A não equivalência entre os preços-sombra e as variáveis duais[1]

The non-equivalence between shadow prices and dual variables

La no equivalencia entre los precios sombra y las variables duales

Beatriz Akiria de Assis Quaresma[2]
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-2703-9242, http://lattes.cnpq.br/3813763376203860
Antonio Carlos Moretti[3]
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-5604-1002, http://lattes.cnpq.br/7699329111730482
Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira[4]
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-6471-4710, http://lattes.cnpq.br/6616948343647001

Resumo: No contexto da interpretação econômica aplicada a problemas de programação linear, explora-se o conceito de preço-sombra associado à $i-$ésima restrição, indicando a variação na função-objetivo quando o recurso b_i dessa restrição é modificado em uma unidade. Esse impacto se reflete na $i-$ésima variável dual w_i. Em problemas com solução ótima primal não degenerada, há uma relação estabelecida entre o preço-sombra da $i-$ésima restrição e a $i-$ésima variável dual w_i. Contudo, em cenários de solução degenerada, essa relação pode ser inválida. O propósito deste estudo é realizar uma análise detalhada dessa dinâmica e apresentar duas metodologias para calcular os preços-sombra corretos em problemas de programação linear com solução ótima primal degenerada. Utilizando como exemplo um problema proposto por Strum (1969) que apresenta solução degenerada, demonstra-se a não equivalência entre solução dual e preço-sombra. No final, é determinado os preços-sombra corretos do problema, empregando as estratégias delineadas no artigo.

Palavras-chave: dualidade; interpretação econômica; preços-sombra; programação linear; solução ótima degenerada.

Abstract: In the context of economic interpretation applied to linear programming problems, the concept of shadow price associated with the i-th constraint is explored, indicating the change in the objective function when the resource b_i of that constraint is modified by one unit. This impact reflects on the i-th dual variable w_i. In problems with non-degenerate primal optimal solutions, there's an established relationship between the shadow price of the i-th constraint and the i-th dual variable w_i. However, in scenarios with degenerate solutions, this relationship may be invalid. The purpose of this study is to conduct a detailed analysis of this dynamic and present two methodologies to compute the correct shadow prices in linear programming problems

[1] Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

[2] **Currículo sucinto**: Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia, *Campus* Pontal, mestra em Matemática Aplicada pela UNICAMP e doutoranda em Engenharia Elétrica pela Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP. **Contribuição de autoria**: Conceituação, Escrita – Primeira Redação e Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: b203899@dac.unicamp.br.

[3] **Currículo sucinto**: Graduado em Ciências da Computação e mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas, mestre em Pesquisa Operacional e doutor em Engenharia Industrial e Sistemas pelo *Georgia Institute of Technology*. Professor titular da UNICAMP. **Contribuição de autoria**: Conceituação, Escrita – Revisão e Edição, Supervisão. **Contato**: amoretti@unicamp.br.

[4] **Currículo sucinto**: Bacharel em Física e em Ciências da Computação, e mestre em Engenharia Elétrica pela UNICAMP, mestre em *Computational and Applied Mathematics* e doutor em *Computational and Applied Mathematics* pela *Rice University*. Pós-doutorando da FAPESP na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP. Professor titular da UNICAMP. **Contribuição de autoria**: Metodologia e Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: aurelio@po.ime.unicamp.br.

with degenerate primal optimal solutions. Using an example problem proposed by Strum (1969) that exhibits degenerate solutions, it demonstrates the non-equivalence between dual solution and shadow price. In the end, the correct shadow prices of the problem are determined by employing the strategies outlined in the article.

Keywords: duality; economic interpretation; shadow prices; linear programming; degenerate optimal solution.

Resumen: En el contexto de la interpretación económica aplicada a problemas de programación lineal, se explora el concepto de precio sombra asociado a la i-ésima restricción, indicando la variación en la función objetivo cuando el recurso b_i de esa restricción se modifica en una unidad. Este impacto se refleja en la i-ésima variable dual w_i. En problemas con solución óptima primal no degenerada, hay una relación establecida entre el precio sombra de la i-ésima restricción y la i-ésima variable dual w_i. Sin embargo, en escenarios de solución degenerada, esta relación puede no ser válida. El propósito de este estudio es realizar un análisis detallado de esta dinámica y presentar dos metodologías para calcular los precios sombra correctos en problemas de programación lineal con solución óptima primal degenerada. Utilizando como ejemplo un problema propuesto por Strum (1969) que presenta una solución degenerada, se demuestra la no equivalencia entre la solución dual y el precio sombra. Al final, se determinan los precios sombra correctos del problema empleando las estrategias delineadas en el artículo.

Palabras clave: dualidad; interpretación económica; precios sombra; programación lineal; solución óptima degenerada.

Data de submissão: 10 de janeiro de 2024.

Data de aprovação: 15 de abril de 2024.

1 Introdução

Considere um Problema de Programação Linear (PPL) primal (P) dado por:

$$(P) \quad \begin{cases} \min \quad z_p = & c^t x \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Associado a este problema (P), temos o PPL dual (D), que pode ser escrito como:

$$(D) \quad \begin{cases} \max \quad z_d = & b^t w \\ \text{s.a.} & A^t w \leq c \\ & w \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz dos coeficientes, com $posto(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ o vetor de recursos, $c \in \mathbb{R}^n$ o vetor de custos, $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor das variáveis do primal e $w \in \mathbb{R}^m$ o vetor das variáveis duais.

No estudo de Programação Linear (PL) definimos a variação da função-objetivo z_p como a derivada parcial de z_p em relação ao recurso b_i da $i-$ésima restrição como a $i-$ésima solução dual relativa a esta restrição (isto é, w_i), ou ainda:

$$\frac{\partial z_p}{\partial b_i} = w_i^* = p_i^+ = p_i^-,$$

em que p_i^+ é o preço-sombra positivo, isto é, a taxa de variação na função-objetivo para o aumento de uma unidade em b_i, e p_i^- é dito o preço-sombra negativo, ou seja, a taxa de variação na função-objetivo para a redução de uma unidade em b_i.

Entretanto, essa afirmação foi refutada por Strum (1969) quando escreveu uma nota sobre os “dois lados” do preço-sombra. O autor constatou, por meio de um exemplo, que o preço-sombra relativo ao “ganho em ter mais uma unidade de um recurso” era diferente do preço-sombra da “perda em ter uma unidade a menos”; em outras palavras, o preço-sombra positivo poderia ser diferente do preço-sombra negativo. Essa diferença acontece devido a solução do problema primal ser degenerada e, consequentemente, possuir um problema dual com solução ótima alternativa, possibilitando assim diferentes preços-sombra.

Dentro desse contexto, neste artigo buscamos comprovar que a solução ótima dual pode ser diferente do preço-sombra, quando consideramos o problema primal com solução ótima degenerada. Além disso, investigamos duas abordagens para determinar corretamente os valores dos preços-sombra. Por meio de exemplos práticos, mostramos como realizar os cálculos dos preços-sombra adequados de um problema primal degenerado cujo problema dual é alternativo.

O presente artigo está estruturado da seguinte forma: na seção 2 discutimos o exemplo de um problema primal com solução ótima degenerada apontado por Strum (1969), para verificar a não equivalência de preços-sombra e variáveis duais; na seção 3 propomos as duas estratégias para calcular os preços-sombra de um PPL com solução ótima primal degenerada de forma correta utilizando como exemplos o problema apresentado por Strum (1969); e, por fim, na seção 4, apresentamos nossas considerações finais.

2 Problema Primal Degenerado

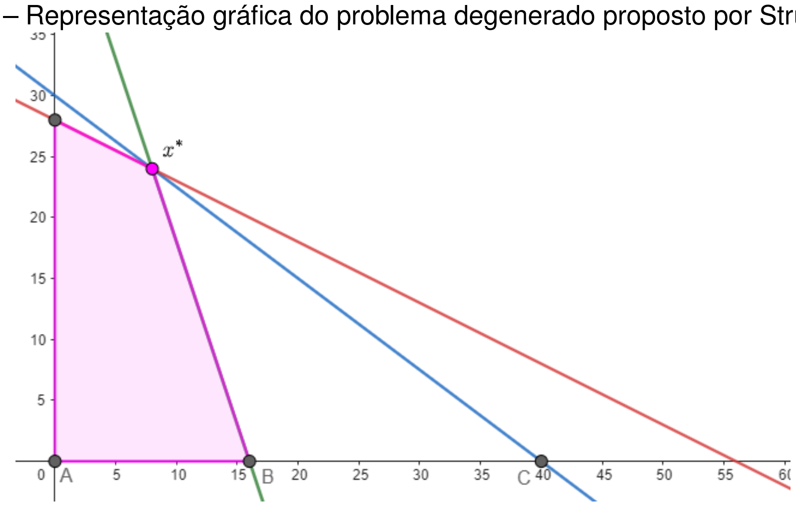
Considere o problema proposto por Strum (1969), que visa maximizar a produção de dois produtos, X e Y, enquanto se respeitam as capacidades de três máquinas. Para isso, definimos x_1

como a quantidade de produtos X produzidos e x_2 como a quantidade de produtos Y produzidos. A modelagem matemática do problema é dada por:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 48 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 56 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{3}$$

A resolução gráfica do problema (3) pode ser vista na Figura 1. Com o gráfico é possível notar que a segunda restrição é fracamente redundante[5] e ocasiona a degenerescência do problema.

Figura 1 – Representação gráfica do problema degenerado proposto por Strum (1969)



Fonte: Elaboração dos autores.

As Equações Básicas (EB) do problema em uma das bases ótimas são:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 &= 24 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 &= 0 + \frac{5}{2}x_4 - \frac{9}{2}x_5 \\ (\max)\ z &= 88 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \end{aligned} \tag{4}$$

[5]Uma restrição é considerada fracamente redundante em um problema de programação linear quando possui pelo menos um ponto em comum com o conjunto de restrições, mas pode ser removida do sistema sem alterar a região factível do problema.

QUARESMA, Beatriz Akiria de Assis; MORETTI, Antonio Carlos; OLIVEIRA, Aurelio Ribeiro Leite de. A não equivalência entre os preços-sombra e as variáveis duais. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. especial, p. e4010, 9 de julho de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10iespecialid7051.

Com isso, o Problema Primal (3) tem solução ótima única $x^* = (8, 24)^t$, com o valor ótimo $z^* = 88$. Porém, como podemos observar pelas EB, temos a variável básica $x_3 = 0$, ou seja, o problema primal tem solução ótima degenerada. Inicialmente, se quiséssemos calcular os preços-sombra do problema, assumiríamos o resultado das variáveis duais, isto é, $w^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^t$. Inclusive, utilizando o *solver* do Excel[6] temos o mesmo resultado, como é apresentado na Figura 2. Dessa forma, se planejássemos aumentar uma unidade do recurso relativo à segunda restrição, por exemplo, concluiríamos que a variação no valor ótimo da função-objetivo seria de $1/2$, o que é equivocado, uma vez que não há variação no valor ótimo.

Figura 2 – Relatório de sensibilidade do problema do Strum (1969) emitido pelo *solver* do Excel

Microsoft Excel 16.0 Relatório de Sensibilidade
Planilha: [Pasta1]Planilha1
Relatório Criado: 30/08/2023 15:32:47

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
E5	le	48	0	48	1E+30	0
E6	le	120	0,5	120	0	8
E7	le	56	0,5	56	4	0

Fonte: Elaboração dos autores.

Isso acontece pelo fato do *solver* emitir a solução dual, que corresponde à primeira base ótima encontrada (no ponto degenerado) que satisfaz o critério de otimalidade, como preço-sombra, e não busca por uma base que corresponda a um aumento no recurso e uma outra base que corresponda à redução do recurso. Demonstrando que não estamos completamente isentos de erros ao confiar nos resultados oferecidos por *softwares* de programação linear, pois esses geralmente apresentam uma única solução, sem indicar a presença de outras alternativas possíveis.

Por outro lado, poderíamos observar que a solução ótima dual é alternativa, sendo $\overline{w}^* = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{7}{5}\right)$ o outro ponto extremo do problema. E, considerando essa solução dual, se desejássemos reduzir uma unidade do recurso relativo à segunda restrição, a título de exemplo, deduziríamos que não haveria variação na função-objetivo do problema primal, o que é equivocado, uma vez que o valor ótimo passaria para $87,5$.

Quando o problema primal possui solução ótima não degenerada é verdade que o preço-sombra é igual à solução dual, porém, isso não acontece sempre, como vimos no exemplo anterior.

[6] *Solver* é um suplemento do *Microsoft Excel* usado para teste de hipóteses. Ele é um *software* para programação matemática integrado ao Excel que resolve problemas de programação linear.

Isso mostra que pode não existir uma equivalência entre preços-sombra e soluções duais e, consequentemente, não é correto afirmar que os preços-sombra são iguais às soluções duais.

3 Cálculo dos Preços-Sombra

Conhecendo as dificuldades apresentadas na seção anterior, abordamos duas estratégias para calcular corretamente os preços-sombra de um problema de programação linear com solução ótima primal degenerada. A primeira, inspirada no trabalho de Akgül (1984), constrói um problema de programação linear auxiliar muito menor que o problema inicial. Já a segunda abordagem é baseada na Análise Paramétrica, como mencionada no artigo de Gal (1986), na qual aplica-se o conceito de perturbar o vetor de recursos em direções específicas para encontrar os preços-sombra.

3.1 Abordagem 1

Assumindo que o problema primal tenha solução ótima degenerada, é conhecido que o problema dual associado possui soluções ótimas alternativas. Visto que os preços-sombra estão associados à solução ótima do problema dual, que nesse caso é alternativa, é necessário caracterizar a região de todas as soluções ótimas do dual e, a partir disso, calcular os verdadeiros preços-sombra.

Descrevemos a região de todas as soluções alternativas do dual como:

$$\hat{w} = w^* + D\lambda \geq 0,$$

em que D é a matriz cujas colunas são as direções simplex das variáveis não básicas, com os custos reduzidos iguais a zero, a partir do ponto ótimo w^*. Observe que os pontos $\hat{w}$, dados por λ, pertencem a toda região formada pela combinação linear positiva das direções simplex, porém, é preciso manter a factibilidade do problema, por isso impomos que $\hat{w} \geq 0$. Contudo, essas informações são relacionadas com a solução do problema dual e queremos formar a região absorvendo os dados diretamente do problema primal, sem criar o problema dual e resolvê-lo.

Observando que o vetor w^* é a solução do dual, sabemos que as variáveis estruturais do dual são os custos reduzidos das variáveis de folga do primal; já as variáveis de folga duais são dadas pelos custos reduzidos das variáveis estruturais do primal. Com isso, adquirimos a solução dual na linha da função-objetivo das EB no ótimo. Agora, para a matriz D, ou seja, para as direções simplex desse ponto dual, inicialmente suponha que a variável básica x_k do problema primal no ótimo seja degenerada, com isso $\overline{b_k} = 0$; esse valor se transforma no custo reduzido da variável w_k no problema dual associado, o que vai indicar que a solução ótima é alternativa. Sabemos que a direção simplex desta variável dual w_k se encontra nos coeficientes das variáveis da coluna do custo reduzido igual a zero. Dessa forma, nas EB do problema primal, a direção simplex fica nos coeficientes das variáveis primais na linha da variável degenerada. Porém, devemos nos atentar com a ordem das componentes do vetor, uma vez que seguem as posições das variáveis duais com relação aos custos reduzidos.

Com isto em mente, vamos caracterizar a região formada pelas soluções ótimas alternativas do problema proposto por Strum (1969). Queremos recuperar as informações de $\hat{w} = w^* + D\lambda$ pelas EB determinadas em (4); para tanto, vamos considerar as linhas degeneradas e a linha da função-objetivo (com intuito de visualizarmos melhor as posições das variáveis duais, inserimos as equações com todas as variáveis primais em ordem do lado esquerdo e, a partir disso, podemos verificar que as variáveis duais assumem as posições iniciando na primeira variável de folga do primal):

$$
\begin{array}{ccc}
0x_1 + 0x_2 & | & +1x_3 - \dfrac{5}{2}x_4 + \dfrac{9}{2}x_5 = 0 \\
0x_1 + 0x_2 & | & +0x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{1}{2}x_5 = 88 \\
w_4 \quad w_5 & | & w_1 \quad\quad w_2 \quad\quad w_3
\end{array}
$$

Consequentemente, podemos extrair uma solução dual ótima e a direção que nos interessa, como descrito anteriormente, assim:

$$
w^* = \left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)^t \quad \text{e} \quad D = \left(1,\ -\frac{5}{2},\ \frac{9}{2},\ 0,\ 0\right)^t.
$$

QUARESMA, Beatriz Akiria de Assis; MORETTI, Antonio Carlos; OLIVEIRA, Aurelio Ribeiro Leite de. A não equivalência entre os preços-sombra e as variáveis duais. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. especial, p. e4010, 9 de julho de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10iespecialid7051.

Assim, definimos a região formada por todas as soluções ótimas do dual por:

$$\hat{w} = w^* + D\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} \lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\lambda \\ \frac{1}{2} + \frac{9}{2}\lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0. \tag{5}$$

Ou seja, removendo as inequações redundantes do sistema (5), temos o sistema de inequações (6), da seguinte forma:

$$(\Lambda) \quad \begin{cases} \lambda \leq \frac{1}{5} \\ \lambda \geq 0 \end{cases} . \tag{6}$$

Conhecendo a região das soluções ótimas do dual, que chamaremos de W^*, podemos calcular os preços-sombras corretos de um problema primal utilizando como base o formato canônico de minimização, (P).

Para isso, definimos uma função F em relação ao vetor recurso, de modo que

$$F(b) = \min \left\{ c^t x : Ax \geq b, x \geq 0 \right\}.$$

Com isso, a derivada direcional de F em b na direção de um vetor $u \in \mathbb{R}^m$ é dada por:

$$D_u F(b) = \max \left\{ u^t w;\ w \in W^* \right\},$$

ou seja, a derivada direcional nada mais é do que um PPL, de menor dimensão, com as variáveis pertencentes à região das soluções ótimas do dual, uma vez que pode ser reescrita por:

$$\begin{array}{ll} \max & u^t w \\ \text{sujeito a} & w \in W^*. \end{array}$$

Akgül (1984) descreve preço-sombra positivo da $i-$ésima restrição como a taxa de variação de $F(b)$ para um aumento de uma unidade em b_i por:

$$p_i^+ = D_{e_i}F(b) = \max\{e_i^t w;\ w \in W^*\},$$

e o preço-sombra negativo da $i-$ésima restrição, isto é, a taxa de variação de $F(b)$ para uma redução de uma unidade em b_i, fica:

$$p_i^- = D_{-e_i}F(b) \quad = \quad \max\left\{(-e_i)^t w;\ w \in W^*\right\} = \min\left\{e_i^t w;\ w \in W^*\right\}.$$

Empregamos o vetor canônico para a direção, pois estamos interessados em saber a taxa de variação na função-objetivo para a pertubação de uma unidade. Além disso, como a ideia do preço-sombra negativo é a taxa de variação da função-objetivo para a redução de uma unidade, utilizamos o valor absoluto em p_i^-.

Em resumo, podemos escrever os preços-sombra como PPL auxiliares. Isto é, para calcular p_i^+ temos que resolver o seguinte problema:

$$\begin{array}{cl} \max & e_i^t w \\ \text{sujeito a} & w \in W^*; \end{array}$$

já para o cálculo de p_i^-, temos que resolver:

$$\begin{array}{cl} \min & e_i^t w \\ \text{sujeito a} & w \in W^*. \end{array}$$

Portanto, para calcular os preços-sombra positivo e negativo de cada restrição precisamos apenas resolver esses dois pequenos PPL para cada restrição.

Importante mencionar que essas definições são baseadas na $i-$ésima restrição no formato canônico em relação ao Problema Primal (1). De maneira mais abrangente, definimos:

$$p_i^+ = \begin{cases} \max\{e_i^t w;\ w \in W^*\}, \text{ se } i-\text{ésima restrição for de } \geq \\ \\ \min\{e_i^t w;\ w \in W^*\}, \text{ se } i-\text{ésima restrição for de } \leq, \end{cases}$$

e,

$$p_i^- = \begin{cases} \min\{e_i^t w;\ w \in W^*\}, \text{ se } i\text{−ésima restrição for de } \geq \\ \\ \max\{e_i^t w;\ w \in W^*\}, \text{ se } i\text{−ésima restrição for de } \leq . \end{cases}$$

Diante disso, vamos usar o vetor $\hat{w}$, determinado na equação (5), e a região Λ, definida pelo sistema (6), para calcular os preços-sombras do problema de Strum (1969). Como o problema (3) não está no formato canônico de minimização, as restrições são de $\leq$, os preços-sombra são dados por:

$$p_i^+ = \min\left\{e_i^t w;\ w \in W^*\right\} \text{ e } p_i^- = \max\left\{(-e_i)^t w;\ w \in W^*\right\}.$$

Logo, os preços-sombra positivo e negativo corretos de cada restrição são:

(1A) p_1^+:

$$\begin{array}{ccc} \min & z_\lambda = & \lambda \\ \text{sujeito a} & & \lambda \in (\Lambda) \end{array}$$

cuja solução é $\lambda^* = 0$. Assim, $p_1^+ = 0$.

(1B) p_1^-:

$$\begin{array}{ccc} \max & z_\lambda = & \lambda \\ \text{sujeito a} & & \lambda \in (\Lambda) \end{array}$$

cuja solução é $\lambda^* = \dfrac{1}{5}$. Assim, $p_1^- = \dfrac{1}{5}$.

(2A) p_2^+:

$$\begin{array}{ccc} \min & z_\lambda = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\lambda \\ \text{sujeito a} & & \lambda \in (\Lambda) \end{array}$$

cuja solução é $\lambda^* = \dfrac{1}{5}$. Dessa forma, $p_2^+ = 0$.

QUARESMA, Beatriz Akiria de Assis; MORETTI, Antonio Carlos; OLIVEIRA, Aurelio Ribeiro Leite de. A não equivalência entre os preços-sombra e as variáveis duais. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. especial, p. e4010, 9 de julho de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10iespecialid7051.

(2B) p_2^-:

$$\begin{array}{lcl} \max & z_\lambda = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\lambda \\ \text{sujeito a} & & \lambda \in (\Lambda) \end{array}$$

cuja solução é $\lambda^* = 0$. Dessa forma, $p_2^- = \dfrac{1}{2}$.

(3A) p_3^+:

$$\begin{array}{lcl} \min & z_\lambda = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2}\lambda \\ \text{sujeito a} & & \lambda \in (\Lambda) \end{array}$$

cuja solução é $\lambda^* = 0$. Portanto, $p_3^+ = \dfrac{1}{2}$.

(3B) p_3^-:

$$\begin{array}{lcl} \max & z_\lambda = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2}\lambda \\ \text{sujeito a} & & \lambda \in (\Lambda) \end{array}$$

cuja solução é $\lambda^* = \dfrac{1}{5}$. Portanto, $p_3^- = \dfrac{7}{5}$.

Resumindo, os preços-sombra corretos do problema proposto por Strum (1969) são:

$$\begin{array}{llllll} p_1^+ & = 0 & p_2^+ & = 0 & p_3^+ & = \dfrac{1}{2} \\ p_1^- & = \dfrac{1}{5} & p_2^- & = \dfrac{1}{2} & p_3^- & = \dfrac{7}{5}. \end{array}$$

3.2 Abordagem 2

Uma alternativa para determinar os preços-sombra positivo, p_i^+, e negativo, p_i^-, é empregar a abordagem da Análise Paramétrica (AP) (Gal, 1986). Nesse contexto, perturbamos individualmente cada restrição i com $i = 1, 2, \ldots, m$ ao longo das direções $d = +e_i$, para o preço-sombra positivo e $d = -e_i$, para o preço-sombra negativo. Isso é expresso por $b + \lambda d$, com $\lambda \geq 0$.

Para tal, definimos o conjunto:

$$S = \{i : \overline{d} < 0\},$$

em que $\overline{d} = B^{-1}d$. A partir dessa definição, verificamos se $S = \emptyset$. Em caso afirmativo, a base atual é ótima para todos os valores de $\lambda \geq 0$. Nesse cenário, encerramos o processo da AP e calculamos o preço-sombra. Caso contrário, encontramos um intervalo crítico, $\left[0, \hat{\lambda}\right]$, no qual a base atual permanece ótima. Aqui,

$$\hat{\lambda} = \min_{i \in S} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{-\overline{d_i}} \right\},$$

com $\overline{b} = B^{-1}b$.

É importante notar que estamos interessados apenas em determinar o p_i^+ e o p_i^- de cada restrição i, portanto, buscamos apenas o primeiro intervalo crítico, ou seja, $\lambda = 1$. No entanto, é crucial considerar o caso em que $\hat{\lambda} = 0$, pois nessa situação não é viável realizar nenhum movimento com a base atual. Logo, é necessário mudar a base, realizando um pivotamento na variável degenerada (utilizando o Método Dual Simplex (MDS) para manter a otimalidade do primal). Essa ação leva à identificação de uma outra base ótima que representa o mesmo ponto degenerado.

Assim, utilizando a AP com as devidas ressalvas, podemos encontrar os preços-sombra corretos de problemas de programação linear com solução ótima primal degenerada, como é o caso do problema de Strum (1969). Pelas EB (4) conseguimos descrever a base ótima que a represente, logo:

$$B = [a^1, a^2, a^3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix},$$

em que a^j descreve a $j-$ésima coluna da matriz A do problema (3), considerando as variáveis de folga.

Agora, ao realizar os cálculos dos preços-sombra por meio da Análise Paramétrica, obtemos:

(1A) p_1^+: Utilizando a direção $d = e_1 = (1, 0, 0)^t$, encontramos:

$$\overline{d} = B^{-1}d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como este vetor não possui entrada negativa, temos que $S = \emptyset$. Neste caso, a base atual é ótima para todos os valores de $\lambda \geq 0$. Por fim, para determinar o preço-sombra positivo da 1ª restrição, isto é, p_1^+, calculamos a variação no valor ótimo do problema na direção dada:

$$z(\lambda) \quad = \quad z^* + \lambda c_B^t \overline{d} = 8 + \lambda(2,3,0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 8 + 0\lambda,$$

o que mostra que quando $\lambda = 1$ não ocorre variação na função-objetivo, ou seja, $p_1^+ = 0$. Vale destacar que nesse caso qualquer $\lambda \geq 0$ não afetará o valor ótimo inicial, uma vez que essa base continuará ótima.

(1B) p_1^-: Para p_1^- usamos a direção $d = -e_1 = (-1, 0, 0)^t$, com isso:

$$\overline{d} = B^{-1}d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso o vetor possui a terceira entrada negativa, com isso, $S = \{3\}$. Então, calculamos o intervalo crítico:

$$\hat{\lambda} = \min \left\{ \frac{0}{\frac{1}{2}} \right\} = 0.$$

Como $\hat{\lambda} = 0$ não é possível "andar" na direção d, por essa razão precisamos mudar a base ótima atual; isso significa que a terceira variável básica deve sair da base (nas EB (4)), ou seja, x_3 sairá da base. Pelo teste da razão do MDS, temos:

$$\min \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \right\} = \frac{1}{5},$$

então, a variável x_4 deve entrar na base. Assim, as novas EB no ótimo são dadas por:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 8 \ -\dfrac{2}{5}x_3 + \dfrac{1}{5}x_5 \\ x_2 & = & 24 + \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{3}{5}x_5 \\ x_4 & = & 0 \ + \dfrac{2}{5}x_3 + \dfrac{9}{5}x_5 \\ (\max)\ z & = & 88 - \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{7}{5}x_5 \end{array} \tag{7}$$

Portanto, a nova base é dada por:

$$B = [a^1, a^2, a^4] \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} & 0 & -\dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{1}{5} & 0 & \dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{2}{5} & 1 & -\dfrac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, calculando $\overline{d}$ com a nova base ótima, temos:

$$\overline{d} = B^{-1}d = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

O vetor ainda possui uma entrada negativa, no caso a primeira, isto é, $S = \{1\}$. Logo, calculamos o intervalo crítico:

$$\hat{\lambda} = \min \left\{ \dfrac{8}{\dfrac{2}{5}} \right\} = 20.$$

Como $\hat{\lambda} \neq 0$ e precisamos apenas de $\lambda = 1$, podemos determinar o preço-sombra negativo da primeira restrição, ou seja:

$$z(\lambda) \quad = \quad z^* + \lambda c_B^t \overline{d} = 8 + \lambda(2, 3, 0) \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{bmatrix} = 8 - \dfrac{1}{5}\lambda.$$

Isso indica que, quando $\lambda = 1$, a alteração na função-objetivo é uma diminuição de $\frac{1}{5}$, ou seja, $p_1^- = \frac{1}{5}$. É importante notar que, nesse contexto, poderíamos verificar a variação na função-objetivo com λ até 20, uma vez que a base permanece ótima dentro desse intervalo.

Para concluir, ao seguir esse método em outras direções, obteríamos os demais preços-sombra, os quais seriam os mesmos identificados pela primeira abordagem.

4 Considerações Finais

Neste artigo, demostramos que quando o problema primal é degenerado, o preço-sombra de aumentar a disponibilidade de um recurso pode ser diferente do preço-sombra de reduzir a disponibilidade do mesmo recurso, e que o preço-sombra não é equivalente à solução ótima dual quando temos solução ótima primal degenerada. É importante ressaltar que, embora tenhamos exemplificado o erro gerado pelo *solver* do Excel, esse problema também é encontrado em outros *solvers* mais robustos de PL, como o CPLEX e Gurobi.

Além disso, apresentamos duas formas de calcular os valores dos preços-sombra corretamente. A Abordagem 1 fornece o resultado do preço-sombra ao resolver um PPL auxiliar consideravelmente menor, porém requer caracterizar a região formada por todas as soluções ótimas alternativas, além de resolver até $2m$ problemas de programação linear para determinar todos os preços-sombra do PPL. Já a Abordagem 2, além de encontrar os preços-sombra corretos, indica o intervalo crítico no qual a variação é válida. No entanto, em muitos casos, demanda vários pivotamentos, resultando em um custo computacional maior.

Dessa forma, os objetivos deste estudo foram alcançados. Para futuras pesquisas, podemos explorar como utilizar o Método dos Pontos Interiores para determinar os preços-sombra corretos em contextos de solução ótima degenerada. Além disso, analisar o impacto real em decisões gerenciais ao considerar os preços-sombra como solução dual, utilizando *solvers* de PL, seria valioso.

Referências

AKGÜL, M. A Note on Shadow Prices in Linear Programming. **Journal of the Operational Research Society**, [*S. l.*], v. 35, n. 5, p. 425-431, 1984. DOI: https://doi.org/10.1057/jors.1984.83.

GAL, T. Shadow prices and sensitivity analysis in linear programming under degeneracy. **Operations Research Spektrum**, [*S. l.*], v. 8, p. 59-71, 1986. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01719736.

STRUM, J. E. Note on “Two-Sided Shadow Prices”. **Journal of Accounting Research**, [*S. l.*], v. 7, n. 1, p. 160-162, 1969. DOI: https://doi.org/10.2307/2490273.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).