Os números suavemente ondulantes generalizados

Generalized smoothly oscillating numbers

Números suavemente ondulantes generalizados

Eudes Antonio Costa[1]
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Colegiado de Matemática, Arraias, TO, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-6684-9961, http://lattes.cnpq.br/8731273940556992
Douglas Catulio dos Santos[2]
Secretaria Estadual de Educação, Barreiras, BA, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-5221-6087, http://lattes.cnpq.br/7655950014904500

Resumo: Neste artigo, para uma base $d \geq 2$ fixada, apresentamos e analisamos algumas propriedades associadas à classe dos números suavemente ondulantes da forma $[ab_n]_d$, que chamaremos de NSOG. Expressamos a Fórmula de Binet para todo NSOG. Em particular, estudamos a relação de divisibilidade ou multiplicidade entre dois números NSOG. Em destaque os NSOG são aqueles formados apenas por 1 e 0, em qualquer base $d \geq 2$, e denotamos por $[10_n]_d$. Acerca destes números $[10_n]_d$, mostramos que nenhum é primo em base 10. E mais, apresentamos um algoritmo para o cálculo do MDC entre dois números $[10_n]_d$, com n ímpar. Além disso, mostramos que a diferença entre dois números NSOG é um quadrado perfeito. Por fim, apresentamos a conexão entre os NSOG com os números monodígitos, repunidades e triangulares.

Palavras-chave: base; divisibilidade; números suavemente ondulantes generalizados.

Abstract: In this article, for a fixed base $d \geq 2$, we present and analyze some properties associated with the class of smoothly undulating numbers of the form $[ab_n]_d$, which we will call NSOG. We provide Binet's Formula for every NSOG. In particular, we study the divisibility or multiplicity relationship between two NSOG numbers. In NSOGs, those formed only by 1 and 0, in any base $d \geq 2$, are highlighted, and we denote them by $[10_n]_d$. Regarding these numbers $[10_n]_d$, we show that none of them is prime in base 10. Furthermore, we present an algorithm for calculating the GCD between two numbers $[10_n]_d$, with n odd. Additionally, we show that the difference between two NSOG numbers is a perfect square. Finally, we present the connection between NSOGs and monodigit, repunit, and triangular numbers.

Keywords: base; divisibility; generalized smoothly oscillating numbers.

[1]**Currículo sucinto**: Graduado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, graduado em Filosofia pela Pontífice Universidade Católica de Goiás, mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, doutor em Matemática pela Universidade de Brasília, possui pós-doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará. Professor adjunto da Universidade Federal do Tocantins, *Campus* Arraias. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: eudes@uft.edu.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia, mestre em Matemática pela Universidade Federal do Tocantins. Professor efetivo da Secretaria de Educação do Estado da Bahia, no Colégio da Polícia Militar Prof. Alexandre Leal Costa. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: catuliodouglas4@gmail.com.

Resumen: En este artículo, para una base $d \geq 2$ fijada, presentamos y analizamos algunas propiedades asociadas a la clase de los números suavemente ondulantes de la forma $[ab_n]_d$, que llamaremos NSOG. Expresamos la fórmula de Binet para todo NSOG. En particular, estudiamos la relación de divisibilidad o multiplicidad entre dos números NSOG. Destacamos que los NSOG son aquellos formados solo por 1 y 0, en cualquier base $d \geq 2$, y los denotamos por $[10_n]_d$. En relación con estos números $[10_n]_d$, mostramos que ninguno es primo en base 10. Además, presentamos un algoritmo para el cálculo del MCD entre dos números $[10_n]_d$, con n impar. También mostramos que la diferencia entre dos números NSOG es un cuadrado perfecto. Finalmente, presentamos la conexión entre los NSOG con los números monodígitos, repunidades y triangulares.

Palabras clave: base; divisibilidad; números suavemente ondulantes generalizados.

Data de submissão: 9 de janeiro de 2024.

Data de aprovação: 8 de agosto de 2024.

1 Introdução

Nestas notas, nos referimos a *"números"* como elementos do conjunto dos números inteiros positivos (números naturais). De forma mais específica, analisamos propriedades relacionadas aos critérios de divisibilidade e mudança de base de números denominados "suavemente ondulantes".

Um número é ondulante quando seus algarismos (ou dígitos) alternadamente oscilam para maior ou menor que os dígitos adjacentes a ele, por exemplo: 275956, 739086 e 562739 são ondulantes; enquanto 2024 não é ondulante, pois $0 < 2 < 4$. Veja ainda que, em um número ondulante, a diferença absoluta entre dois algarismos adjacentes pode variar para maior ou menor. De modo formal, temos a seguinte definição:

Definição 1.1. *Seja $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ o conjunto de dígitos ou algarismos no sistema posicional decimal. Um número N, com $n > 2$ algarismos é ondulante quando,*

$$N = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n, \text{ com } a_1 \neq 0 \text{ e } a_i \in D, \text{ para } i = 1,2,3,...n,$$

e alternadamente, $a_1 < a_2$, $a_2 > a_3$, ... ou $a_1 > a_2$, $a_2 < a_3$, ..., ou seja, após o primeiro dígito o valor do próximo dígito aumenta, e o seguinte diminui, seguindo assim alternadamente; ou o segundo diminui e o seguinte aumenta.

Um subconjunto dos números ondulantes são os *números suavemente ondulantes*. Considere os números ondulantes $1010101, 787878$ e 9090909. Nestes, o valor absoluto da diferença entre dois algarismos adjacentes é sempre constante, ou seja, existe um padrão de crescimento e decrescimento. Apresentamos a seguinte definição:

Definição 1.2. *Um número natural N, formado por $n > 2$ algarismos é suavemente ondulante quando,*

$$N = \underbrace{aba\cdots ab}_{n \ \ par} \text{ ou } N = \underbrace{aba\cdots ba}_{n \ \ ímpar} \text{ com } a,\ b \in D,\ a \neq b \text{ e } a \neq 0\ .$$

Usaremos a notação $N = ab_n$, e mais AB indicará a subclasse dos números suavemente ondulante formado pelos algarismos a e b, isto é, $ab_n \in AB$. Portanto, os números $20_4 = 2020$, $10_5 = 10101$ e $98_8 = 98989898$ são suavemente ondulantes. Na base decimal, os números suavemente ondulantes já foram abordados em diversos trabalhos: Carvalho e Costa (2022), Costa e Costa (2021), Costa e Souza (2024), Pickover (1990, 1995, 2003), Robinson (1994), Santos e Costa (2023) e Shirriff (1994).

Neste artigo, exploraremos algumas características dos números suavemente ondulantes em uma base numérica diferente $d \geq 2$. Pickover (1990) introduziu o termo *números suavemente ondulantes duplos* para se referir aos números que são simultaneamente suavemente ondulantes nas bases 10 e 2, e ele forneceu alguns exemplos. Números suavemente ondulantes em outras bases numéricas $d \geq 2$ também foram estudados por Carvalho e Costa (2022), Robinson (1994) e Shirriff (1994). Formalmente, podemos definir números suavemente ondulantes da seguinte forma:

Definição 1.3. *Para um número $d \geq 2$, seja $D = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ o conjunto de dígitos ou algarismos no sistema posicional numérico na base d. Um número natural $[N]_d$, escrito na base d, formado por $n > 2$ algarismos é suavemente ondulante generalizado quando,*

$$[N]_d = a\cdot d^{2n-1} + b\cdot d^{2n-2} + \cdots + a\cdot d^3 + b\cdot d^2 + a\cdot d + b = [\underbrace{aba\cdots ab}_{n \ \ par}]_d$$

ou

$$[N]_d = a\cdot d^{2n-1} + b\cdot d^{2n-2} + \cdots + a\cdot d^4 + b\cdot d^3 + a\cdot d^2 + b\cdot d + a = [\underbrace{aba\cdots ba}_{n \ \ ímpar}]_d$$

com $a,\ b \in D,\ a \neq b$ e $a \neq 0$.

Dizemos que o número natural $[N]_d = [ab_n]_d$ é um número *suavemente ondulante generalizado* ou *suavemente ondulante* na base d. Assim, os números suavemente ondulantes generalizados, ou suavemente ondulantes na base d, tem sua representação na base d e segue um padrão alternado de crescimento e decrescimento entre seus dígitos.

Nestas notas, apresentamos parte de nosso estudo acerca dos números suavemente ondulantes generalizados, ou NSOG. Portanto, são exibidas propriedades ou resultados relacionados aos NSOG em diferentes bases, além da decimal. Na Seção 2, apresentamos algumas propriedades dos NSOG na base decimal. Nas Seções 3 e 4, apresentamos os resultados referentes aos NSOG em uma base $d \geq 2$. Em particular, destacamos na Seção 6, o Teorema 5.4 que fornece um algoritmo para o cálculo do MDC entre dois números suavemente ondulantes formados apenas pelos algarismos 1(um) e zero (0), os números um-zero 10_k, com k ímpar, em qualquer base $d \geq 2$. Além disso, nas Seções 5 e 7, abordamos a relação entre os números 10_k generalizados, os quadrados perfeitos e algumas sequências numéricas.

Para tornar o texto mais autocontido e oferecer comodidade ao leitor, apresentaremos as demonstrações de alguns resultados, mesmo que referências sejam fornecidas.

2 Alguns resultados na base decimal

Sejam $0 \neq a$ e b em $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Um número suavemente ondulante pertencente ao conjunto AB é indicado por ab_n, em que n indica a quantidade de dígitos do número $ab_n \in AB$. Por exemplo, $10_3 = 101,\ 57_5 =\ 57575$, e $39_4 = 3939$ são números suavemente ondulantes. Cavalho e Costa (2022) observaram que qualquer número suavemente ondulante ab_n pode ser representado por:

$$ab_n = \left\{ a\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 10^{2i} + b\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{2i-1}, \text{ se } n \text{ é ímpar.} \right. \tag{1}$$

$$ab_n = \left\{ a\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 10^{2i-1} + b\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 10^{2i}, \text{ se } n \text{ é par.} \right. \tag{2}$$

Exemplo 2.1. *Fazendo $a = 1$, $b = 0$ e $n = 7$ na Equação (1), temos que 10_7 pode ser expresso na forma*

$$10_7 = 1\sum_{i=0}^{3} 10^{2i} + 0\sum_{i=1}^{3} 10^{2i-1} = 10^6 + 10^4 + 10^2 + 10^0 = 1010101\ .$$

De outro modo, fazendo $a = 3$, $b = 4$ e $n = 6$ na Equação (2), temos que 34_6 pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} 34_6 &= 3\sum_{i=1}^{3} 10^{2i-1} + 4\sum_{i=0}^{2} 10^{2i} \\ &= 3(10^5 + 10^3 + 10^1) + 4(10^4 + 10^2 + 10^0) \\ &= 3 \cdot 101010 + 4 \cdot 10101 \ = \ 343434\ . \end{aligned}$$

https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7045.

Considere o subconjunto $UZ = \{10_n : \ n \geq 2\} \subset AB$. Assim 10_n representa um número formado pelos algarismos 1 e 0, de forma alternada; e $n > 2$ indica a quantidade de algarismos. Dito isto, temos $10_3 = 101$, $10_4 = 1010$ e assim, sucessivamente. O número 10_n, termina em 0 se n é par; caso contrário, termina em 1 .

Exemplo 2.2. *(Costa; Costa; 2021) Por inspeção direta nos divisores dos seis primeiros números suavemente ondulantes UZ obtemos que:*

1. *o número $10_2 = 10 = 2 \cdot 5$ não é primo;*
2. *o número $10_3 = 101$* **é primo***;*
3. *o número $10_4 = 1010 = 10 \cdot 101$ não é primo;*
4. *o número $10_5 = 10101 = 111 \cdot 91$ não é primo;*
5. *o número $10_6 = 101010 = 10 \cdot 10101$ não é primo;*
6. *o número $10_7 = 1010101 = 101 \cdot (10^4 + 1)$ não é primo.*

No Exemplo 2.2 listamos apenas uma fatoração, a título de exemplo, quando o número 10_n é composto.

O próximo resultado é imediato.

Proposição 2.3. *(Costa; Souza, 2024) Todo número da forma 10_{2k} é múltiplo de 2 e 5, para todo $k > 1$.*

Demonstração. Usando a Equação (2), para todo $k \geq 2$, temos

$$10_{2k} = \sum_{i=1}^{k} 10^{2i-1} = \sum_{i=2}^{k} 10^{2i-1} + 10 \ .$$

Logo, $10_{2k} \equiv 0 \mod 2$, bem como $10_{2k} \equiv 0 \mod 5$. □

Agora, usando a Equação (1) e para todo $k \geq 1$, temos

$$10_{2k+1} = \sum_{i=1}^{k} 10^{2i} + 1 \ .$$

Esta igualdade garante que

https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7045.

Proposição 2.4. *(Costa; Souza, 2024) Todo número da forma* 10_{2k+1} *não é múltiplo nem de* 2*, nem de* 5*, para todo* $k \geq 1$*.*

Segue facilmente que nenhum número 10_{2k} é primo, visto que 10_{2k} termina em 0, ou seja, 10_{2k} é par e múltiplo de 5. Contudo, se n for ímpar, 10_n termina em 1. Em complemento ao Exemplo 2.2, a seguir, apresentamos uma fatoração para os números do tipo 10_n com $5 \leq n \leq 15$ ímpar. Por questões didáticas, vamos separar em dois tipos.

Exemplo 2.5. *(Costa; Costa, 2021) Veja uma fatoração para os números* 10_{4q+1} *para* $1 \leq q \leq 3$*:*

- $10_5 \;=\; 10101 \;=\; 111(10^2 - 10 + 1)$ *;*
- $10_9 \;=\; 101010101 \;=\; 11111(10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$ *;*
- $10_{13} \;=\; 1010101010101 \;=\; 1111111(10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1).$

Exemplo 2.6. *(Costa; Costa, 2021) Veja também uma fatoração para os números* 10_{4q+3} *para* $1 \leq q \leq 3$*:*

- $10_7 \;=\; 1010101 \;=\; 101(10^4 + 1) \;=\; 10_3(10^4 + 1)$*;*
- $10_{11} \;=\; 10101010101 \;=\; 10101(10^6 + 1) == \; 10_5(10^6 + 1)$ *;*
- $10_{15} \;=\; 101010101010101 \;=\; 1010101(10^8 + 1) \;=\; 10_7(10^6 + 1)$ *.*

Os números suavemente ondulante $1, 101, 10101, ...$, isto é, 10_{2k+1}, para todo $k \geq 1$, formam a sequência A094028 listada em *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) (Barry, 2004). Sabe-se que exceto 101, nenhum outro número do tipo 10_n é primo. A demonstração pode ser consultada em Costa e Costa (2021) ou *Putnam Problems* (1989). Portanto, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.7. *(Putnam Problems, 1989) Para todo* $n > 3$ *nenhum número* 10_n *é primo.*

Observação 2.8. *De forma independente o Teorema 2.7 foi provado em (Costa; Costa, 2021). No entanto foi proposto, e provado, pela primeira vez em 1989, durante a competição de Putman. Esta é uma competição matemática que ocorre desde 1927 é administrada pela Mathematical Association of America.*

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas catulio dos. Os números suavemente ondulantes generalizados.
REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3008, 25 de outubro de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7045.

Um dos objetivos deste é demonstrar uma versão generalizada do Teorema 2.7. Isso será feito adiante no Teorema 4.11.

Uma importante característica dos números *suavemente ondulantes* ocorre quando $b = 0$ em ab_n, conforme resultado a seguir:

Proposição 2.9. *(Carvalho; Costa, 2022) Nenhum número suavemente ondulante $a0_n$ é primo para $1 < a \leq 9$.*

Demonstração. Basta notar que:

$$a0_n = a \cdot (10_n) \ .$$

Logo, $a0_n$ é um número composto, divisível por a e também por 10_n. □

Na sequência deste trabalho, exploramos propriedades aritméticas dos números *suavemente ondulantes generalizados* em bases numéricas d, diferente da decimal. Para isso, usamos constantemente operações em bases não decimais. Para leitores menos familiarizados com o assunto, recomendamos as referências: Domingues (1991), Fomin (1975), Hefez (2016) ou Niven, Zuckerman e Montgomery (1991). Recentemente, alguns artigos têm abordado operações aritméticas em bases não decimais, como em Bemm e Bemm (2023), Costa, Santos e Bezzera (2023), Santos e Costa (2022).

3 Números suavemente ondulantes generalizados

Fixada uma base numérica $d \geq 2$. Dado os algarismos $0 \neq a$ e b com $a \neq b$, conforme Carvalho e Costa (2022), podemos representar qualquer número suavemente ondulante $[ab_n]_d$ na base d, que chamamos de *números suavemente ondulantes generalizados* ou NSOG, utilizando as seguintes expressões:

$$[ab_n]_d = \ a\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} d^{2i} \ + \ b\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} d^{2i-1}, \text{ se } n \text{ é ímpar,} \tag{3}$$

$$[ab_n]_d = \ a\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} d^{2i-1} \ + \ b\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} d^{2i}, \text{ se } n \text{ é par.} \tag{4}$$

É importante destacar que um número ab_n na base d, não é necessariamente suavemente ondulante em outra base d' diferente de d, como veremos nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 3.1. *Considere* $a = 1$*,* $b = 0$*,* $n = 7$ *e* $d = 5$*. Temos da Equação* (3) *que*

$$\begin{aligned}[10_7]_5 &= 1\sum_{i=0}^{3} 5^{2i} + 0\sum_{i=1}^{3} 5^{2i-1} \\ &= 1(5^0 + 5^2 + 5^4 + 5^6) + 0(5^1 + 5^3 + 5^5) = 5^0 + 5^2 + 5^4 + 5^6 = 16276.\end{aligned}$$

Veja que $[10_7]_5 = [16276]_{10}$*, e* 16276 *é um número ondulante na base* 10*, mas não é suavemente ondulante.*

Exemplo 3.2. *Considere* $a = 3$*,* $b = 4$*,* $n = 6$ *e* $d = 5$*. Temos da Equação* (4) *que*

$$\begin{aligned}[34_6]_5 &= 3\sum_{i=1}^{3} 5^{2i-1} + 4\sum_{i=0}^{2} 5^{2i} \\ &= 3(5^1 + 5^3 + 5^5) + 4(5^0 + 5^2 + 5^4) = 3 \cdot 3255 + 4 \cdot 651 = 12369.\end{aligned}$$

Percebemos que $[34_6]_5 = [12369]_{10}$*, no entanto,* 12369 *não é um número suavemente ondulante, nem ondulante.*

Um resultado correlato à Proposição 2.9 em uma base $d \geq 2$ é:

Proposição 3.3. *Para qualquer base* $d \geq 2$ *fixada e para todo natural* $n \geq 3$*, o número* $[a0_n]_d$ *é composto, com* $a \in D$*.*

Demonstração. Basta notar que:

$$[a0_n]_d = [a]_d \cdot [10_n]_d.$$

Logo, $[a0_n]_d$ é um número composto, divisível por $[a]_d$ e também por $[10_n]_d$. □

Veremos agora uma relação entre números *suavemente ondulantes* e números *monodígitos*. Destaca-se que números *monodígitos* são formados por n algarismos iguais a c numa base d fixada, com $0 \leq c \leq d-1$. Tais números são representados por,

$$[c_n]_d = [\underbrace{cc...c}_{n}]_d = [c \cdot \underbrace{11...1}_{n}]_d = c \cdot \frac{d^k - 1}{d-1} = [c \cdot R_n]_d,$$

em que $[R_n]_d$ é um número formado do n-dígitos iguais a 1, isto é, a repetição da unidade ou um *monodígito* de algarismo 1 na base d, que chamamos de uma *repunidade generalizada*. Para maiores detalhes veja Costa, Santos e Bezzera (2023).

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas catulio dos. Os números suavemente ondulantes generalizados.
REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3008, 25 de outubro de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7045.

Exemplo 3.4. *Veremos que* $[12_6]_3 = [5_3]_9$*. De fato,*

$$\begin{aligned}
[12_6]_3 &= 1\cdot 3^{6-1} + 2\cdot 3^{6-2} + 1\cdot 3^{6-3} + 2\cdot 3^{6-4} + 1\cdot 3^1 + 2 \\
&= (1\cdot 3+2)3^{6-2} + (1\cdot 3+2)3^{6-4} + (1\cdot 3+2)3^0 \\
&= 5\cdot 3^{6-2} + 5\cdot 3^{6-4} + 5\cdot 3^0 \\
&= 5\cdot (3^2)^{3-1} + 5\cdot (3^2)^{3-2} + 5\cdot (3^2)^0 \\
&= 5\cdot (9)^2 + 5\cdot (9)^1 + 5\cdot (9)^0 \\
&= 5\cdot \frac{9^3-1}{9-1} = [5\cdot 111]_9 = [5_3]_9\ .
\end{aligned}$$

De uma forma geral temos que

Proposição 3.5. *(Carvalho; Costa, 2022) Para todo* $n = 2k$ *par, se* $[ab_n]_d$ *é um número suavemente ondulante na base* d*, então* $[ab_n]_d = [c_k]_{d^2}$ *será um monodígito na base* d^2*, para* $c = a\cdot d + b$*.*

Demonstração. Veja que $c = (a\cdot d + b) < d^2$. Sendo $n = 2\cdot k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Note que:

$$\begin{aligned}
[ab_n]_d &= a\cdot d^{2k-1} + b\cdot d^{2k-2} + a\cdot d^{2k-3} + b\cdot d^{2k-4} + \cdots + a\cdot d^1 + b \\
&= (ad+b)d^{2k-2} + (ad+b)d^{2k-4} + \cdots + (ad+b)d^0 \\
&= c\cdot d^{2k-2} + c\cdot d^{2k-4} + \cdots + c\cdot d^0 \\
&= c\cdot (d^2)^{k-1} + c\cdot (d^2)^{k-2} + \cdots + c\cdot (d^2)^0 \\
&= c\cdot (d^2)^{k-1} + c\cdot (d^2)^{k-2} + \cdots + c\cdot (d^2)^0 \\
&= c\cdot \frac{(d^2)^k - 1}{d^2-1} = [c\cdot R_k]_{d^2}\ .
\end{aligned}$$

Como $c = ad+b < d^2$, então $[ab_n]_d = [c\cdot R_k]_{d^2} = [ad+b]_{d^2}\cdot [R_k]_{d^2}$. Além disso, $[R_k]_{d^2}$ é um monodígito na base d^2. □

Exemplo 3.6. *Veja que* $[12_8]_4 = [6666]_{16}$*. Bem como* $[13_{12}]_6 = [999999]_{36}$*.*

Especificando $a = 1$ e $b = 0$ nas Equações (3) e (4), obtemos que

Proposição 3.7. *Para toda base* $d > 1$ *fixada e todo* $n > 2$*, então,* $[10_n]_d$ *possui a seguinte representação polinomial:*

(a) n *é ímpar,*

$$[10_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \cdots + d^2 + d^0,$$

(b) se n *é par,*

$$[10_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \cdots + d^3 + d^1\ .$$

Exemplo 3.8. *Note que:*

$$\begin{aligned}[10_9]_4 = [101010101]_4 &= 4^{9-1} + 4^{9-3} + 4^{9-5} + 4^{9-7} + 4^{9-9} \\ &= 4^8 + 4^6 + 4^4 + 4^2 + 4^0 \\ &= [11111]_{4^2} = [1_5]_{4^2}.\end{aligned}$$

Enquanto

$$\begin{aligned}[10_8]_5 = [10101010]_5 &= 5^{8-1} + 5^{8-3} + 5^{8-5} + 5^{8-7} \\ &= 5^7 + 5^5 + 5^3 + 5^1 \\ &= [1111]_{5^2} = [1_4]_{5^2}.\end{aligned}$$

4 NSOG composto

Nesta seção abordamos algumas relações entre os números suavemente ondulantes generalizados, explorando possíveis conexões e propriedades interessantes desses números. Alguns resultados desta seção também podem ser encontrados em Porto (2023).

Inicialmente, apresentamos um resultado auxiliar, cuja demonstração pode ser encontrada em Hefez (2016), Proposições 3.6, 3.7 e 3.8.

Lema 4.1. *Sejam quaisquer x, y inteiros e n natural.*

(a) Temos que $x - y$ divide $x^n - y^n$,

(b) Temos que $x + y$ divide $x^{2n} - y^{2n}$,

(c) Temos que $x + y$ divide $x^{2n+1} + y^{2n+1}$.

Como consequência da Proposição 3.7 temos a fórmula de Binet para um NSOG para qualquer base $d \geq 2$ fixada.

Teorema 4.2 (Fórmula de Binet)**.** *Para toda base $d \geq 2$ fixada, um número suavemente ondulante, $[10_n]_d$, pode ser obtido por:*

(a) $[10_{2k+1}]_d = \dfrac{d^{2(k+1)} - 1}{d^2 - 1}$, se $n = 2k + 1$ com $k \geq 1$,

(b) $[10_{2k}]_d = \dfrac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1}$, se $n = 2k$ com $k > 1$.

Demonstração. (a) Para $n = 2k+1$ temos da Proposição 3.7(a) que

$$[10_{2k+1}]_d = d^{2k} + d^{2(k-1)} + d^{2(k-3)} + \cdots + d^2 + d^0.$$

Utilizando a fórmula da soma de Progressão Geométrica (PG), obtemos:

$$\begin{aligned}
[10_{2k+1}]_d &= d^{2k+1-1} + d^{2k+1-3} + d^{2k+1-5} + \cdots + d^2 + d^0 \\
&= d^{2k} + d^{2k-2} + d^{2k-4} + \cdots + d^2 + d^0 \\
&= \frac{(d^2)^{k+1} - 1}{d^2 - 1} \\
&= \frac{d^{2(k+1)} - 1}{d^2 - 1}.
\end{aligned}$$

(b) Agora, para $n = 2k$ temos Proposição 3.7(b) que

$$[10_{2k}]_d = d^{2k-1} + d^{2k-3} + d^{2k-5} + \cdots + d^3 + d^1,$$

fazendo a soma da PG, obtemos:

$$\begin{aligned}
[10_{2k}]_d &= d^{2k-1} + d^{2k-3} + d^{2k-5} + \cdots + d^3 + d^1 \\
&= \frac{d((d^2)^k - 1)}{d^2 - 1} \\
&= \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1} \\
&= d\frac{d^{2k} - 1}{d^2 - 1}.
\end{aligned}$$

□

Observação 4.3. *Como $d^2 - 1$ divide $d^{2i} - 1$ para todo natural i, conforme Lema 5.5, em Santos e Costa (2022). Portanto, $\dfrac{d^{2i} - 1}{d^2 - 1}$ é sempre um inteiro.*

Agora, segue diretamente do Teorema 4.2.

Proposição 4.4. *Se $k \geq 2$ e $d \geq 2$, então:*

(a) $[10_{2k+1}]_d = [10 \cdot (10_{2k})]_d + [1]_d$;

(b) $[10_{2k}]_d = [10 \cdot 10_{2k-1}]_d$;

(c) $[10_{2k+3}]_d = [10^2 \cdot 10_{2k+1}]_d + [1]_d$.

Demonstração. (a) Temos que:

$$\begin{aligned}[10_{2k+1}]_d &= \frac{10^{2k+2}-1}{10^2-1}\\ &= \frac{10^{2k+2}-10^2+10^2-1}{10^2-1}\\ &= \frac{10^2(10^{2k}-1)+10^2-1}{10^2-1}\\ &= d\cdot\frac{10(10^{2k}-1)}{10^2-1}+1\\ &= [10\cdot(10_{2k})]_d+[1]_d\ .\end{aligned}$$

(b) é imediato.

(c) Basta usar (a) e (b). □

Em uma base fixa $d \geq 2$, um inteiro $[n]_d$ é dito decomponível se existem inteiros positivos distintos $[b]_d$ e $[c]_d$, diferentes de 1, de modo que $[n]_d = [b]_d \cdot [c]_d$. Nesse caso, também chamamos $[n]_d$ de composto ou fatorável na base d. Caso contrário, chamamos $[n]_d$ de indecomponível na base d.

Exemplo 4.5. *Sabemos que o número 17 é indecomponível (primo) na base 10. Agora, na base 8, temos que $[3]_8 \cdot [5]_8 = [17]_8$, ou seja, $[17]_8$ é composto na base 8. Veja que $[17]_8 = [15]_{10} \neq [17]_{10}$, e $15 = 3 \cdot 5$ é decomponível na base 10.*

Proposição 4.6. *Para quaisquer $d \geq 2$ e $k \geq 1$, $[10_{2k}]_d$ divide $[10_{2k\cdot q}]_d$, para todo $q > 1$.*

Demonstração. Primeiro, observe que pelo Lema 4.1(a), $d^{2k}-1$ divide $2^{2kq}-1$. Segundo, pelo Teorema 4.2, temos que $[10_{2k\cdot q}]_d = \dfrac{d((d^2)^{kq}-1)}{d^2-1}$ e $[10_{2k}]_d = \dfrac{d(d^{2k}-1)}{d^2-1}$. Temos que

$$\begin{aligned}\frac{[10_{2k\cdot q}]_d}{[10_{2k}]_d} &= \frac{d((d^2)^{kq}-1)}{d^2-1}\cdot\frac{d^2-1}{d(d^{2k}-1)}\\ &= \frac{d^{2kq}-1}{d^{2k}-1}\ .\end{aligned}$$

Como vimos no início da demonstração, $\dfrac{d^{2kq}-1}{d^{2k}-1}$ é um número inteiro. □

Exemplo 4.7. *Considerando $k = 2$, $q = 3$ e $d = 6$, obtemos que*

$$\frac{[10_{2\cdot2\cdot3}]_6}{[10_{2\cdot2}]_6} = \frac{[10_{12}]_6}{[10_4]_6} = \frac{(6^4)^3-1}{6^4-1} = (6^4)^2+6^4+1 = 6^8+6^4+1 = [100010001]_6\ .$$

Proposição 4.8. *Para quaisquer naturais m, n e $d \geq 2$, se $[m]_d$ é múltiplo de $[n]_d$, então $[10_{2m-1}]_d$ é múltiplo de $[10_{2n-1}]_d$.*

https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7045.

Demonstração. Como $[m]_d$ é um múltiplo de $[n]_d$, então $[m]_d = [n \cdot k]_d$ para algum natural $[k]_d$. Segue do Teorema 4.2 que

$$\begin{aligned}[10_{2m-1}]_d = \frac{d^{2m}-1}{d^2-1} &= \frac{d^{2nk}-1}{d^1-1}\\ &= \frac{d^{2nk}-1}{d^{2n}-1} \cdot \frac{d^{2n}-1}{d^{-}1}\\ &= \frac{d^{2nk}-1}{d^{2n}-1} \cdot [10_{2n-1}]_d \ .\end{aligned}$$

Do Lema 4.1(a), temos que $d^{2n}-1$ divide $d^{2nk}-1 = (d^{2n})^k - 1^k$. Portanto o NSOG $[10_{2n-1}]_d$ divide $[10_{2m-1}]_d$, ou seja, $[10_{2m-1}]_d = [t \cdot 10_{2n-1}]_d$, com $t = \frac{d^{2nk}-1}{d^{2n}-1}$. $\square$

Proposição 4.9. *Para quaisquer naturais m, n, q, r e $d \geq 2$, se $[m]_d = [qn+r]_d$, então $[10_{2m-1}]_d = [10_{2n-1} \cdot k]_d + [10_{2r-1}]_d$, para algum k natural.*

Demonstração. Temos que $[m]_d = [qn+r]_d$. Segue do Teorema 4.2 que

$$\begin{aligned}[10_{2m-1}]_d = \frac{d^{2m}-1}{d^2-1} &= \frac{d^{2(qn+r)}-1}{d^2-1}\\ &= \frac{d^{2qn}d^{2r}-1}{d^2-1} = \frac{d^{2qn}d^{2r}-d^{2r}+d^{2r}-1}{d^2-1}\\ &= \frac{d^{2r}(d^{2qn}-1)}{d^2-1} + \frac{d^{2r}-1}{d^2-1} \ .\end{aligned}$$

Da Proposição 4.8, para um inteiro t, temos que $\frac{d^{2r}(d^{2qn}-1)}{d^2-1} = d^{2r} \cdot t \cdot 10_{2n-1} = k \cdot 10_{2n-1}$, fazendo $k = d^{2r} \cdot t$. Portanto $[10_{2m-1}]_d = [10_{2n-1} \cdot k + 10_{2r-1}]_d$. $\square$

Proposição 4.10. *Para quaisquer $d \geq 2$ e $k \geq 1$, $[10_{2k+1}]_d$ divide $[10_{4k+4}]_d$.*

Demonstração. Para $n = 4k+4 = 2(2k+2)$, segue da Proposição 3.3 que:

$$\begin{aligned}[10_{2(2k+2)}]_d &= d^{2(2k+2)-1} + d^{2(2k+2)-3} + d^{2(2k+2)-5} + d^{2(2k+2)-7} \cdots + d^3 + d^1\\ &= \frac{d((d^2)^{2k+2}-1)}{d^2-1}\\ &= \frac{d(d^{4k+4}-1)}{d^2-1} \ .\end{aligned}$$

Multiplicando a fração $\frac{d(d^{4k+4}-1)}{d^2-1}$ por $\dfrac{d^2+1}{d^2+1}$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
[10_{2(2k+2)}]_d &= \frac{d(d^{4k+4}-1)}{d^2-1}\cdot\frac{d^2+1}{d^2+1}\\
&= \frac{d(d^2+1)(d^{4k+4}-1)}{d^4-1}\\
&= \frac{d(d^2+1)}{d^2+1}\cdot\frac{(d^{2k+2}-1)(d^{2k+2}+1)}{d^2-1}\\
&= d\cdot\frac{(d^{2k+2}-1)}{d^2-1}\cdot(d^{2k+2}+1)\\
&= d\cdot[10_{2k+1}]_d\cdot(d^{2k+2}+1)\ .
\end{aligned}$$

Observe ainda que $[10_{2(2k+2)}]_d = [10_{4k+4}]_d$ é múltiplo, na base d, do número suavemente ondulante $[10_{2k+1}]_d$, bem como de $(d^{2k+2}+1)$. □

Veremos a seguir que que para todo $n > 3$, o número suavemente ondulante $[10_n]_d$ é escrito como (ao menos) um produto de dois fatores.

Teorema 4.11. *Para todo natural $n > 3$, o número $[10_n]_d$ é composto, para qualquer base $d \geq 2$ fixada.*

Demonstração. Vamos considerar duas situações distintas: n é par e n é impar.

Caso tenhamos $n > 2$ par, existe um natural $k > 1$ tal que $n = 2k$. Segue do Teorema 4.2 que $[10_{2k}]_d = d\cdot\dfrac{(d^2)^k-1}{d^2-1}$. Segue do Lema 4.1(a) que d^2-1 divide $(d^2)^k-1$. Mais ainda, pela divisão euclidiana, obtemos que

$$\begin{aligned}
[10_{2k}]_d &= d\cdot(d^{2(k-1)}+d^{2(k-2)}+d^{2(k-3)}+\cdots+d^2+1)\\
&= [10]_d\cdot[10_{2k-1}]_d\ .
\end{aligned}$$

Portanto, o $[10_{2k}]_d$ possui ao menos como fatores os números $[10]_d$ e $[10_{2k-1}]_d$, que são distintos, pois $k > 1$.

Para $n = 2k+1$, com $k > 1$, temos do Teorema 4.2 que

$$\begin{aligned}
[10_{2k+1}]_d &= \frac{d^{2(k+1)}-1}{d^2-1}\\
&= \frac{(d^{k+1}-1)(d^{k+1}+1)}{d^2-1}\ .
\end{aligned}$$

Novamente, consideremos duas situações distintas:

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas catulio dos. Os números suavemente ondulantes generalizados. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3008, 25 de outubro de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7045.

- se k é ímpar então $k+1$ é par, e portanto, $k+1=2t$, para algum natural $t>1$. Usando o primeiro caso, obtemos

$$\begin{aligned}[10_{2k+1}]_d &= \frac{(d^{k+1}-1)(d^{k+1}+1)}{d^2-1} \\ &= \frac{(d^{2t}-1)}{d^2-1}(d^{2t}+1) \\ &= (d^{2(t-1)}+d^{2(t-2)}+d^{2(t-3)}+\cdots+d^2+1)(d^{2t}+1) \\ &= [10]_d\cdot[10_{2t-1}]_d\cdot[10^{2t}+1]_d\ .\end{aligned}$$

Assim $[10_{2k+1}]_d$ possui (ao menos) como fatores os números $[10]_d$, $[10_{2t-1}]_d$ e $[10^{2t}+1]_d$.

- se k é par então $k+1$ é ímpar, e temos

$$\begin{aligned}[10_{2k+1}]_d &= \frac{d^{2(k+1)}-1}{d^2-1} \\ &= \frac{(d^{k+1}-1)(d^{k+1}+1)}{(d-1)(d+1)} \\ &= \frac{d^{k+1}-1}{d-1}\cdot\frac{d^{k+1}+1}{d+1}\ .\end{aligned}$$

Segue do Lema 4.1(a) que $d-1$ divide $d^{k+1}-1$, e do Lema 4.1(c) que $d+1$ divide $d^{k+1}+1$, isto mostra que as duas "frações"anteriores são números inteiros. Fazendo a divisão euclidiana, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}-1}{d-1} &= d^k+d^{k-1}+d^{k-2}+\cdots+d+1 \\ &= [R_k]_d\ ,\ \text{ e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}+1}{d+1} &= d^k-d^{k-1}+d^{k-2}+\cdots+d^2-d+1 \\ &= (d-1)d^{k-1}+(d-1)d^{k-3}+\cdots+(d-1)d+1 \\ &= (d-1)\cdot(d^{k-1}+d^{k-3}+\cdots+d)\cdot d+1 \\ &= (d-1)\cdot 10_k\cdot d+1\ .\end{aligned}$$

Portanto, os fatores de $[10_{2k+1}]_d$ são (pelo menos) $[R_k]_d$ e $[(d-1)\cdot 10_k\cdot 10+1]_d$.

Portanto, para todo $n>3$ o número $[10_{2k}]_d$ é decomponível. □

Dadas duas bases $d_1>1$ e $d_2>1$ distintas. Considere os inteiros $[x_1]_{d_1}$ e $[x_2]_{d_2}$ tal que $[x_1]_{d_1}=[x_2]_{d_2}$. Caso $[x_1]_{d_1}$ seja decomponível, ou seja, existem inteiros $[y_1]_{d_1}\neq\pm1$ e $[z_1]_{d_1}\neq\pm1$ tais que $[x_1]_{d_1}=[y_1]_{d_1}\cdot[z_1]_{d_1}$. é claro que podemos encontrar $[y_2]_{d_2}\neq\pm1$ e $[z_2]_{d_2}\neq\pm1$, fazendo a conversão dos respectivos números da base d_1 para a base b_2, tais que $[y_1]_{d_1} = [y_2]_{d_2}$ e $[z_1]_{d_1} = [z_2]_{d_2}$. Assim,

$$\begin{aligned} [x_2]_{d_2} &= [x_1]_{d_1} \\ &= [y_1]_{d_1} \cdot [z_1]_{d_1} \\ &= [y_2]_{d_2} \cdot [z_2]_{d_2} \ . \end{aligned}$$

O que fizemos garante que,

Lema 4.12. *Se um número inteiro $[x_1]_{d_1}$ é decomponível em uma base $d_1 > 1$ então $[x_2]_{d_2}$ é decomponível em qualquer base $d_2 > 1$, com $[x_1]_{d_1} = [x_2]_{d_2}$.*

Observação 4.13. *Se $[x]_{10}$ é primo, então ele é indecomponível (primo) em qualquer outra base $d \neq 10$. Caso contrário, se existir uma base $d \neq 10$ tal que $x = [x_1]_d = [y]_d \cdot [z]_d$, então pelo Lema 4.12, x seria composto na base 10, um absurdo.*

Segue diretamente do Teorema 4.11, e do Lema 4.12, que se um número natural x é suavemente ondulante do tipo $[10_n]_d$ em uma base $d \geq 2$ e $n > 3$ então x não é primo. De uma maneira formal temos:

Teorema 4.14. *Para todo natural $n > 3$, o número $[10_n]_d$ é composto na base 10, para qualquer base $d \geq 2$ fixada.*

5 Máximo divisor comum

Nesta seção apresentamos um algoritmo para calcular o máximo divisor comum entre dois números suavemente ondulantes generalizados em qualquer base d maior ou igual a 2.

Usamos a notação (a, b) para denotar o máximo divisor comum (*mdc*) entre os números a e b, e assim dizemos que a é relativamente primo a b, ou que a e b são coprimos, quando $(a, b) = 1$. A seguir, enunciamos o clássico resultado conhecido como *algoritmo do máximo divisor comum* entre dois números inteiros. A demonstração pode ser consultada em Domingues (1991) ou Hefez (2016).

Lema 5.1. *[Lema de Euclides] Dados os inteiros a, b, com $b = aq + r$ para q e $0 \leq r < |b|$ inteiros. O máximo divisor comum entre a e b é dado por $(a, b) = (a, r)$.*

Como $[10_4 = 1010]_d$ e, pela a Proposição 4.4, $[10_5 = 10101 = 5 \times 10_4 + 1]_5$, para qualquer base d fixada, usando o Lema Euclides segue que $(10_5, 10_4) = (10_4, 1) = 1$. De um modo geral temos que

Proposição 5.2. *Dados dois NSOG, e $k > 2$, tem-se que:*

(a) $(10_{2k+1}, 10_{2k}) = 1$*;*

(b) $(10_{2k}, 10_{2k-1}) = 10_{2k-1}$*;*

(c) $(10_{2k+3}, 10_{2k+1}) = 1$.

Demonstração. Para uma base $d \geq 2$ fixada.

(a) Segue da Proposição 4.4 que $[10_{2k+1} = d \times 10_{2k} + 1]_d$, e pelo Lema Euclides

$$(10_{2k+1}, 10_{2k}) = (d \times 10_{2k} + 1, 10_{2k}) = (10_{2k}, 1) = 1.$$

(b) Como $[10_{2k} = d \times 10_{2k-1}]_d$ (Proposição 4.4), usando o Lema Euclides, temos que

$$(10_{2k}, 10_{2k-1}) = (d \times 10_{2k-1}, 10_{2k-1}) = 10_{2k-1}.$$

(c) Pela Proposição 4.4 temos que $[10_{2k+3} = d \times 10_{2k+2} + 1 = d \times (d \times 10_{2k+1}) + 1 = d^2 \times 10_{2k+1} + 1]_d$, e do Lema Euclides segue que

$$(10_{2k+3}, 10_{2k+1}) = (d^2 \times 10_{2k+1} + 1, 10_{2k+1}) = (10_{2k+1}, 1) = 1\ .$$

□

Exemplo 5.3. *Para ilustrar o item (c) deste último resultado, fixamos $d = 4$, e determinemos o mdc entre $[10_{2021}]_4$ e $[10_{2023}]_4$. Como $[2021]_4 = [2 \cdot 1010 + 1]_4$ e $[2023]_4 = [2 \cdot 1010 + 3]_4$ segue que $([10_{2023}]_4\ ,\ [10_{2021}]_4) = ([10_{2021}]_4\ ,\ 1) = [1]_4$.*

Agora vamos enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção, um modo para determinar o *máximo divisor comum (mdc)* entre dois NSOG, de índice ímpar, em qualquer base d fixada.

Teorema 5.4. *Para quaisquer naturais $m > n$, tem-se que $[(10_{2m-1}, 10_{2n-1}) = 10_{2(m,n)-1}]_d$, para uma base $d \geq 2$ fixada.*

Demonstração. Dados $m \geq n > 0$ ímpares, de modo que existem inteiros q_1, r_1 da divisão euclidiana de m por n, ou seja, $m = nq_1 + r_1$ com $0 \leq r_1 < n$. Se $r_1 > 0$, como $n \geq r_1 > 0$, existem inteiros q_2, r_2 da divisão euclidiana de n por r_1, ou seja, $n = r_1 q_2 + r_2$ com $0 \leq r_2 < r_1$. Analogamente, sejam $r_3, \ \ldots, r_s$ os restos, não nulos, no algoritmo da divisão euclidiana de r_k por r_{k+1}, para $k \geq 1$. Do Lema 5.1, temos $r_s = (m, n)$ e $r_{s+1} = 0$. Por outro lado, Pela Proposição 4.9 temos que $[10_{2m-1}]_d = [10_{2n-1} \cdot k]_d + [10_{2r-1}]_d$, para algum k natural. Agora, segue do Lema 5.1 e da Proposição 4.8, que

$$\begin{aligned}(10_{2m-1}, 10_{2n-1}) = &\quad (10_{2n-1}, 10_{2r_1-1}) = (10_{2r_1-1}, 10_{2r_2-1}) = \cdots = (10_{2r_s-1}, 10_{2r_{s+1}-1}) \\ = &\quad (10_{2r_s-1}, 0) = 10_{2(m,n)-1}\ .\end{aligned}$$

Aqui, usamos que $10_{-k} = 0$ para qualquer k natural. □

Exemplo 5.5. *Para qualquer base $d \geq 2$, considere $m = 15 = 2 \cdot 8 - 1$ e $n = 25 = 2 \cdot 13 - 1$, então $([10_{15}]_d, [10_{25}]_d) = 1$. Tendo em vista que $(8, 13) = 1$.*

6 Quadrados perfeitos

Nesta seção abordamos diferenças entre os números suavemente ondulantes generalizados cujo resultado seja números quadrados perfeitos.

Em uma base $d \geq 2$ fixada, um número natural m é um *quadrado perfeito* se existe um número n tal que $[m]_d = ([n]_d)^2$.

O próximo resultado mostra que a diferença entre dois números suavemente ondulantes de índice ímpar é um quadrado perfeito em qualquer base $d \geq 2$.

Proposição 6.1. *Para todo $k \geq 2$ e $d \geq 2$ temos que $[10_{2k+1}]_d - [10_{2k-1}]_d = d^{2k}$.*

Demonstração. Aplicando a Proposição 3.7(a) para $n = 2k - 1$, obtemos,

$$\begin{aligned}[10_{2k-1}]_d &= d^{2k-1-1} + d^{2k-1-3} + d^{2k-1-5} + \cdots + d^2 + d^0 \\ &= d^{2k-2} + d^{2k-4} + d^{2k-6} + \cdots + d^2 + d^0.\end{aligned}$$

Respectivamente, para $n = 2k + 1$, obtemos,

$$\begin{aligned}[10_{2k+1}]_d &= d^{2k+1-1} + d^{2k+1-3} + d^{2k+1-5} + \cdots + d^2 + d^0 \\ &= d^{2k} + \underbrace{d^{2k-2} + d^{2k-4} + d^{2k-6} + \cdots + d^0}_{[10_{2k-1}]_d}\ .\end{aligned}$$

Logo, $[10_{2k+1}]_d - [10_{2k-1}]_d = d^{2k}$. □

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas catulio dos. Os números suavemente ondulantes generalizados.
REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3008, 25 de outubro de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id7045.

Exemplo 6.2. *Considerando $k = 2$, vejamos para a base $d = 9$.*

$$\begin{aligned}[10_{2\cdot 2+1}]_9 - [10_{2\cdot 2-1}]_9 &= [10_5]_9 - [10_3]_9 = [10000]_9 \\ &= ([10]_9)^4 = ([10]_9)^{2\cdot 2} .\end{aligned}$$

Para $k = 3$ e $d = 3$, temos:

$$\begin{aligned}[10_{2\cdot 3+1}]_3 - [10_{2\cdot 3-1}]_3 &= [10_7]_3 - [10_5]_3 = [1000000]_3 \\ &= ([10]_3)^6 = ([10]_3)^{2\cdot 3} .\end{aligned}$$

Corolário 6.3. *Para todo $k \geq 2$ e $d \geq 2$ temos que:*

$\sqrt{[10_{2k+1}]_d - [10_{2k-1}]_d} = d^k$ *e*

$\sqrt[k]{[10_{2k+1}]_d - [10_{2k-1}]_d} = d^2$.

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 6.1 .

$$\sqrt{[10_{2k+1}]_d - [10_{2k-1}]_d} = \sqrt{(d^k)^2} = d^k.$$

Por outro lado :

$$\sqrt[k]{[10_{2k+1}]_d - [10_{2k-1}]_d} = \sqrt[k]{(d^2)^k} = d^2.$$

□

7 Outros resultados interessantes

Para finalizarmos este estudo, exibimos nesta seção alguns resultados interessantes que exploram a conexão entre os NSOG com outras sequências numéricas em bases diversas. Começamos mostrando a conexão entre os NSOG e os números repunidades generalizados, os números da forma $[R_n]_d = [\underbrace{111\cdots 11}_{n\ algarismos}]_d$, para uma base d fixada.

O próximo resultado apresenta a fórmula de Binet para os números repunidades generalizados, a demonstração pode ser consultada em Costa, Santos e Bezzera (2023).

Lema 7.1. *Para qualquer $k \geq 0$, a repunidade generalizada $[R_{k+1}]_d$ é dada por $[R_{k+1}]_d = \dfrac{d^{k+1} - 1}{d - 1}$ para todo $d \geq 2$ fixado.*

Agora usaremos este resultado na prova dos próximos resultados.

Proposição 7.2. *Para todo* $k \geq 1$ *e* $d \geq 2$ $[R_{2k+1}]_d = [10_{2k+1}]_d + [10_{2k}]_d$.

Demonstração. Como $[R_{n+1}]_d = \dfrac{d^{n+1}-1}{d-1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, então, para $n = 2k$ temos $[R_{2k+1}]_d = \dfrac{d^{2k+1}-1}{d-1}$.

$$
\begin{aligned}
[R_{2k+1}]_d &= \frac{d^{2k+1}-1}{d-1} \\
&= \frac{(d^{2k+1}-1)(d+1)}{(d-1)(d+1)} \\
&= \frac{d^{2k+2}+d^{2k+1}-d-1}{d^2-1} \\
&= \frac{d^{2k+2}-1}{d^2-1} + \frac{d(d^{2k}-1)}{d^2-1} \\
&= [10_{2k+1}]_d + [10_{2k}]_d \ .
\end{aligned}
$$

□

Proposição 7.3. *Se* $k \geq 1$ *e* $d \geq 2$*, então,* $[10_{2k+1}]_d = \dfrac{[R_{2k+2}]_d}{[R_2]_d}$.

Demonstração. Para todo $d \geq 2$ e $k \geq 1$, $[R_2]_d = d+1$ e $[R_{2k+2}]_d = \dfrac{d^{2k+2}-1}{d-1}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
[10_{2k+1}]_d &= \frac{d^{2k+2}-1}{d^2-1} \\
&= \frac{(d^{2k+2}-1)}{(d-1)} \cdot \frac{1}{(d+1)} \\
&= \frac{[R_{2k+2}]_d}{[R_2]_d} \ .
\end{aligned}
$$

□

Proposição 7.4. *Se* $k \geq 1$ *e* $d \geq 2$*, então,* $[10_{2k+2}]_d = \dfrac{d \cdot [R_{2k+2}]_d}{[R_2]_d}$.

Demonstração. De igual modo, temos

$$
\begin{aligned}
[10_{2k+2}]_d &= \frac{d \cdot (d^{2k+2}-1)}{d^2-1} \\
&= \frac{d \cdot (d^{2k+2}-1)}{(d-1)} \cdot \frac{1}{(d+1)} \\
&= \frac{d \cdot [R_{2k+2}]_d}{[R_2]_d} \ .
\end{aligned}
$$

□

O resultado a seguir mostra que todo NSOG, de índice ímpar, numa base d é uma repunidade generalizada em uma base d^2.

Proposição 7.5. *Considerando* $d \geq 2$ *e* $k \geq 1$, $[10_{2k+1}]_d = [R_{k+1}]_{d^2}$.

Demonstração. Conforme o Lema 7.1, $[R_{k+1}]_d = \dfrac{d^{k+1}-1}{d-1}$ para todo $d \geq 2$ e $k \geq 1$. Desse modo, tomando uma base d^2, $[R_{k+1}]_{d^2} = \dfrac{(d^2)^{k+1}-1}{d^2-1}$. Com isso,

$$\begin{aligned} [R_{k+1}]_{d^2} &= \frac{(d^2)^{k+1}-1}{d^2-1} \\ &= \frac{d^{2k+2}-1}{d^2-1} \\ &= \frac{(d^{k+1})^2-1}{d^2-1} \\ &= [10_{2k+1}]_d \, . \end{aligned}$$

□

Lembramos que um número natural T é triangular na base decimal se for da forma $T_a = \frac{a\cdot(a+1)}{2}$, em que a é um natural.

Proposição 7.6. *Se* $k \geq 1$ *e* $d = 3$, *então,* $[10_{2k+1}]_3$ *é um número triangular na base* 10.

Demonstração. Considerando $[10_{2k+1}]_d = \dfrac{d^{2k+2}-1}{d^2-1}$ temos que:

$$\begin{aligned} [10_{2k+1}]_3 &= \frac{3^{2k+2}-1}{3^2-1} = \frac{(3^{k+1})^2-1}{8} = \frac{(3^{k+1}-1)(3^{k+1}+1)}{2\cdot 2\cdot 2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{k+1}-1}{2}\cdot\frac{3^{k+1}+1}{2} = \frac{\frac{3^{k+1}-1}{2}\cdot\frac{3^{k+1}+1}{2}}{2} \, . \end{aligned}$$

Sejam $a = \dfrac{3^{k+1}-1}{2}$ e $a+1 = \dfrac{3^{k+1}+1}{2}$. Observe as três etapas seguintes:

- Vamos mostrar que a e $a+1$ são inteiros.

$$a = \frac{3^{k+1}-1}{2} = \frac{2k}{2}$$

tal que a é um inteiro, pois o numerador é par. E mais, $a+1$ também é inteiro.

- Além disso, a e $a+1$ são inteiros consecutivos.

- Por fim, demonstraremos que $[10_{2k+1}]_3$ é um número triangular na base 10. Vejamos:

$$[10_{2k+1}]_3 = \frac{\dfrac{3^{k+1}-1}{2}\cdot\dfrac{3^{k+1}+1}{2}}{2} = \frac{a(a+1)}{2}, \text{ com } a \in \mathbb{N}^*.$$

Logo, $[10_{2k+1}]_3$ é um número triangular na base 10.

$\square$

Exemplo 7.7. *Considerando $k = 3$, veja que $[10_{2\cdot 3+1}]_3 = [10_7]_3$ é um número triangular na base 10, pois*

$$[10_{2\cdot 3+1}]_3 = \frac{\dfrac{3^{3+1}-1}{2}\cdot\dfrac{3^{3+1}+1}{2}}{2} = \frac{40\cdot 41}{2} = \frac{40(40+1)}{2} = 820_{10} = T_{40}.$$

Observação 7.8. *Vale ressaltar que em Hoggat e Bicknell (1974), os autores abordam propriedades análogas, mostrando a conexão entre os números triangulares em uma base $d \geq 2$ e outra sequências numéricas, como por exemplo os números suavemente ondulantes, apresentando alguns casos particulares como curiosidade, entretanto não exibem uma demonstração formal ou qualquer justificativa para este fato.*

8 Considerações finais

Aqui foi apresentado alguns resultados acerca dos NSOG. O conjunto desses números é denotado por $[ab_n]_d$, para todo a e b em $\{0, 1, 2, \ldots, d-1\}$ com $a \neq 0$. Além disso, abordamos algumas propriedades relacionadas à divisibilidade entre dois elementos de $[ab_n]_d$. Em especial, destacamos o Teorema 4.11 que fornece um algoritmo para o cálculo do mdc entre dois números $[ab_n]_d$, com n ímpar. Além disso, apresentamos a Fórmula de Binet para um NSOG, visto no Teorema 4.2. Em particular, destacamos a relação entre os elementos dos NSOGs, números repunidades e triangulares. Esperamos que os resultados apresentados possam inspirar e motivar estudos adicionais sobre essa classe de números.

O estudo sobre classes de números, como os NSOGs, são importantes não apenas do ponto de vista teórico, mas também podem ter aplicações práticas em áreas como teoria dos números, criptografia e computação. A compreensão desses padrões e propriedades pode levar a descobertas e novas aplicações em diversas áreas da matemática e ciência da computação.

Referências

BARRY, Paul. Expansion of 1/((1-x)*(1-100*x)). **The on-line encyclopedia of integer sequences**, 22 abr. 2004. Disponível em: http://oeis.org/A094028. Acesso em: 9 jan. 2024.

BEMM, Laerte; BEMM, Priscila Costa Ferreira Jesus. Potências de p em bases da forma 2p. REMAT: **Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e3003, 2023. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6625.

CARVALHO, Fernando S.; COSTA, Eudes A. Um passeio pelos números ondulantes. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 2, p. e3001, 2022. DOI: http://doi.org/10.35819/remat2022v8i2id6043.

COSTA, Eudes A.; COSTA, Grieg A. Existem números primos na forma $101\dots101$. **Revista do Professor de Matemática**, n. 103, p. 21-22, 2021.

COSTA, Eudes A.; SANTOS, Douglas C.; BEZERRA, César S. Algumas propriedades aritméticas das repunidades generalizadas. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, p. 37-47, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6827. Acesso em 8 out. 2024.

COSTA, Eudes A.; SOUZA, Arthur B. Números ondulantes na forma $101\dots101$. **Gazeta de Matemática**, n. 202, p. 12-19, 2024. Disponível em: https://gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=1682. Acesso em 8 out. 2024.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. 1. ed. São Paulo: LTDA, 1991.

FOMÍN, Serguei V. **Sistemas de Numeración**: Lecciones populares de matemáticas. Tradução: VEGA, Carlos. 1. ed. Moscú: Editorial MIR, 1975.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, RJ, 2016.

HOGGATT, Verner E.; BICKNELL, Marjorie. Triangular Numbers. In: **The Fibonacci Quarterly**, v. 12, n. 3, p. 221-230, 1974. Disponível em: https://www.fq.math.ca/Scanned/12-3/hoggatt.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Hebert S.; MONTGOMERY, Hugh L. **An Introduction to the Theory of Numbers**. 5. ed. New York: Wiley, 1991.

PICKOVER, Clifford A. Is There a Double Smoothly Undulating Integer? **Journal of Recreational Mathematics**, v. 22, n. 1, p. 52-53, 1990.

PICKOVER, Clifford A. **Keys to Infinity**. New York, 1995. Chapter 20.

PICKOVER, Clifford A. **Wonders of Numbers**: Adventures in Mathematics, Mind, and Meaning. Oxford University Press, 2003. Chapters 52 and 88.

PORTO, Elias C. **Números Suavemente Ondulantes Generalizados**. Orientador: Eudes Antonio Costa. 2023. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2023.

PUTNAM Problems. **50th Putnam 1989**. Disponível em: https://prase.cz/kalva/putnam.html. Acesso em: 9 jan. 2024.

ROBINSON, D. F. There are no double smoothly undulating integers in both decimal and binary representation. **Journal of Recreational Mathematics**, v. 26, n. 2, p. 102-103, 1994.

SANTOS, Douglas C.; COSTA, Eudes A. Peculiarities of smoothly undulating number. **INTERMATHS**, v. 4, n. 2, p. 38-53, 2023.

SANTOS, Ronaldo A.; COSTA, Eudes A. Números de ball generalizados. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 7, n. 1, p. 61-85, 2022. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v7i1.16202.

SHIRRIFF, Ken. Comments on Double Smoothly Undulating Integers. **Journal of Recreational Mathematics**, v. 26, n. 2, p. 103-104, 1994.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente suportado pela PROPESQ-UFT.