



Método assintótico aplicado ao modelo de tráfego de Greenberg¹

Asymptotic method applied to the Greenberg traffic model


Método Asintótico aplicado al modelo de tráfico de Greenberg

Mariana Silva²

Universidade Federal Fluminense (UFF), Volta Redonda, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0009-0007-4814-1370>,  <http://lattes.cnpq.br/1209250143879032>
Panters Rodríguez-Bermudez³

Universidade Federal Fluminense (UFF), Volta Redonda, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-0901-106X>,  <http://lattes.cnpq.br/8725620123788586>

Resumo: Neste trabalho foi aplicado o método assintótico no modelo de tráfego de Greenberg, que é representado por uma lei de conservação, para obter soluções do tipo choque. O texto inicia apresentando a função polinomial, que é uma aproximação da função de fluxo do modelo de Greenberg, e a partir dela se constrói a cadeia de Hugoniot-Maslov, que é o método assintótico. A base matemática para essa construção é a subálgebra de Colombeau, cuja cadeia é um sistema de equações diferenciais ordinárias. Esse sistema foi resolvido numericamente pelo método de Runge-Kutta, com isso se obteve a solução numérica pelo método assintótico. Por fim, foi feita uma comparação gráfica com dois métodos de diferenças finitas, Lax-Wendroff e Lax-Friedrichs, para mostrar a eficácia do método assintótico.

Palavras-chave: método assintótico; modelo de Greenberg; cadeia de Hugoniot-Maslov; álgebra de Colombeau; Runge-Kutta.

Abstract: In this work, the asymptotic method was applied to the Greenberg traffic model, which is represented by a conservation law, to obtain shock-type solutions. The text begins by presenting the polynomial function, which is an approximation of the flow function of the Greenberg model, from which the Hugoniot-Maslov chain is constructed, which is the asymptotic method. The mathematical basis for constructing it is the Colombeau subalgebra. Such a chain is a system of ordinary differential equations. This system was solved numerically using the Runge-Kutta method, thus obtaining the numerical solution using the asymptotic method. Finally, a

¹ Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

² **Currículo sucinto:** Bacharel em Matemática e mestra em Modelagem Computacional pela Universidade Federal Fluminense, doutoranda do Programa de Modelagem Computacional do Laboratório Nacional de Computação Científica. **Contribuição de autoria:** Conceitualização, Curadoria de dados, Metodologia, Programas, Validação, Visualização, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato:** silvamariana@id.uff.br.

³ **Currículo sucinto:** Graduado em Matemática e mestre em Matemática pela Universidad de La Habana, doutor em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Atua como professor no Programa de Pós-graduação Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense. **Contribuição de autoria:** Conceitualização, Curadoria de dados, Análise Formal, Investigação, Metodologia, Administração de Projetos, Supervisão, Validação, Visualização, Escrita – Revisão e Edição. **Contato:** pantersrb@id.uff.br.



graphical comparison was made with two finite difference methods, Lax-Wendroff e Lax-Friedrichs, to show the effectiveness of the asymptotic method.

Keywords: asymptotic method; Greenberg model; Hugoniot-Maslov chain; Colombeau algebra; Runge-Kutta.

Resumen: En este trabajo se aplicó el método asintótico al modelo de tráfico de Greenberg, el cual está representado por una ley de conservación, para obtener soluciones del tipo shock. El texto inicia presentando la función polinomial, que es una aproximación a la función de flujo del modelo de Greenberg, y a partir de ella se construye la cadena de Hugoniot-Maslov, que es el método asintótico. La base matemática para construirlo es la subálgebra de Colombeau, cuya cadena es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este sistema fue resuelto numéricamente mediante el método de Runge-Kutta, obteniendo así la solución numérica mediante el método asintótico. Finalmente, se realizó una comparación gráfica con dos métodos de diferencias finitas, Lax-Wendroff y Lax-Friedrichs, para mostrar la eficacia del método asintótico.

Palabras clave: método asintótico; modelo de Greenberg; cadena Hugoniot-Maslov; álgebra de Colombeau; Runge-Kutta.

Data de submissão: 9 de janeiro de 2024.

Data de aprovação: 11 de abril de 2024.

1 Introdução

As equações de leis de conservação possuem alguns tipos de soluções, um deles são as soluções do tipo choque, que é a que foi focada neste artigo. Soluções do tipo choque são descontinuidades, e um dos primeiros obstáculos foi obter a mesma com significado físico. Assim, surgiram as condições de entropia para resolver o problema, isso para condições iniciais do tipo Riemann. Por outro lado, numericamente há o problema de achar um método que represente o choque de forma semelhante à analítica, já que os métodos numéricos utilizados sofrem algum tipo de desvio (podendo ser uma difusão, oscilação *etc.*) perto da descontinuidade. Isso motivou a criação de um outro método, que é o método assintótico. Neste artigo, a base matemática para construí-lo foi a subálgebra de Colombeau.

Neste trabalho foi aplicado o método assintótico no modelo de tráfego de Greenberg. Tal modelo foi criado em 1959 a partir de experimentos feitos nos túneis e pontes de Nova York, modelando assim uma faixa única sem entradas e nem saídas laterais. Ele é do tipo macroscópico, ou seja, nesse modelo não é considerado o movimento de um só veículo, e sim, utiliza-se de variáveis, como a densidade, velocidade e fluxo, para modelar o comportamento do tráfego. Modelos desse



tipo descrevem o tráfego como um fluxo contínuo, assim consegue-se deduzir uma equação, que é a lei de conservação (Silva, 2023).

A ideia do método assintótico, que foi criado por Maslov (1972; 1980), é escrever a solução da equação de lei de conservação como um somatório de funções generalizadas da subálgebra de Colombeau, e tais funções vêm da resolução do sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas, que é conhecido como cadeia de Hugoniot-Maslov. E para resolver esse sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas utiliza-se o método numérico de Runge-Kutta para sistemas. Conseqüentemente, resolvendo o sistema, resolve-se a lei de conservação.

Neste artigo, foram feitas simulações obtendo o resultado numérico utilizando o método assintótico e foram feitas também comparações com dois métodos numéricos de diferenças finitas, Lax-Wendroff e Lax-Friedrichs, para mostrar a eficácia do método assintótico, pois esses métodos de diferenças finitas apresentam grande difusão ou oscilação perto da descontinuidade.

2 Método Assintótico

A lei de conservação é dada por

$$\rho_t + \left[v_{max} \ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho} \right) \rho \right]_x = 0, \quad (1)$$

onde ρ é a densidade, ρ_{max} é a densidade máxima, $0 < \rho \leq \rho_{max}$, v_{max} é a velocidade máxima obtida por meio dos experimentos e a função velocidade dependendo de ρ é $v(\rho) = v_{max} \ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho} \right)$.

Esse modelo tem um melhor comportamento para situações do tipo congestionamento (altas densidades), pois para baixas densidades, $\rho \rightarrow 0$; com isso, $v(\rho)$ se aproxima de infinito, o que não é permitido fisicamente. Fazendo $u = \rho/\rho_{max}$, obtém-se que $0 < u \leq 1$ e $v(u) = -v_{max} \ln(u)$.

Portanto, a equação de lei de conservação para o modelo de Greenberg é

$$u_t - v_{max}(u \ln(u))_x = 0, \quad 0 < u \leq 1. \quad (2)$$

A função de fluxo da equação (2) é dada por

$$f(u) = -v_{max}u \ln(u). \quad (3)$$



Para o que se pretende fazer, precisa-se que a função de fluxo seja um polinômio, o que não ocorre na equação (3). Para isso, aproxima-se a função de fluxo da equação (3) por uma função polinomial, conforme o teorema a seguir.

Teorema 1: Considere a função $f(u) = -v_{max}u \ln(u)$, que representa o fluxo do modelo de Greenberg. A expansão em série de Taylor no ponto $u_0 = 1/2$ é dada por

$$f(u) = \frac{v_{max}}{2} + v_{max}u(\ln(2) - 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}v_{max}2^{(k-1)}}{k(k-1)}(u - 1/2)^k. \tag{4}$$

Pode-se verificar as seguintes propriedades:

- (i) $f(u)$ é analítica no intervalo $0 \leq u \leq 1$, ou seja, a série de Taylor na equação (4) converge nesse intervalo.
- (ii) o polinômio de grau N obtido do truncamento da série de Taylor na equação (4) tem a mesma concavidade (côncava) da função de fluxo de Greenberg no intervalo $(0, 1)$, qualquer que seja o grau de truncamento $N \geq 2$.

Esse teorema e sua prova se encontram em Silva e Rodríguez-Bermudez (2022).

Considerando a equação (4) como a equação de fluxo do modelo de Greenberg, se faz $\mu = u - 1/2$ lembrando que $0 \leq u \leq 1$; assim, $-1/2 \leq \mu \leq 1/2$. Com isso, $\mu_x = u_x$ e, então,

$$f(\mu) = \frac{v_{max}}{2} + v_{max}(\mu + 1/2)(\ln(2) - 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}v_{max}2^{k-1}}{k(k-1)}\mu^k. \tag{5}$$

Tal substituição é feita para facilitar a obtenção da cadeia de Hugoniot-Maslov.

Para obter soluções do tipo choque pelo método assintótico (Colombeau, 1985; Rodríguez-Bermudez *et al.*, 2021), tem-se que a solução deve ser da seguinte forma:

$$\mu(x, t) = A(x, t) + B(x, t)H(x - X(t)), \tag{6}$$

onde H é uma função generalizada de Heaviside em $G_S(\mathbb{R})$, A , B e X são funções C^∞ de todos os seus argumentos, e a curva $x - X(t) = 0$ descreve a trajetória da singularidade. Supondo que a solução da equação (5) é a equação (6), tem-se, então, que a solução da equação (4) é dada por $u(x, t) = A(x, t) + B(x, t)H(x - X(t)) + \frac{1}{2}$.



Com a equação (6), obtém-se que

$$f(\mu) = \frac{v_{max}}{2} + v_{max}[A(x, t) + B(x, t)H(x - X(t)) + 1/2](\ln(2) - 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}v_{max}2^{k-1}}{k(k-1)}[A(x, t) + B(x, t)H(x - X(t))]^k. \tag{7}$$

Assim,

$$\mu_t + (f(\mu))_x = A_t + B_tH - BX'\delta(\tau) + v_{max}[A_x + B_xH(\tau) + B\delta(\tau)](\ln(2) - 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}v_{max}2^{k-1}}{k-1}[A + BH(\tau)]^{k-1}[A_x + B_xH(\tau) + B\delta(\tau)]. \tag{8}$$

Portanto,

$$A_t + B_tH - BX'\delta(\tau) + v_{max}[A_x + B_xH(\tau) + B\delta(\tau)](\ln(2) - 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}v_{max}2^{k-1}}{k-1}[A + BH(\tau)]^{k-1}[A_x + B_xH(\tau) + B\delta(\tau)] \approx 0. \tag{9}$$

Logo,

$$\mu(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)(x - X(t))^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)(x - X(t))^k \right) H(x - X(t)) \quad e \tag{10}$$

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)(x - X(t))^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)(x - X(t))^k \right) H(x - X(t)) + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Para obter a cadeia de Hugoniot-Maslov foi utilizado o teorema a seguir, que se encontra em Rodríguez-Bermudez e Valiño-Alonso (2007; 2018).

Teorema 2: Se existe uma solução fraca da equação $u_t + f'(u)u_x = 0$ na álgebra $G_S(\mathbb{R}^2)$ da forma da equação (10), então as funções $X, A_l, B_l, l = 0, 1, 2, \dots$, satisfazem o seguinte sistema infinito de equações diferenciais ordinárias (EDOs):

$$X' = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=k}^n a_i f_i(k) A_0^{i-k} B_0^k, \tag{12}$$

$$A'_l = (l+1)A_{l+1}(X' - a_0) - \sum_{j=0}^l \left[(j+1)a_1 A_{l-j} A_{j+1} + \sum_{i=2}^n a_i \tilde{A}_{i,j,l} (j+1) A_{j+1} \right], \tag{13}$$



$$\begin{aligned}
 B'_l = & (l + 1)B_{l+1}(X' - a_0) - \sum_{j=0}^l \left\{ (j + 1)a_1(A_{l-j}B_{j+1} + B_{l-j}B_{j+1} + B_{l-j}A_{j+1}) + 2a_2(j + 1)[A_{j+1} \right. \\
 & + B_{j+1}] \sum_{m=0}^{l-j} A_{l-j-m}B_m + \sum_{i=2}^n \left[(j + 1)a_i(B_{j+1}\tilde{A}_{i,j,l} + A_{j+1}\tilde{B}_{i,j,l} + B_{j+1}\tilde{B}_{i,j,l}) \right] + \sum_{i=2}^{n-1} [(i + \\
 & + 1)a_{i+1}A_{l-j} \sum_{m=0}^j (m + 1)(A_{m+1}B_{m+1})\tilde{B}_{i,m,j} \\
 & + \left(\sum_{i=3}^n ia_i\tilde{A}_{i-1,j,l} \right) \left(\sum_{m=0}^j (m + 1)B_{j-m}[A_{m+1} + B_{m+1}] \right) \\
 & \left. + \sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=k+2}^n a_i f_i(k)\tilde{A}_{i-k,j,l} \right) \left(\sum_{m=0}^j (m + 1)\tilde{B}_{k,m,j}(A_{m+1} + B_{m+1}) \right) \right\}, \tag{14}
 \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{A}_{i,j,l} = \sum_{k_1=0}^{l-j} \sum_{k_2=0}^{l-j-k_1} \dots \sum_{k_{i-1}=0}^{l-j-k'} A_{k_1}A_{k_2} \dots A_{k_{i-1}}A_{l-j-k'},$$

$$\tilde{B}_{i,j,l} = \sum_{k_1=0}^{l-j} \sum_{k_2=0}^{l-j-k_1} \dots \sum_{k_{i-1}=0}^{l-j-k'} B_{k_1}B_{k_2} \dots B_{k_{i-1}}B_{l-j-k'},$$

sendo $k' = \sum_{s=1}^{i-2} k_s$, $k'' = \sum_{s=1}^{i-1} k_s$ e denotando-se por $f_i(k)$ a seguinte expressão

$$f_i(k) = \begin{cases} \frac{(i - k + 1)(i - k + 2) \dots (i - 1)i}{k!}, & \text{se } k > 0 \\ 1, & \text{se } k = 0 \end{cases},$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

O sistema infinito de EDOs escrito desta forma não tem solução. Para conseguir resolver esse sistema foi feito um truncamento, ou seja, fixa-se l , no caso $l = 2$, lembrando que l começa em 0. Com isso, obteve-se um sistema com sete EDOs para ambos os modelos, o que já é suficiente para adquirir bons resultados. Ademais, admite-se que $A_i = B_i = 0$, para quaisquer A_i e B_i , com $i > 2$.

Usando o Teorema (2), observando que $a_0 = v_{max}(\ln(2) - 1)$, $a_i = [(-1)^i v_{max} 2^i]/i$, para todo $i = 1, 2, 3, \dots$, e fazendo o truncamento, obtém-se o seguinte sistema:



$$\left\{ \begin{aligned}
 X' &= v_{max}(\ln(2) - 1) + \sum_{i=1}^n a_i A_0^i + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=k}^n a_i f_i(k) A_0^{i-k} B_0^k \\
 A'_0 &= A_1[X' - v_{max}(\ln(2) - 1)] + 2v_{max}A_0A_1 - \sum_{i=2}^n a_i \tilde{A}_{i,0,0}A_1 \\
 A'_1 &= 2A_2[X' - v_{max}(\ln(2) - 1)] + 2v_{max}A_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i \tilde{A}_{i,0,1}A_1 + 4v_{max}A_0A_2 - \sum_{i=2}^n a_i \tilde{A}_{i,1,1}2A_2 \\
 A'_2 &= 6v_{max}A_1A_2 - \sum_{i=2}^n a_i \tilde{A}_{i,0,2}A_1 - \sum_{i=2}^n a_i \tilde{A}_{i,1,2}2A_2 \\
 B'_0 &= B_1[X' - v_{max}(\ln(2) - 1)] - \{(-2v_{max})(A_0B_1 + B_0B_1 + B_0A_1) + 4v_{max}[A_1 + B_1]A_0B_0 \\
 &+ \sum_{i=2}^n [a_i(B_1\tilde{A}_{i,0,0} + A_1\tilde{B}_{i,0,0} + B_1\tilde{B}_{i,0,0})] + \sum_{i=2}^{n-1} [(i+1)a_{i+1}A_0(A_1 + B_1)\tilde{B}_{i,0,0}] \\
 &+ \left(\sum_{i=3}^n ia_i\tilde{A}_{i-1,0,0}\right)(B_0[A_1 + B_1]) + \sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=k+2}^n a_i f_i(k)\tilde{A}_{i-k,0,0}\right)(\tilde{B}_{k,0,0}(A_1 + B_1))\} \\
 B'_1 &= 2B_2[X' - v_{max}(\ln(2) - 1)] - \sum_{j=0}^1 \{(j+1)(-2v_{max})(A_{1-j}B_{j+1} + B_{1-j}B_{j+1} + B_{1-j}A_{j+1}) \\
 &+ 4v_{max}(j+1)[A_{j+1} + B_{j+1}] \sum_{m=0}^{1-j} A_{1-j-m}B_m + \sum_{i=2}^n [(j+1)a_i(B_{j+1}\tilde{A}_{i,j,1} + A_{j+1}\tilde{B}_{i,j,1} + B_{j+1}\tilde{B}_{i,j,1})] \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[(i+1)a_{i+1}A_{1-j} \sum_{m=0}^j (m+1)(A_{m+1} + B_{m+1})\tilde{B}_{i,m,j} \right] \\
 &+ \left(\sum_{i=3}^n ia_i\tilde{A}_{i-1,j,1}\right) \left(\sum_{m=0}^j (m+1)B_{j-m}[A_{m+1} + B_{m+1}]\right) \\
 &+ \sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=k+2}^n a_i f_i(k)\tilde{A}_{i-k,j,1}\right) \left(\sum_{m=0}^j (m+1)\tilde{B}_{k,m,j}(A_{m+1} + B_{m+1})\right)\} \\
 B'_2 &= - \sum_{j=0}^2 \{(j+1)(-2v_{max})(A_{2-j}B_{j+1} + B_{2-j}B_{j+1} + B_{2-j}A_{j+1}) \\
 &+ 4v_{max}(j+1)[A_{j+1} + B_{j+1}] \sum_{m=0}^{2-j} A_{2-j-m}B_m + \sum_{i=2}^n [(j+1)a_i(B_{j+1}\tilde{A}_{i,j,2} + A_{j+1}\tilde{B}_{i,j,2} + B_{j+1}\tilde{B}_{i,j,2})] \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[(i+1)a_{i+1}A_{2-j} \sum_{m=0}^j (m+1)(A_{m+1} + B_{m+1})\tilde{B}_{i,m,j} \right] \\
 &+ \left(\sum_{i=3}^n ia_i\tilde{A}_{i-1,j,2}\right) \left(\sum_{m=0}^j (m+1)B_{j-m}[A_{m+1} + B_{m+1}]\right) \\
 &+ \sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=k+2}^n a_i f_i(k)\tilde{A}_{i-k,j,2}\right) \left(\sum_{m=0}^j (m+1)\tilde{B}_{k,m,j}(A_{m+1} + B_{m+1})\right)\}.
 \end{aligned} \right.$$

Para resolver o sistema de EDOs precisa-se de valores para A_i e B_i em $t = 0$, com $i = 0, 1$ ou 2 ; tais valores vêm da condição inicial $u_0(x)$. Tem-se que as funções suaves $u_\ell(x)$ e $u_r(x)$ podem



ser formalmente expressas como a série de Taylor na forma

$$u_\ell(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_\ell^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad u_r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_r^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Aqui, não se está preocupado com o raio de convergência dessas séries. Aplicando na equação (11) para $t = 0$, tem-se

$$u(0, x) = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_\ell^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] + \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_r^{(k)}(0) - u_\ell^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] H(x) + \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Tomando a equação solução do modelo de Greenberg (11) em $t = 0$, com $X(0) = 0$, e igualando a equação (15), obtêm-se

$$A_0(0) = \frac{u_\ell^{(0)}(0)}{0!} - \frac{1}{2}, \quad A_k(0) = \frac{u_\ell^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \quad (16)$$

$$B_0(0) = \frac{u_r^{(0)}(0)}{0!} - \frac{1}{2}, \quad B_k(0) = \frac{u_r^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2. \quad (17)$$

3 Metodologia

Para a simulação numérica realizada nesta pesquisa foi utilizada a linguagem C para o programa feito pela autora e as imagens foram geradas no *software* Gnuplot ⁴. O sistema de EDOs foi obtido utilizando o teorema citado e fazendo as contas necessárias, sem a utilização de *software* para isso.

4 Simulações

Nesta seção, vê-se as soluções numéricas variando as condições iniciais, primeiramente abordando o problema de Riemann clássico, e depois usando condições iniciais não constantes (problema de Riemann generalizado). Tais simulações foram feitas para a velocidade máxima, $v_{max} = 100 \text{ km/h}$. Como dito anteriormente, foi utilizado o método de Runge-Kutta para sistemas para resolver a cadeia de Hugoniot-Maslov. Todos os exemplos foram resolvidos pelo método assintótico e, além disso, foi realizada uma comparação com outros dois métodos numéricos de diferenças finitas, que são os métodos de Lax-Wendroff e Lax-Friedrichs. Foram realizadas 1000

⁴Gnuplot. Disponível em: <http://www.gnuplot.info>.



iterações para o intervalo de tempo de 0,0 a 1,0, e para o intervalo espacial de -100 a 100, para ambos os métodos numéricos.

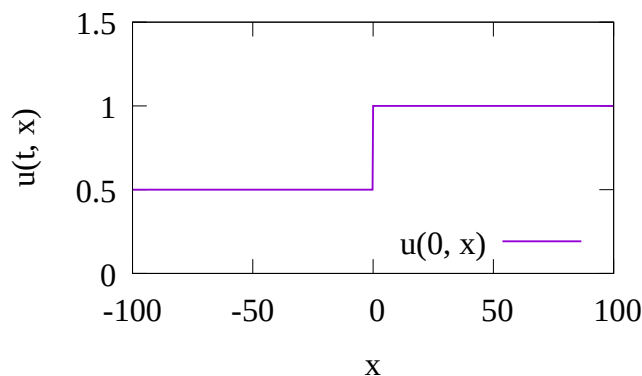
Pode-se ver que as soluções numéricas do modelo de Greenberg utilizando a função aproximada truncada em $n = 9$, como foi observado em Silva e Rodríguez-Bermudez (2022), já é uma ótima aproximação. Por isso, esse truncamento foi escolhido para montar o sistema de EDOs e tal sistema foi utilizado para as simulações numéricas.

Os valores das condições iniciais foram escolhidos pois ambos produzem uma solução do tipo choque. Existem outros valores que dão soluções do tipo choque e também existem valores que dão o outro tipo de solução, que não foi abordado aqui.

Seja a seguinte condição inicial, que é um problema de Riemann clássico, ou seja, o qual respeita a condição de entropia (Figura 1):

$$u(0, x) = \begin{cases} 0,5, & \text{se } x < 0 \\ 1,0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Figura 1 – Condição inicial do problema de Riemann clássico



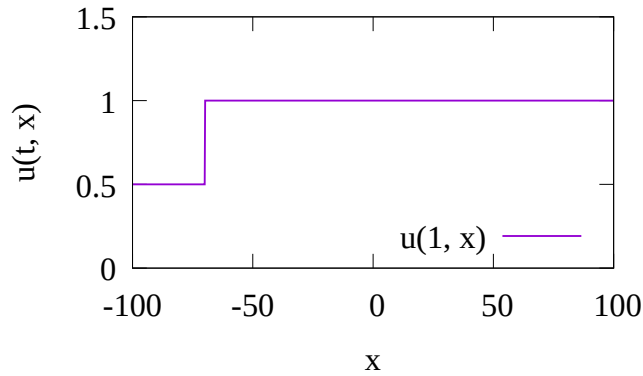
Fonte: Elaboração dos autores

Obtendo-se o resultado numérico via método assintótico, para $t = 1$, vê-se que o choque está localizado em $x \approx -69,315$, o que pode ser observado na Figura 2. Na Figura 3, pode-se observar que a altura do choque e seu comportamento permanecem iguais ao longo do tempo. A trajetória da singularidade é dada por $x = -69,315t$, que é encontrada pela condição de Rankie-Hugoniot, só que nesse caso com a função aproximada sendo a função de fluxo. E é exatamente o que foi encontrado numericamente, como pode ser visto na Figura 4. Para esse exemplo, como pode ser visto na Figura



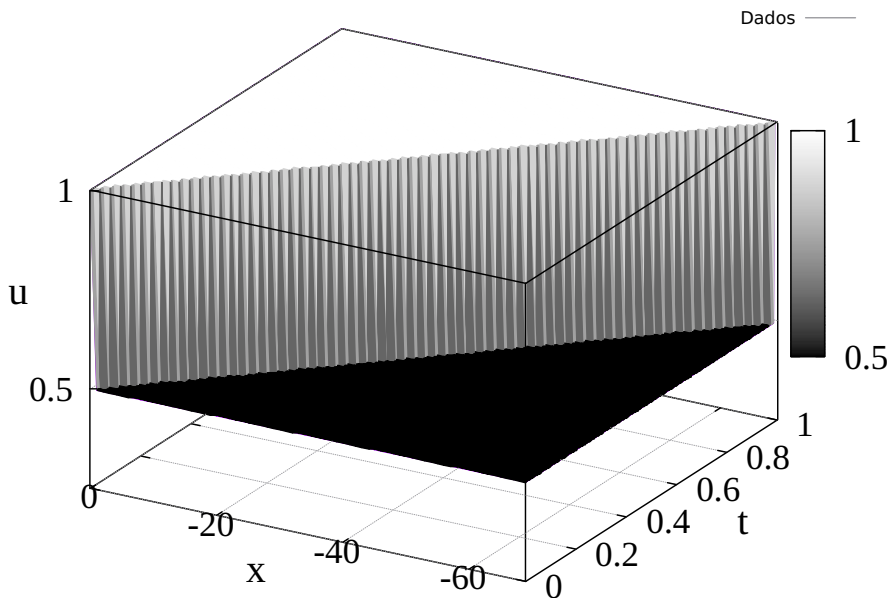
5, o desempenho do método assintótico é o que mais parece com o choque, numericamente, onde L-W é o Lax-Wendroff, L-F é o Lax-Friedrichs e M. A. é o método assintótico.

Figura 2 – Solução numérica no tempo $t = 1$, problema de Riemann clássico; nota-se que o choque está localizado em $x \approx -69,315$



Fonte: Elaboração dos autores.

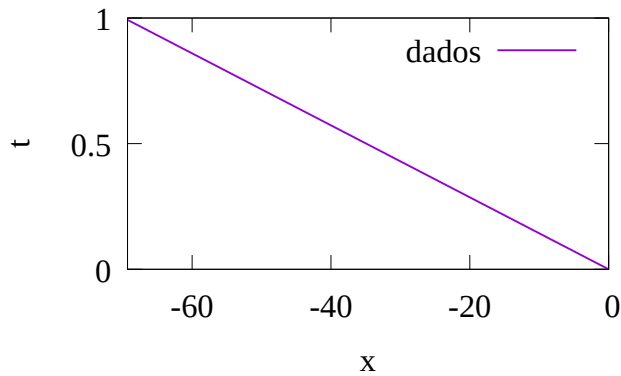
Figura 3 – Gráfico 3D do problema de Riemann clássico; nota-se que a altura do choque e seu comportamento permanecem iguais ao longo do tempo, com trajetória dada por $x = -69,315t$



Fonte: Elaboração dos autores.

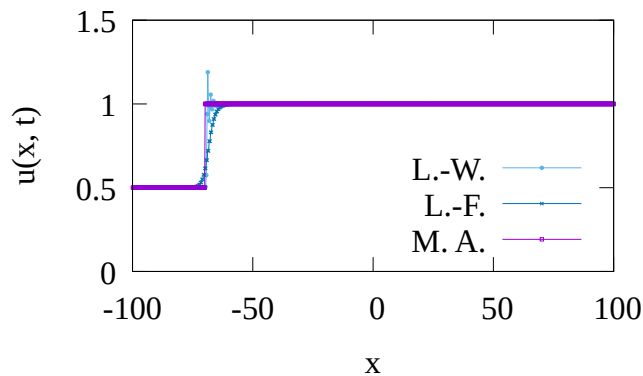


Figura 4 – Trajetória da singularidade do problema de Riemann clássico



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 5 – Perfil do choque do problema de Riemann clássico; nota-se que o desempenho do método assintótico é o que, numericamente, mais se parece com o choque analítico; L-W: Lax-Wendroff; L-F: Lax-Friedrichs; M. A.: Método Assintótico



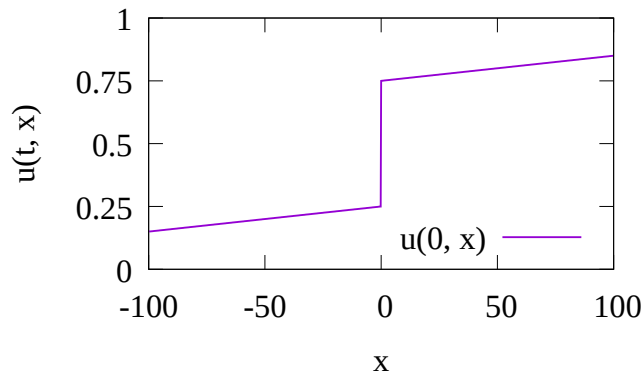
Fonte: Elaboração dos autores.

Consideramos agora a seguinte condição inicial, que é um exemplo do problema de Riemann generalizado (Figura 6):

$$u(0, x) = \begin{cases} 0,25 + 0,001x, & \text{se } x < 0 \\ 0,75 + 0,001x, & \text{se } x > 0 \end{cases} . \tag{19}$$



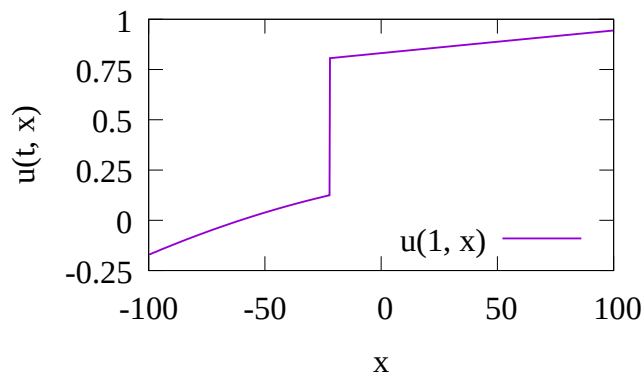
Figura 6 – Condição inicial do problema de Riemann generalizado



Fonte: Elaboração dos autores.

Para $t = 1$, se pode ver o perfil do choque obtido pelo método assintótico na Figura 7, cuja localidade do choque é em $x \approx -21,988$. No gráfico 3D da Figura 8, nota-se que a altura do choque aumenta ao longo do tempo e, além disso, nota-se que o comportamento permanece o mesmo. Nesse caso, temos que a velocidade da descontinuidade varia ao longo do tempo (Figura 9). A Figura 10 ilustra a onda de choque no tempo $t = 0,5$, e a Figura 11 em $t = 0,9$; em ambos os casos se tem que o método assintótico é o que se aproxima melhor do comportamento do choque obtido analiticamente.

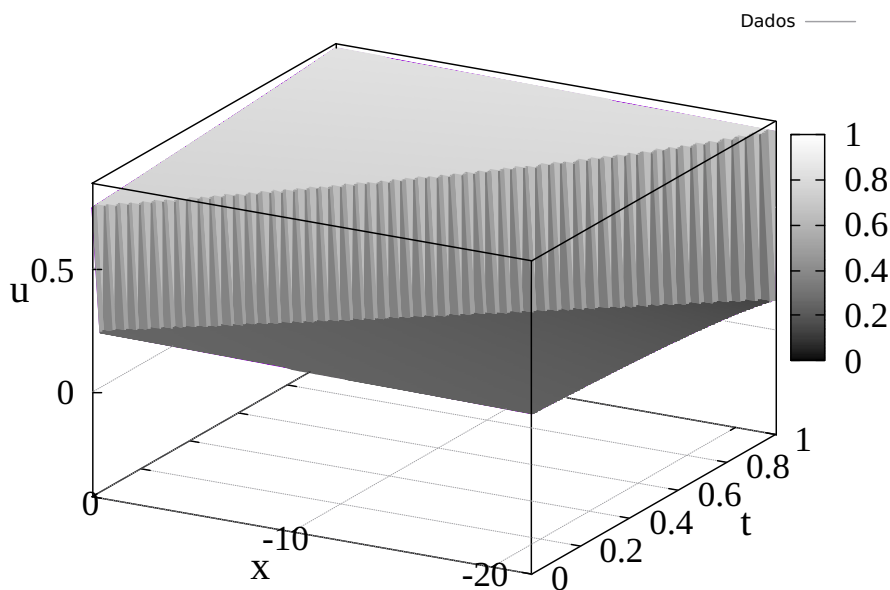
Figura 7 – Solução numérica no tempo $t = 1$ do problema de Riemann generalizado; o perfil do choque, localizado em $x \approx -21,988$, foi obtido pelo método assintótico



Fonte: Elaboração dos autores.

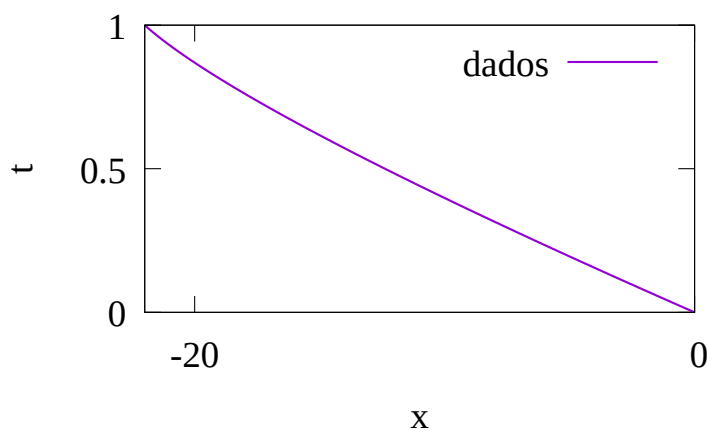


Figura 8 – Gráfico 3D do problema de Riemann generalizado; a altura do choque aumenta ao longo do tempo (o que é esperado para este tipo de problema), embora o comportamento não se altere



Fonte: Elaboração dos autores.

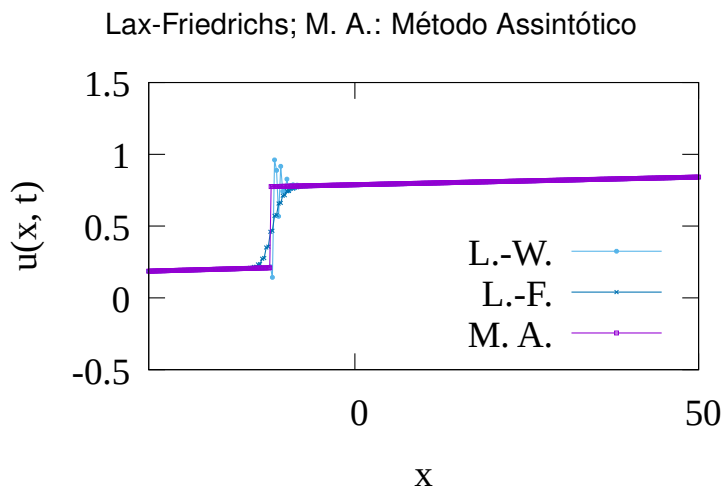
Figura 9 – Trajetória da singularidade do problema de Riemann generalizado; a velocidade da descontinuidade varia ao longo do tempo



Fonte: Elaboração dos autores.

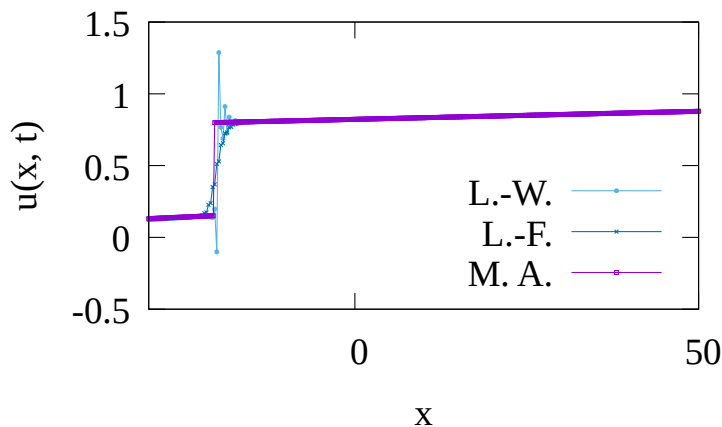


Figura 10 – Perfil para $t = 0.5$ do problema de Riemann generalizado; o método assintótico é o que se aproxima melhor do comportamento do choque obtido analiticamente; L-W: Lax-Wendroff; L-F: Lax-Friedrichs; M. A.: Método Assintótico



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 11 – Perfil para $t = 0.9$ do problema de Riemann generalizado; novamente nota-se que o método assintótico é o que se aproxima melhor do comportamento do choque obtido analiticamente; L-W: Lax-Wendroff; L-F: Lax-Friedrichs; M. A.: Método Assintótico



Fonte: Elaboração dos autores.

5 Conclusões

Neste trabalho foi aplicado o método assintótico para o modelo de tráfego de Greenberg e, conseqüentemente, obteve-se a cadeia de Hugoniot-Maslov para esse modelo, utilizando uma aproximação da função de fluxo de Greenberg. Além disso, a análise gráfica mostrou que de fato o método assintótico é o que melhor representa a solução do tipo onda de choque, pois como pode-se



ver, ele é o único que em volta da descontinuidade não apresenta oscilação ou difusão. Em trabalhos futuros, pretende-se continuar essa análise para outros modelos de tráfego.

Referências

COLOMBEAU, J. F. **Elementary Introduction to New Generalized Functions**. Amsterdam: North-Holland, 1985. v. 113. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/north-holland-mathematics-studies/vol/114/suppl/https>. Acesso em: 4 jul. 2024.

MASLOV, V. P.; ARNOLD, Vladimir Igorevich; BUSLAEV, Vladimir Savel'evich; LASCOUX J.; SÉNÉOR, R.; LERAY, J. **Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques**. Paris: Dunod, 1972. DOI: <https://doi.org/10.1112/blms/7.3.334>.

MASLOV, V. P. Propagation of Shock Waves in an Isoentropic Nonviscous Gas. **Journal of Soviet Mathematics**, [S. l.], v. 13, p. 119-163, 1980. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01084111>.

RODRÍGUEZ-BERMEDEZ, P.; SOUSA, F. V.; LOBÃO, D. C.; ALVAREZ, G. B.; VALIÑO-ALONSO, B. Hugoniot-Maslov Chain for Shock Waves in Buckley-Leverett Equations. **Mathematical Notes**, [S. l.], v. 110, p. 738-753, 2021. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1134/S0001434621110110>. Acesso em: 5 jul. 2024.

RODRÍGUEZ-BERMEDEZ, P.; VALIÑO-ALONSO, B. Asymptotic Maslov's method for shocks of conservation laws systems with quadratic flux. **Applicable Analysis**, [S. l.], v. 97, p. 888-901, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036811.2017.1293817>.

RODRÍGUEZ-BERMEDEZ, P.; VALIÑO-ALONSO, B. Hugoniot-Maslov chains of a shock wave in conservation law with polynomial flow. **Mathematische Nachrichten**, [S. l.], v. 280, n.8, p. 907-915, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1002/mana.200410523>.

SILVA, Mariana. **Método Assintótico Aplicado ao Modelo de Tráfego de Greenberg**. Orientador: Panters Rodríguez-Bermudez. 2023. 116 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2023. Disponível em: <http://mcct.uff.br/dissertacoes>. Acesso em: 5 jul. 2024.

SILVA, M.; RODRÍGUEZ-BERMEDEZ, P. Aproximação Polinomial da Função de Fluxo do Modelo de Tráfego de Greenberg. In: ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 25.; ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, 13.; CONFERÊNCIA SUL EM MODELAGEM COMPUTACIONAL, 9.; SEMINÁRIO E WORKSHOP EM ENGENHARIA OCEÂNICA, 9., 2022, Pelotas. **Anais [...]**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas; Universidade Federal do Rio Grande; Universidade Federal do Pampa, 2022. p. 1-10. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/enmcmcsulsemengo2022/527147-aproximacao-polinomial-da-funcao-de-fluxo-do-modelo-de-trafego-de-greenberg>. Acesso em: 5 jul. 2024.

