca.

**Abstract:** This study focuses on two-dimensional inverse scattering problems, where information about an inaccessible region is inferred from measurements taken in accessible areas. The main focus is on the iterative resolution of the refraction-diffraction coefficient in the Helmholtz equation, using a regularized minimum square problem to cope with the ill-posed nature of the problem. To solve the corresponding direct problem, the Ultra Weak Variational Formulation (UWVF) method was applied, a method known for its computational efficiency, requiring fewer resources and allowing for analytical calculations. The methodology developed here was successfully applied to determine the bathymetry in coastal regions from the knowledge of waves in deep waters and along the coastline, yielding reliable and precise results.

**Keywords:** inverse problems; mild-slope equation; ultra weak variational formulation.

**Resumen:** Este estudio se centra en los problemas inversos de propagación de ondas en dos dimensiones, en los cuales se infieren informaciones sobre una región inaccesible a partir de mediciones realizadas en áreas accesibles. El enfoque principal está en la resolución iterativa del coeficiente de refracción-difracción en la ecuación de Helmholtz, utilizando un problema de mínimos cuadrados regularizado para manejar la naturaleza mal planteada del problema. Para resolver el problema directo correspondiente, se empleó el Método de Formulação Variacional Ultra Débil (UWVF), procedimiento conocido por su eficiencia computacional, requiriendo menos recursos y permitiendo cálculos analíticos. Además, la metodología se aplicó con éxito para determinar la batimetría en regiones costeras a partir del conocimiento de las olas en aguas profundas y en la línea costera, alcanzando resultados confiables y precisos.

**Palabras clave:** problemas inversos; ecuación de pendiente suave; formulación variacional ultra débil.

**Data de submissão:** 10 de janeiro de 2024.

**Data de aprovação:** 15 de abril de 2024.

## 1 Introdução

Problemas inversos em propagação de ondas envolvem a obtenção de informações sobre regiões inacessíveis com base em medições realizadas em áreas acessíveis (Gilbert; Xu, 1993;



Pastorino, 2008; Wang, 2012). Este estudo concentra-se no problema inverso associado à equação de Helmholtz em duas dimensões, com o objetivo de determinar iterativamente o coeficiente de refração-difração, enfrentando o desafio da natureza mal-posta do problema, por meio de um método de mínimos quadrados regularizado (Borges; Gillman; Greengard, 2017).

O alto custo computacional dos problemas inversos é notável devido a vários fatores, incluindo o volume de dados observados, a quantidade de parâmetros a serem estimados e a necessidade de resolver repetidamente o problema direto durante o processo iterativo de minimização (Huttunen; Monk; Kaipio, 2002). Portanto, é crucial empregar um método direto eficiente que leve em consideração as principais características do meio, garantindo rapidez e precisão na resolução.

O método numérico escolhido para resolver o problema direto associado foi a Formulação Variacional Ultra Fraca (*Ultra-Weak Variational Formulation – UWVF*) (Cessenat; Després, 1998), utilizando ondas planas como base. Esse método se destaca pela eficiência computacional, exigindo menos recursos e permitindo o cálculo analítico das integrais envolvidas. Para a implementação do método, foram utilizadas as ferramentas de otimização não lineares do MATLAB.

Neste artigo, a principal novidade é a aplicação do método de recuperação para resolver o problema inverso de determinar a forma do fundo em águas costeiras. Isso é realizado utilizando informações de entrada das características das ondas em águas profundas e das ondas ao longo da linha costeira. Problemas relacionados à detecção da batimetria surgem naturalmente em estudos de dinâmica costeira (Collins, 1995), e sua resolução é de extrema importância para a construção de obras de engenharia costeira. Alguns trabalhos similares foram previamente realizados neste tópico (Fassieh, 2013; Vasan; Deconinck, 2013).

Para isso foi utilizada a Equação de Inclinação Suave (*Mild Slope Equation – MSE*), que descreve fenômenos de reflexão, difração e refração de ondas em zonas costeiras (Berkhoff, 1972). Essa equação modela a propagação de ondas aquáticas à medida que elas viajam através de águas de profundidade variável e interação com limites laterais, como falésias, praias, paredões e quebra-mares. Nos exemplos numéricos apresentados obteve-se boa recuperação do fundo marinho.

O método utilizado aqui é similar àquele apresentado em Bao e Li (2012) e Borges, Gillman e Greengard (2017), mas aplicado na recuperação de fundos marinhos. O método de recuperação do fundo melhora os resultados apresentados em Fassieh (2013), pois o método permite incluir ao mesmo tempo os efeitos de difração-refracção que estão modelados através da equação MSE.



O artigo está estruturado da seguinte maneira: na seção 2 é feita uma descrição do problema direto com base na equação de Helmholtz. Na seção 3, o problema inverso genérico a ser abordado é delineado, seguido pela descrição do método aplicado ao caso específico da equação MSE. Na sequência é explorado como obter informações sobre o leito marinho com base no coeficiente de difração-refração previamente determinado. A seção 4 detalha o método *Ultra-Weak* utilizado para resolver numericamente o problema direto. Na seção 5, é apresentado um resumo do algoritmo desenvolvido para obter a profundidade em função do coeficiente de difração-refração, e na seção 6, um exemplo ilustra a metodologia desenvolvida neste trabalho. Por fim, na seção 7, as conclusões do estudo são destacadas.

## 2 Problema Direto

O problema direto, no caso genérico, consiste na solução da equação de Helmholtz com condições de fronteira híbrida de Dirichlet, Neumann e Robin. Mas, o método será aplicado em particular na equação MSE. Nessa direção, a equação MSE é apresentada a seguir e posteriormente se mostra como ela pode ser transformada na equação de Helmholtz. Ao final, na seção 5, é explicado como se utiliza a solução do problema direto na recuperação do coeficiente de refração da equação de Helmholtz.

### 2.1 A equação de inclinação suave (MSE)

Fenômenos ondulatórios, como reflexão, refração e difração de ondas, podem ser analisados por meio da MSE quando se trabalha em regiões de topografias com declives suaves. Esta equação, originalmente desenvolvida por Berkhoff (1972), sofreu várias modificações para abranger casos mais gerais (ver Chamberlain e Porter (1995)). MSE é expressa da seguinte forma:

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla u) + k^2 CC_g u = 0, \quad (1)$$

onde  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ . Aqui,  $u(x, y) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$  representa a função potencial de velocidade para um fluxo de onda harmônico simples. Adicionalmente,  $k = k(x, y)$ ,  $C = C(x, y)$  e  $C_g = C_g(x, y)$  denotam o número de onda, a velocidade de fase e a velocidade de grupo no ponto  $(x, y)$ , respectivamente. Esses parâmetros dependem da relação de dispersão e são deduzidos da teoria das



ondas de Airy, como se segue:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh), \quad C = \frac{\omega}{k}, \quad C_g = \frac{1}{2}C \left[ 1 + kh \frac{1 - \tanh^2(kh)}{\tanh(kh)} \right],$$

onde  $\omega = 2\pi/T$  representa a frequência angular da onda,  $T$  o período da onda e  $g$  a força gravitacional. Para uma frequência angular dada  $\omega$ , o número de onda  $k$  é determinado pela equação de dispersão que relaciona essas quantidades à profundidade da água  $h = h(x, y)$  em cada ponto da região.

O método numérico escolhido para resolver o problema direto neste estudo foi a formulação variacional ultra-fraca (UWVF), que está amplamente estabelecida para abordar o problema de contorno de Helmholtz (ver, por exemplo, Cessenat e Després (1998)). A transformação  $\psi = u\sqrt{CC_g}$  permite que a Equação de Inclinação Suave para águas rasas, conforme a equação (1), seja reescrita como uma Equação de Helmholtz com coeficiente variável (consulte Radder (1979) para uma derivação completa):

$$\Delta\psi + k_c^2\psi = 0, \quad \text{onde} \quad k_c^2 = k^2 - \frac{\Delta\sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}}, \tag{2}$$

e  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ . Dessa forma, a partir deste ponto, o método é descrito de uma maneira genérica para facilitar a apresentação dos métodos numéricos diretos para resolver essa equação. A Equação (2) é uma equação de Helmholtz homogênea em duas dimensões e pode ser reescrita de forma geral como:

$$\begin{cases} \Delta\psi + a^2\psi = 0 \text{ em } \Omega \\ \psi = g_D \text{ em } \partial\Omega_D \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = g_N \text{ em } \partial\Omega_N \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} + i\alpha\psi = g_R \text{ em } \partial\Omega_R \end{cases}, \tag{3}$$

onde  $\Delta$  é o operador laplaciano,  $\Omega$  é uma região fechada em  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\partial\Omega$ ,  $a = a(x, y)$  representa o coeficiente de refração-difração,  $\psi = \psi(x, y)$  é a função de onda procurada e  $\alpha$  é um coeficiente conhecido. As condições de fronteira são representadas por:  $g_D = g_D(x, y)$  são as condições de Dirichlet, as de Neumann são dadas por  $g_N = g_N(x, y)$ , e as condições de Robin por  $g_R = g_R(x, y)$ . Cada uma dessas funções é conhecida nas partes da fronteira  $\partial\Omega_D$ ,  $\partial\Omega_N$  e  $\partial\Omega_R$ , as quais se interceptam no máximo em um ponto. A fronteira de  $\Omega$  é dada por  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_R$ , conforme pode ser visto no esquema da Figura 1.

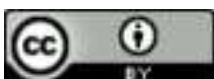
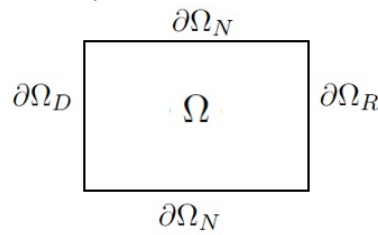


Figura 1 – Esquema da fronteira da região  $\Omega$



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

## 2.2 Condições de contorno para MSE

As regiões onde o MSE é resolvido estão delimitadas por fronteiras fechadas (representadas por linhas costeiras e estruturas que penetram na superfície, como paredes de píeres ou pernas de píeres, quebra-mares, muros de contenção) e uma fronteira aberta, que representa uma fronteira artificial entre a área sendo modelada e a região marítima externa. A fronteira aberta é representada como um tipo de fronteira de Dirichlet. A amplitude e a direção das ondas conformam a condição de contorno dada por:

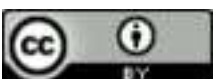
$$g_D = \psi_o \exp(i(kx \cos(\theta) + ky \sin(\theta))) \quad (x, y) \in \partial\Omega_D, \quad (4)$$

onde  $\psi_o$  é a amplitude em águas profundas,  $\theta$  é o ângulo de direção entre as ondas que se aproximam da fronteira e o vetor normal da fronteira. Os parâmetros  $k$  e  $\theta$  são constantes em águas profundas.

Ao longo da linha costeira e das estruturas que produzem superfícies, a condição de contorno de Robin tem sido tradicionalmente utilizada  $CC_g \nabla u \cdot \vec{n} - iqu = p$ , onde  $\vec{n}$  é a normal exterior do domínio físico em questão,  $q(x, y)$  e  $p(x, y)$  são parâmetros que dependem das características das ondas (ver, por exemplo, Chen e Houston (1987), e Tsay e Liu (1983)).

## 3 Problema Inverso

No problema inverso, o objetivo é determinar os coeficientes  $a = a(x, y)$  e  $\alpha$  na equação de Helmholtz em (3), considerando que as funções  $g_D(x, y)$ ,  $g_N(x, y)$  e  $g_R(x, y)$  são conhecidas. Parte-se do princípio de que, dentre todas as soluções obtidas, o coeficiente da equação de Helmholtz que é buscado é aquele que melhor se ajusta à solução na fronteira, satisfazendo as condições de



Dirichlet. Isso leva a resolver o seguinte problema de minimização:

$$\min_{a,\alpha} \mathcal{A}(a, \alpha), \quad \text{onde} \quad \mathcal{A}(a, \alpha) = \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial \psi_{\omega_j}^a}{\partial n} + i\alpha a \psi_{\omega_j}^a - g_r \right\|_{L^2(\partial\Omega_R)}^2 + \mathcal{I}(a), \quad (5)$$

e  $i = \sqrt{-1}$ .

Nessa equação,  $\mathcal{I}(a)$  é um termo de regularização, e  $\psi_{\omega_j}^a$  é a solução do problema direto (3) para o coeficiente  $a$  e as frequências  $\omega_j$  para  $j = 1, \dots, N$ . Para resolver esse problema, um método de regularização é aplicado, procurando obter uma solução aproximada suave e consistente com os dados observados, conforme sugerido por Borges, Gillman e Greengard (2017) e Tarantola (2005). No presente trabalho foram desenvolvidos esquemas numéricos de recuperação que funcionam bem, no entanto, a prova da boa colocação do problema inverso será estabelecida em futuros trabalhos. Um trabalho teórico nessa direção e similar ao que foi desenvolvido nesta pesquisa podem ser visto em Gylys-Colwell (1996).

#### 4 Solução Numérica do Problema Direto

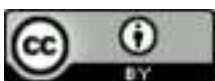
Para abordar o problema de otimização (5), é necessário resolver o problema direto em cada iteração e encontrar a solução  $\psi^a(x, y)$  para um coeficiente de refração-difração  $a$ , a fim de avaliar a função objetivo. Para isso, o método de formulação fraca ou ultra fraca (*Ultra Weak Variational Formulation – UWVF*) é utilizado, como foi feito com sucesso em Alvarez, García e Sarkis (2017). Neste trabalho, o Método Ultra Fraco é usado com base de ondas planas, pois dessa forma as fórmulas para o cálculo da matriz de montagem do método são explícitas. Isso permite obter a solução de maneira rápida e até mesmo possibilita a paralelização de algumas partes do algoritmo.

O método UWVF na equação de Helmholtz pode se resumir como segue. Seja a equação

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) + k_c^2 \psi = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} - i\sigma \psi = Q \left( -\frac{\partial \psi}{\partial n} - i\sigma \psi \right) - g_r \quad \text{em } \Gamma, \quad (7)$$

onde  $k_c^2 = k^2 + r(h)$  e  $\sigma = k_c$ . Esta é uma formulação mais conveniente para a implementação numérica. Aqui,  $\Omega$  é um domínio poligonal limitado em  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\Gamma$  e vetor normal unitário  $n$ . Em (7),  $Q \in \mathbb{C}$ ,  $|Q| \leq 1$ , define a condição de contorno, por exemplo, para Dirichlet  $Q = -1$ , para Neumann  $Q = 1$ , e para condições de contorno do tipo Robin  $Q \neq -1, 1$ . O termo de fonte



na fronteira é dado por  $g_r$ . Considera-se uma partição do domínio em elementos finitos disjuntos, de modo que  $\Omega = \cup_{k=1}^K \Omega_k$  e  $\Sigma_{kj}$  denota a interface entre os elementos  $\Omega_k$  e  $\Omega_j$  (veja detalhes em Huttunen, Monk e Kaipio (2002)). A fim de apresentar o método introduzido em Cessenat e Després (2003), as equações (6)-(7) são decompostas em sub-problemas para cada elemento  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, K$

$$\Delta \psi_k + k_c^2 \psi_k = 0 \quad \text{em } \Omega_k \tag{8}$$

$$\psi_k = \psi_j, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n_k} = -\frac{\partial \psi_j}{\partial n_j} \quad \text{em } \Sigma_{kj} \tag{9}$$

$$\left( \frac{\partial \psi_k}{\partial n_k} - i\sigma_k \psi_k \right) = Q \left( -\frac{\partial \psi_k}{\partial n_k} - i\sigma_k \psi_k \right) + g_r \quad \text{em } \Gamma_k \tag{10}$$

Uma nova função é definida em cada fronteira do elemento  $\partial\Omega_k$

$$\chi_k = \left( -\frac{\partial \psi_k}{\partial n_k} - i\sigma_k \psi_k \right) |_{\partial\Omega_k}, \quad 1 \leq k \leq K. \tag{11}$$

Da decomposição do problema (8)-(10) e integração por partes, segue-se que  $\chi_k$  verifica

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} \frac{1}{\sigma} \chi_k \overline{\left( -\frac{\partial v_k}{\partial n_k} - i\sigma v_k \right)} - \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K \int_{\Sigma_{kj}} \frac{1}{\sigma} \chi_j \overline{\left( \frac{\partial v_k}{\partial n_k} - i\sigma v_k \right)} \\ - \sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_k} \frac{Q}{\sigma} \chi_k \overline{\left( \frac{\partial v_k}{\partial n_k} - i\sigma v_k \right)} = \sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_k} \frac{1}{\sigma} g_r \overline{\left( \frac{\partial v_k}{\partial n_k} - i\sigma v_k \right)}, \end{aligned} \tag{12}$$

onde  $v_k$  é uma função de teste que satisfaz a equação de Helmholtz adjunta local  $\Delta v_k + \bar{k}_c^2 v_k = 0$  em  $\Omega_k$ . Aqui, as barras representam o conjugado complexo. Encontrar  $\chi_k \in L^2(\partial\Omega_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , que satisfaça (12) é chamado de UWVF para a equação de Helmholtz. Este problema pode ser discretizado escolhendo uma superposição de ondas planas propagantes para aproximar a função  $\chi_k$  da seguinte forma:

$$\chi_k^a = \sum_{l=1}^{p_k} \chi_{k,l} \left( -\frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial n_k} - i\sigma \varphi_{k,l} \right), \tag{13}$$

onde  $\{\chi_{k,l}\}_{l=1}^{p_k}$  são as funções desconhecidas a serem calculadas. As funções de base de ondas planas são dadas por

$$\varphi_{k,l} = \begin{cases} e^{ik(x \cos \theta_l + y \sin \theta_l)} & \text{em } \Omega_k \\ 0 & \text{em outro lugar} \end{cases} \tag{14}$$



onde  $\theta_l$  é a direção de propagação das ondas que pode ser construída usando direções angulares igualmente espaçadas no círculo unitário, ou seja,  $\theta_l = 2\pi(l - 1)/p_k$ . É importante notar que o número de direções de base  $p_k$  pode variar entre os elementos  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , mas isso não é usado neste artigo.

Substituindo  $\chi_k^a$  em (12) e escolhendo a função de teste  $v_k = \varphi_{k,l}$ , a forma discreta do UWVF pode ser escrita na forma de matriz como (ver Cessenat e Després (1998), Huttunen, Monk e Kaipio (2002))

$$(D - C)X = b, \tag{15}$$

com os pesos desconhecidos  $X = (\chi_{1,1}, \chi_{1,2}, \dots, \chi_{1,p_k}, \chi_{2,1}, \dots)^T$ . Ambas as matrizes têm estrutura de bloco esparsa.

A matriz  $D$  é a diagonal de blocos Hermitianos dada por

$$D_k^{l,m} = \int_{\partial\Omega_k} \frac{1}{\sigma} \left( -\frac{\partial\varphi_{k,m}}{\partial n_k} - i\sigma\varphi_{k,m} \right) \overline{\left( -\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial n_k} - i\sigma\varphi_{k,l} \right)} \tag{16}$$

onde o sobrescrito de  $D$  mostra os elementos em cada bloco  $k$ .

Já as entradas em  $C$  são da forma

$$C_{k,j}^{l,m} = \int_{\Sigma_{k,j}} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial\varphi_{j,m}}{\partial n_k} - i\sigma\varphi_{j,m} \right) \overline{\left( \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial n_k} - i\sigma\varphi_{k,l} \right)} + \int_{\Gamma_k} \frac{Q}{\sigma} \left( -\frac{\partial\varphi_{k,m}}{\partial n_k} - i\sigma\varphi_{k,m} \right) \overline{\left( \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial n_k} - i\sigma\varphi_{k,l} \right)} \tag{17}$$

O lado direito do sistema é o seguinte

$$b_{k,l} = \int_{\Gamma_k} \frac{1}{\sigma} g_r \overline{\left( \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial n_k} - i\sigma\varphi_{k,l} \right)}. \tag{18}$$

Pela a escolha das funções bases como ondas planas (14), as integrais em (16), (17) e (18) podem ser calculas de forma exata, facilitando os cálculos e a paralelização do método.

## 5 Recuperação da Profundidade $h(x, y)$

Nesta seção é apresentado como obter a forma do fundo marinho (profundidade  $h(x, y)$ ) a partir dos coeficientes de refração  $k_c(x, y)$  e  $k(x, y)$ . Suponha que o coeficiente  $k_c$  tenha sido obtido por meio do processo de otimização, conforme descrito na seção anterior mas aplicado na equação



(2). Como  $k_c^2 = k^2 - \frac{\Delta\sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}}$ , fazendo  $v = \sqrt{CC_g}$  se gera a seguinte equação tipo Helmholtz,

$$\nabla v + (k^2 - k_c^2)v = 0. \tag{19}$$

Assumindo os valores dos coeficientes  $k(x, y)$  e  $k_c(x, y)$  conhecidos, a solução  $v$  pode ser obtida, por exemplo, aplicando o método dos elementos finitos à equação (19). Agora, pode-se recuperar a função de profundidade  $h(x, y)$  e o número de onda  $k(x, y)$  resolvendo o sistema não linear com duas incógnitas e duas equações para cada ponto  $(x, y)$ :

$$\omega^2 = gk(x, y) \tanh(k(x, y)h(x, y)), \quad v(x, y)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{k(x, y)} \right)^2 \left[ 1 + kh \frac{1 - \tanh^2(k(x, y)h(x, y))}{\tanh(k(x, y)h(x, y))} \right], \tag{20}$$

dado que  $g$  e  $\omega$  são constantes conhecidas.

Como  $CC_g$  é função da profundidade, se obtém a função  $h(x, y)$  resolvendo o sistema não linear (20), onde  $\omega, g, v(x, y)$  são conhecidos e as incógnitas são  $k(x, y)$  e  $h(x, y)$ .

Em resumo, os passos fundamentais para a determinação da batimetria são os seguintes: disponibilizar os dados das ondas em águas profundas e ao longo da linha costeira, aplicar o método descrito na seção 3 para calcular o coeficiente de difração-refração  $k_c(x, y)$ , utilizar o método de quase-Newton para resolver o sistema delineado na seção 4 e, finalmente, determinar a batimetria  $h(x, y)$ .

## 6 Aspectos Computacionais e Exemplos Numéricos

Como exemplo de aplicação, o método descrito neste artigo será aplicado à equação

$$\nabla^2 \psi(x, y) + \left( \frac{\omega}{h(x, y)} \right)^2 \psi(x, y) = 0, \tag{21}$$

sobre a geometria  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , com condições de contorno  $\partial\Omega_D = \{(x, y) : x = 0\}$ ,  $\partial\Omega_R = \{(x, y) : x = 1\}$  e  $\partial\Omega_N = \{(x, y) : y = 1 \text{ ou } y = 0\}$ . As condições de fronteira são definidas como  $g_D$  (conforme a equação (4)) e  $g_N = 0$ . Neste exemplo, o parâmetro  $\alpha = -1$ .



### 6.1 Preparação dos dados de entrada

Para gerar os dados de entrada no modelo de recuperação, especifica-se os dados de Dirichlet, com uma onda plana do tipo

$$\phi(x, y) = A \exp(k_o \cos(\beta)x + k_o \sin(\beta)y), \tag{22}$$

onde  $\beta$  é o ângulo de incidência da onda e  $k_o$  é o número de onda na fronteira de Dirichlet, o qual é tomado como  $k_o = 2\pi/L$ , onde  $L = 1,56 T^2$  (ver Le Roux (2008)). Aqui,  $T$  denota o período da onda e  $A$  a amplitude da onda.

O método para impor a condição de contorno no UWVF é baseado na equação (7). Isso implica que, para os elementos de fronteira, deve-se escolher o valor do parâmetro  $Q$  e, por sua vez, é escolhida a função  $g_r$ , levando em consideração a entrada da onda em águas profundas.

Neste estudo, na condição de Dirichlet (na fronteira  $\partial\Omega_D$ , ver Figura 1), tem-se  $Q = -1$ , e a função resultante  $g_r$  na equação (7) é

$$g_r = -2i\sigma A e^{i(k_o \cos(\beta)x + k_o \sin(\beta)y)}. \tag{23}$$

Além disso, no caso de fronteira do tipo Robin (na fronteira  $\partial\Omega_R$ , ver Figura 1), toma-se  $Q = 0$  e, portanto, a função resultante  $g_r$  em (7) é:

$$g_r = \left( \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}_k} - i\sigma_k u_k \right),$$

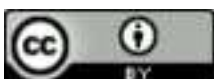
ou

$$g_r = ik_c(CC_g)((n_1 \cos \theta_l + n_2 \sin \theta_l) - 1)e^{ik_c(x \cos \theta_l + y \sin \theta_l)}, \tag{24}$$

onde  $n = (n_1, n_2)$  é o vetor normal exterior aos elementos da fronteira.

No caso de fronteira do tipo Neumann (na fronteira  $\partial\Omega_N$ , ver Figura 1), toma-se  $Q = 1$  e  $g_r = 0$ .

Finalmente, o problema direto (7) é resolvido com as condições dadas em (23) e (24), para diferentes períodos e direções da onda. O valor da função  $g_r$  em (24) é utilizado como dado de



entrada no funcional de recuperação na fórmula (5). Os valores da função  $g_r$  levam em consideração a forma do fundo prefixado na equação (21).

## 6.2 Procedimento computacional

O método de recuperação descrito neste artigo pode ser resumido nos seguintes passos:

- Define-se a condição inicial e a fronteira do MSE, ou seja, a amplitude e o período da onda em determinada região de fronteira juntamente com derivadas normais em outra. Em seguida, são fornecidos os dados topográficos do fundo  $h(x, y)$ , os quais serão usados para calcular o coeficiente do MSE.
- Gera-se uma malha apropriada que leve em consideração a fronteira, a topografia, o comprimento de onda que está relacionado à profundidade local da água, a frequência da onda de entrada, a variabilidade do coeficiente de refração e as informações *a priori* do raio da onda.
- Define-se os parâmetros de entrada do processo de recuperação usando a solução do problema direto. Neste trabalho foram usados dados sintéticos, mas o procedimento pode ser adaptado para dados obtidos na prática.
- Escolhe-se o número de bases por elemento levando em consideração as informações das ondas e o tamanho da malha. O número de bases é independente dos dados de fronteira, mas a direção da base é dominada pela condição inicial da fronteira. Uma vantagem do uso de ondas planas é que as fórmulas integrais no sistema de matriz resultante podem ser avaliadas em forma fechada.
- Resolve-se o problema de otimização para recuperar a forma do fundo em águas costeiras. A escolha do método de otimização é uma questão relevante, pois isso irá influenciar no tempo de processamento e na precisão da solução.
- Avalia-se a precisão da recuperação obtida.

### 6.2.1 Sensibilidade dos parâmetros

Os principais parâmetros a serem ajustados para melhorar o método de recuperação são o tamanho da malha, o número de ondas planas por elemento  $p_k$ , o período da onda que, por sua vez,



determina a frequência, e a direção das ondas. O método de recuperação depende sensivelmente desses parâmetros, mas a estratégia foi fixá-los de maneira que o modelo seja eficiente em termos de tempos curtos de simulação e, ao mesmo tempo, capaz de recuperar o fundo do mar para os dados de entrada fornecidos.

O número de ondas planas por elemento funcionou bem para os valores  $p_k = 4, 5$ . A direção da onda que teve o melhor desempenho para os exemplos numéricos estudados foi  $\beta = 0$ , mas valores entre 0 e 5 graus não geraram mudanças significativas na recuperação. O tamanho da malha foi escolhido apropriadamente de forma que a solução do problema direto fosse rápida o suficiente, ou seja, em 3 a 5 segundos.

Por sua vez, o período da onda foi escolhido como parâmetro de controle para detectar possíveis características do fundo. Ao invés de escolher apenas uma onda de entrada o fundo pode ser melhor recuperado adicionando outros pacotes de ondas com períodos aumentando a partir de 0,15 segundo. Foram usados 0,15, 0,2 e 0,32 segundo, e foi apropriado para a recuperação.

Os experimentos numéricos indicam que, para contornar ou recuperar o fundo, diferentes direções e períodos de ondas devem ser utilizados, sendo também necessário conhecer *a priori* qual seria a forma aproximada que deve ser recuperada, o que facilitaria a parametrização do fundo.

### 6.2.2 Processo de otimização

No processo de otimização da função definida na equação (5), foram usadas as funções *lsqcurvefit*, *fminunc* e *lsqnonlin* do MATLAB. Os melhores resultados foram obtidos com *lsqnonlin*, utilizando os algoritmos *trust-region-reflective* e *Levenberg-Marquardt*. Para os parâmetros, foi apropriado o uso de limites superior e inferior, o que resultou no domínio de minimização sendo um conjunto compacto, e, portanto, de acordo com o Lema de Tikhonov (ver Tikhonov e Arsenin (1977)), o funcional teria uma única solução nesse conjunto.

No entanto, vários parâmetros dessas funções foram ajustados para evitar mínimos locais que estavam distantes da solução exata. Isso indica que, na utilização deste método de recuperação, mais informações *a priori* sobre a solução a ser buscada são necessárias.



### 6.3 Exemplo 1

No primeiro exemplo numérico, é escolhido um fundo marinho com um pico próximo à linha costeira com a seguinte função

$$h(x, y) = 1 + a \cdot \exp\left(-\left(\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{b}\right)\right), \quad (25)$$

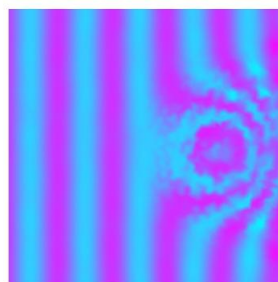
onde  $a = 0,5$ ,  $b = 0,05$ ,  $x_0 = 0,6$  e  $y_0 = 0,5$ .

O procedimento para obter os dados de entrada na fronteira envolve a definição de uma função como em (25). Em seguida, o problema direto é resolvido utilizando o método descrito na seção 4 e a função  $g_r$ , que será usada como entrada no problema inverso, é determinada. Posteriormente, a função  $h(x, y)$  é expressa de forma paramétrica, dependendo dos parâmetros  $a$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  e  $b$ , e o processo de recuperação é iniciado conforme descrito na seção 3.

Para as simulações, é escolhida uma onda com amplitude de 0,02 e três períodos foram testados: 0,2, 0,3 e 0,38. Além disso, no método UWVF, foram utilizadas quatro ondas planas, o que foi suficiente para representar a isotropia dos padrões de difração-refração neste exemplo (Fig. 2).

Adicionalmente, a malha utilizada contou com 1268 elementos. A Figura 3 ilustra a representação da forma da batimetria, sendo o caso a) os dados reais assumidos ( $a = 0,5$ ,  $b = 0,05$ ,  $x_0 = 0,8$  e  $y_0 = 0,5$ ), enquanto o caso b) representa o fundo recuperado ( $a = 0,44$ ,  $b = 0,01$ ,  $x_0 = 0,72$  e  $y_0 = 0,46$ ). Casos simulados com diferentes condições iniciais resultaram em boas recuperações, com erro absoluto dos parâmetros menores que 8%. Neste exemplo, o método proposto demonstrou robustez e precisão, conforme pode ser observado nas Figuras 2 e 3.

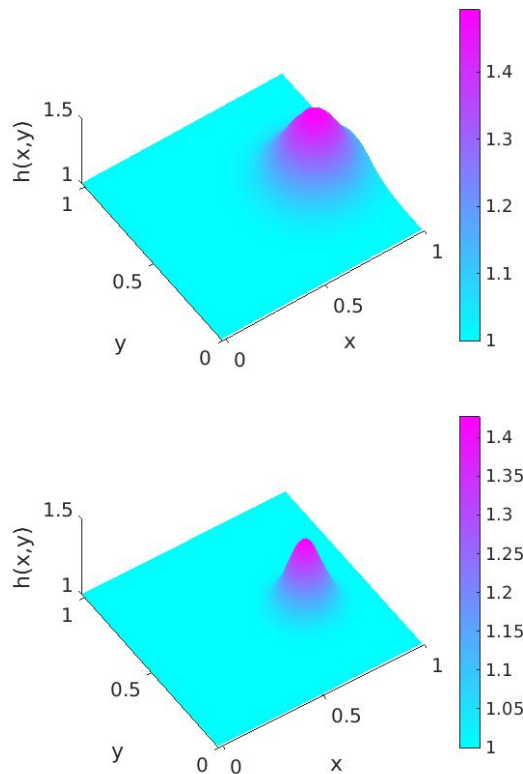
Figura 2 – Padrões de difração refracção para o caso do fundo marinho com um pico perto de linha costeira



Fonte: Elaboração dos autores (2023).



Figura 3 – Representação de  $h(x, y) = 1 + a \cdot \exp(-((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) / b)$  para a) dados reais (sintéticos), b) recuperados



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

### 6.4 Exemplo 2

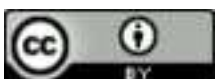
No segundo exemplo numérico, é escolhido um fundo marinho com dois picos próximos à linha costeira dado pela seguinte função:

$$h(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y), \tag{26}$$

onde

$$h_i(x, y) = 1 + a_i \cdot \exp(-((x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2) / b_i), \tag{27}$$

onde  $a_1 = 0,5$ ,  $b_1 = 0,03$ ,  $x_{01} = 0,8$ ,  $y_{01} = 0,3$ ,  $a_2 = 0,4$ ,  $b_2 = 0,03$ ,  $x_{02} = 0,73$  e  $y_{02} = 0,7$ . Na Figura 4 são apresentados os padrões de difração-refração para este caso. Se observa que a complexidade aumenta, por isso, este exemplo mostra que o método é capaz de recuperar a presença de mais padrões do fundo marinho.



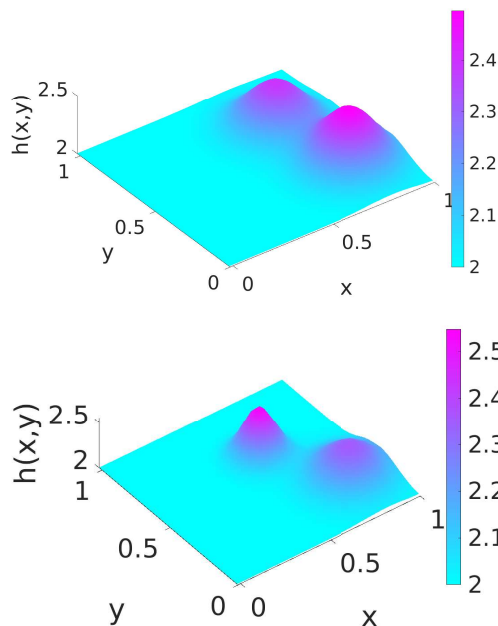
Para este exemplo, foram utilizados o número de ondas planas, assim como direção e período da onda, como no exemplo 1. Ao aumentar o número de parâmetros, foi necessário mais tempo no processo de recuperação, porém, obteve-se uma boa precisão. Como observação, o método de recuperação converge para a solução partindo de diferentes valores iniciais para os parâmetros. Os valores dos parâmetros recuperados são os seguinte:  $a_1 = 0,38$ ,  $b_1 = 0,0321$ ,  $x_{01} = 0,82$ ,  $y_{01} = 0,297$ ,  $a_2 = 0,62$ ,  $b_2 = 0,01$ ,  $x_{02} = 0,6$  e  $y_{02} = 0,65$ . Pode-se verificar que o primeiro pico foi recuperado com maior precisão. Nas Figuras 4 e 5, têm-se o fundo marinho exato e o recuperado.

Figura 4 – Padrões de difração refração para o caso do fundo marinho com dois picos perto de linha costeira

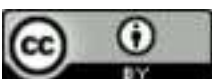


Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Figura 5 – Representação de  $h(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y)$  para a) dados reais (sintéticos), b) recuperados



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

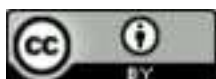


## 7 Conclusões

Neste artigo foi desenvolvido um método de recuperação robusto que permite obter o coeficiente de refração-difração com base no conhecimento das características das ondas na fronteira. Esse método pode ser aplicado em várias situações práticas, como na área de sismologia, acústica e engenharia costeira. Nesta pesquisa, o método foi aplicado para determinar a topografia do fundo do mar com base nas propriedades das ondas em águas profundas e ao longo da linha costeira. O exemplo numérico apresentado demonstra a eficácia do método descrito no artigo.

## Referências

- ALVAREZ, A. C.; GARCÍA, G. C.; SARKIS, M. The ultra weak variational formulation for the modified mild-slope equation. **Applied Mathematical Modelling**. v. 52, p. 28-41, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.018>.
- BAO, G.; LI, P. Shape reconstruction of inverse medium scattering for the Helmholtz equation. In: WANG, Y.; YAGOLA, A.; YANG C. (ed.). **Computational Methods for Applied Inverse Problems**. Berlin, Boston: De Gruyter, 2012. cap. 12. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110259056.283>.
- BERKHOFF, J. C. W. Computation of combined refraction - diffraction. **Coastal Engineering Proceedings**. v. 1, n. 13, p. 23, Jan. 1972. DOI: <https://doi.org/10.9753/ICCE.V13.23>.
- BORGES, C.; GILLMAN, A.; GREENGARD, L. High resolution inverse scattering in two dimensions using recursive linearization. **SIAM Journal on Imaging Sciences**. v. 10, n. 2, p. 641-664, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1137/16M1093562>.
- CESSENAT, O.; DESPRÉS, B. Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. v. 35, n. 1, p. 255-299, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036142995285873>.
- CESSENAT, O.; DESPRÉS, B. Using plane waves as base functions for solving time harmonic equations with the ultra weak variational formulation. **Journal of Computational Acoustics**. v. 11, n. 2, p. 227-238, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218396X03001912>.
- CHAMBERLAIN, P.; PORTER, D. The modified mild-slope equation. **Journal of Fluid Mechanics**. v. 291, p. 393-407, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112095002758>.
- CHEN, H. S.; HOUSTON, J. R. **Calculation of Water Oscillation in Coastal Harbors**. HARBS and HARBD User's Manual. Vicksburg, Mississippi: U. S. Army Engineer Research and Development Center (ERDC) (Instruction Report, CERC-87-2), 1987. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.11970/111457>. Acesso em: 25 jun. 2024.



COLLINS, R. **Nondestructive testing of materials**. Amsterdam: IOS Press, 1995. v. 8.

FASSIEH, K. M. A numerical technique to estimate water depths from remotely sensed water wave characteristics. **ISRN Oceanography**. v. 2013, 2013.

GILBERT, R. P.; XU, Y. An inverse problem for harmonic acoustics in stratified oceans. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. v. 176, n. 1, p. 121-137, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1203>.

GYLYS-COLWELL, F. An inverse problem for the Helmholtz equation. **Inverse Problems**. v. 12, n. 2, p. 139-156, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/12/2/003>.

HUTTUNEN T.; MONK, P.; KAIPIO, J. p. Computational aspects of the ultra-weak variational formulation. **Journal of Computational Physics**. v. 182, n. 1, p. 27-46, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7148>.

LE ROUX, J. P. An extension of the airy theory for linear waves into shallow water. **Coastal Engineering**. v. 55, n. 4, p. 295-301, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2007.11.003>.

PASTORINO, M. Medical and industrial applications of inverse scattering based microwave imaging techniques. **2008 IEEE International Workshop on Imaging Systems and Techniques**. Chania, Greece: IEEE, 2008. p. 34-38. DOI: <https://doi.org/10.1109/IST.2008.4659936>.

RADDER, A. C. On the parabolic equation method for water wave transformation. **Journal of Fluid Mechanics**. v. 95, n. 1, p. 159-176, 1979. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112079001397>.

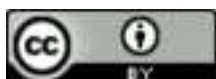
TARANTOLA, A. **Inverse problem theory and methods for model parameter estimation**. USA: SIAM, 2005.

TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. **Solutions of ill-posed problems**. Washington: V. H. Winston & Sons, 1977.

TSAY, T.-K.; LIU, P. L.-F. A finite element model for wave refraction and diffraction. **Applied Ocean Research**. v. 5, n. 1, p. 30-37, 1983. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-1187\(83\)90055-X](https://doi.org/10.1016/0141-1187(83)90055-X).

VASAN, V.; DECONINCK, B. The inverse water wave problem of bathymetry detection. **Journal of Fluid Mechanics**. v. 714, p. 562-590, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.497>.

WANG, Y. Regularization for inverse models in remote sensing. **Progress in Physical Geography: Earth and Environment**. v. 36, n. 1, p. 38-59, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1177/0309133311420320>.



## Agradecimentos

Agradecemos ao Comitê Organizador do ERMAC-2023 e, em particular, aos revisores que contribuíram para a melhora do texto aqui apresentado.

