

Boa Colocação e Estabilidade Exponencial para dois Problemas de Viga Viscoelástica¹

Well-posedness and Exponential Stability for two Viscoelastic Beam Problems

Buena Localización y Estabilidad Exponencial para dos Problemas de Vigas Viscoelásticas



Andrea Luiza Gonçalves Martinho²

Universidade Federal do Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0009-0002-0876-4438>,  <http://lattes.cnpq.br/9091881705638294>

Leandro Tomaz de Araujo³

Universidade Federal do Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0009-0006-5568-1706>,  <http://lattes.cnpq.br/5898311635778281>

Resumo: Neste artigo, estudamos a estabilidade e regularidade de uma viga de comprimento ℓ composta de material viscoelástico em duas situações: na primeira, consideramos a viga engastada em suas extremidades; e na segunda, a viga apoiada em suas extremidades. O sistema é regido por um modelo de viga Euler-Bernoulli com amortecimento do tipo Kelvin-Voight. Usaremos a Teoria de Semigrupo para a provar a existência e unicidade de soluções, e o resultado de Pruss para estudar o comportamento assintótico das soluções de ambos os modelos. Além disso, mostramos a perda de analiticidade para o segundo modelo o que é também um resultado relevante uma vez que mostra que as soluções não são funções analíticas em relação a variável tempo.

Palavras-chave: semigrupos; estabilidade exponencial; analiticidade.

Abstract: In this article we studied the stability and regularity of a beam of length ℓ composed of viscoelastic material in two situations: in the first, we consider the beam fixed at its ends; and in the second, the beam supported at its ends. The system is governed by an Euler-Bernoulli beam model with Kelvin-Voight type damping. We will use the Semigroup Theory to prove the existence and uniqueness of solutions, and the Pruss result to study the asymptotic behavior of the solutions of both models. Furthermore, we showed the loss of analyticity for the second model, which is also a relevant result, as it shows that the solutions are not analytical functions in relation to the time variable.

¹Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

²**Currículo sucinto:** Licenciada em Matemática, mestra em Ciências e doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Atuou como docente na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. **Contribuição de autoria:** Metodologia, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. A autora faleceu em 3 de junho de 2024.

³**Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro, mestre em Ciências e doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Docente da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. **Contribuição de autoria:** Escrita – Revisão e Edição. **Contato:** leandroaraujo@ufrj.br.



Keywords: semigroups; exponential stability; analyticity.

Resumen: En este artículo, estudiaremos la estabilidad y regularidad de una viga de longitud ℓ compuesta por material viscoelástico en dos situaciones: en la primera, consideramos la viga empotrada en sus extremos; y en la segunda, la viga apoyada en sus extremos. El sistema está regido por un modelo de viga Euler-Bernoulli con amortiguamiento del tipo Kelvin-Voight. Utilizaremos la Teoría de Semigrupos para probar la existencia y unicidad de soluciones, y el resultado de Pruss para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de ambos modelos. Además, mostraremos la pérdida de analiticidad para el segundo modelo, lo cual es un resultado relevante ya que muestra que las soluciones no son funciones analíticas en relación a la variable tiempo.

Palabras clave: semigrupos; estabilidad exponencial; analiticidad.

Data de submissão: 8 de janeiro de 2024.

Data de aprovação: 29 de abril de 2024.

1 Introdução

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico e parte do efeito regularizante de uma viga totalmente de material viscoelástico de comprimento ℓ . Este estudo foi motivado pela grande importância que os materiais viscoelásticos exercem na engenharia, na física e em muitas outras áreas como podemos ver em Christensen (1982) e Lakes (2009).

Aqui consideramos o modelo de Euler Bernoulli com componente viscosa efetiva em todo material. Mais precisamente, consideramos uma viga feita de material viscoelástico estruturada no intervalo $[0, \ell]$ com especificamente com duas configurações para as extremidades. A primeira configuração envolve uma viga engastada em suas extremidades, e a segunda configuração envolve uma viga apoiada em suas extremidades. Em qualquer um dos casos consideramos a deformação da viga em um ponto x no tempo t é u , onde $u = u(x, t)$ com $x \in]0, \ell[$. Isso direciona à investigação da viga unidimensional considerada através de um modelo envolvendo um problema com valor de contorno e valor inicial. Os modelos que consideramos para a viga viscoelástica são dados abaixo:

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 u_{ttx} = 0, \text{ para } (x, t) \in]0, \ell[\times]0, +\infty[\quad (1)$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ em }]0, \ell[; \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em }]0, \ell[; \quad (3)$$



e associado com uma das condições de fronteira do tipo

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \text{ em }]0, +\infty[\tag{4}$$

ou

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\ell, t) = 0, \text{ em }]0, +\infty[\tag{5}$$

onde ρ, α, α_0 são constantes positivas.

O comportamento assintótico é obtido usando o teorema 4.1, sendo a parte mais relevante deste trabalho que consiste em mostrar o decaimento exponencial para os problemas envolvendo a viga viscoelástica determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (4) ou do tipo (5).

Já em relação ao efeito regularizante, o resultado é obtido através do teorema 5.1, onde mostramos que para um problema envolvendo uma viga viscoelástica para um sistema determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (5), temos a perda de analiticidade.

Em ambos os modelos obtemos a existência e a unicidade de soluções para esses problemas com técnicas de Semigrupos e Espaços de Sobolev, que podem ser encontrados em Adams (1975), Brezis (2011) e Pazy (1983).

Este trabalho está organizado como segue. Na seção 2 apresentamos o espaço fase e o domínio do operador. Na seção 3 apresentamos a boa colocação para ambos os problemas usando a teoria bem conhecida como citado anteriormente. Na seção 4 apresentamos a estabilidade exponencial. Finalmente, na seção 5 apresentamos a perda de analiticidade para o problema determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (5).

2 Espaço fase e operador \mathcal{A}

Nesta seção obtemos um resultado de existência e unicidade de soluções do problema determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (4) ou (5). Note que a energia associada ao modelo (1)-(3) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (\rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2) dx.$$

Um cálculo rápido mostra que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^\ell \alpha_0 |u_{xt}|^2 dx.$$



Assim, para definir o espaço fase, considere os seguintes espaços de Hilbert

$$V_1 = H_0^2(0, \ell),$$

$$V_2 = H_*^2(0, \ell) \cap H_0^1(0, \ell).$$

$$H_*^2(0, \ell) := \left\{ \omega \in H^2(0, \ell) : \int_0^\ell \omega'(x) dx = 0 \right\}.$$

Denotemos $u_t = v$. Definimos o espaço de fase:

1. Problema (1)-(3), associado com condições de fronteira do tipo (4):

$$\mathcal{H}_1 = V_1 \times L^2(0, \ell).$$

2. Problema (1)-(3), associado com condições de fronteira do tipo (5):

$$\mathcal{H}_2 = V_2 \times L^2(0, \ell).$$

Note que \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 são espaços de Hilbert equipados com o produto interno da forma

$$(U, U^*)_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell (\rho v \bar{v}^* + \alpha u_{xx} \bar{u}_{xx}^*) dx,$$

onde $U = (u, v)^T$ e $U^* = (u^*, v^*)^T$. Para $j = 1, 2$, o operador \mathcal{A}_j , para $\rho = 1$, é dado pela seguinte expressão:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha \partial_{xxxx} & \alpha_0 \partial_{xx} \end{pmatrix} \text{ para } j = 1, 2.$$

Portanto, o sistema (1)-(3) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} U_t - \mathcal{A}U &= 0, \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \tag{6}$$

com domínio dado por

$$D(\mathcal{A}_j) = H^4(0, \ell) \cap V_j \times V_j \text{ para } j = 1, 2.$$

Por simplicidade de notação, escreveremos \mathcal{A} e \mathcal{H} ao invés de \mathcal{A}_j e \mathcal{H}_j para $j = 1, 2$.

Agora, não é difícil ver que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}, U \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell \alpha_0 |v_x|^2 dx \leq 0. \tag{7}$$



Tomemos $F = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}$. Agora, observando que a equação do resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F = U$ é equivalente a $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que em termos das componentes pode ser escrito como

$$i\lambda u - v = f_1 \tag{8}$$

$$i\lambda \rho v + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = f_2, \tag{9}$$

satisfazendo (4) e (5). Agora, tomando o produto interno da equação do resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ com U , e depois tomando a parte real e usando (7), temos que

$$\int_0^\ell \alpha_0 |v_x|^2 dx = \operatorname{Re} \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}}, \tag{10}$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\int_0^\ell |v_x|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{11}$$

onde $C > 0$ é uma constante. Assim, temos estimada a norma de v_x .

3 Boa Colocação

A seguir vamos provar a boa colocação do problema determinado por (1) e (3), e associado com condições de fronteira do tipo (4) ou (5).

Lema 3.1. *Para os casos 1 e 2,*

1. \mathcal{A} é um operador fechado e dissipativo em \mathcal{H} ;
2. $0 \in \varrho(\mathcal{A})$.

Prova. *Para o caso 1 e 2, observe que \mathcal{A} é um operador fechado e*

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_0^\ell \alpha_0 |v_x|^2 dx \leq 0 \tag{12}$$

e assim temos que \mathcal{A} é um operador dissipativo. Agora, provemos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Provemos que para todo $F = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}$, existe uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\mathcal{A}U = F.$$

Em termos das componentes, temos que

$$-v = f_1 \in H^2(0, \ell) \tag{13}$$

$$\alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2 \in L^2(0, \ell). \tag{14}$$



Substituindo a equação (13) em (14), obtemos

$$\alpha u_{xxxx} + \alpha_0 f_{1,xx} = \rho f_2 \in L^2(0, \ell).$$

Usando o Lema de Lax Milgran para a forma bilinear

$$a(u, w) = \int_0^\ell \alpha u_{xx} w_{xx} dx,$$

encontramos que existe uma única função $u \in H_0^2(0, \ell)$ verificando as equações acima.

Lema 3.2. O operador \mathcal{A} definido anteriormente é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre \mathcal{H} .

Prova. Usando a regularidade elíptica temos que

$$u \in H^4(0, \ell).$$

Portanto existe $U = (u, -f_1)^T \in D(\mathcal{A})$ verificando a equação resolvente. Como \mathcal{A} é fechado, dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, temos que para algum $\epsilon > 0$, $\text{Im}(\epsilon I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Usando o Teorema 4.6 do Capítulo 1 de Pazy (1983), concluímos que $D(\mathcal{A})$ é denso sobre \mathcal{H} . Então, \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Portanto, segue o resultado.

Finalmente,

Teorema 3.3. Para qualquer $U_0 \in \mathcal{H}$, a solução U satisfaz $U \in C([0, T]; \mathcal{H})$. Além disso, para cada $U_0 \in D(\mathcal{A})$,

$$U \in C^1([0, T]; \mathcal{H}) \cap C([0, T]; D(\mathcal{A})).$$

4 Estabilidade Exponencial

A nossa principal ferramenta será a caracterização de Pruss, que pode ser encontrada em Liu e Zheng (1999), estabelecida a seguir.

Teorema 4.1. Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,

1. $i\mathbb{R} := \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$, e



$$2. \limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Lema 4.2. *O domínio $D(\mathcal{A})$ tem imersão compacta no espaço de fase \mathcal{H} .*

O Lema 4.2 implica que o espectro de \mathcal{A} é formado exclusivamente por autovalores. Isso porque o resolvente é um operador compacto.

Lema 4.3. *Com as notações anteriores temos, que*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}).$$

Prova. *Pelo Lema 4.2, bastará mostrar que não existem autovalores imaginários. De fato, suponhamos que exista um autovalor imaginário, isto é, existe $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{A}U = i\lambda U \text{ com } U \neq 0.$$

Tomando o produto interno na equação anterior com U , concluímos que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Usando (10), temos

$$\int_0^\ell \alpha_0 |v_x|^2 dx = 0.$$

Logo, $v = 0$, o que implica que $u = 0$ sobre o intervalo $]0, \ell[$, ou seja, $U = (u, v) = (0, 0)$ em $]0, \ell[$, o que implica que o autovetor é identicamente nulo, o que é uma contradição. Portanto, não podem existir autovalores imaginários. De onde segue o resultado.

Agora, considere

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2}(\rho|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2)(x) \text{ e } \mathfrak{R} = \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Além disso, usaremos a desigualdade das derivadas intermediárias, que em sua versão N -dimensional está demonstrada em Adams (1975). A seguir, enunciamos apenas uma versão no caso unidimensional.

Teorema 4.4. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Suponhamos que se $u, u^{(m)} \in L^2(a, b)$, então $u^{(j)} \in L^2(a, b)$, para $j = 1, \dots, m$, onde $u^{(j)} = \frac{d^j}{dx^j}u$. Além do mais, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, temos*

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\epsilon \|u^{(m)}\|_{L^2} + C\epsilon^{-\frac{j}{m-j}} \|u\|_{L^2}, \tag{15}$$

o que implica em

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}} \|u^{(m)}\|_{L^2}^{\frac{j}{m}}. \tag{16}$$



Prova. Do Teorema 4.14 de Adams (1975, p. 75), segue (15). Denotando por

$$\|u\|_m := \|u\|_{L^2} + \|u^{(m)}\|_{L^2}$$

e tomando ϵ como

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{\|u\|_{L^2}}{\|u\|_m} \right)^{\frac{m-j}{m}}$$

em (15), obtemos

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}} \|u\|_m^{\frac{j}{m}},$$

de onde, pela definição da norma $\|\cdot\|_m$, segue (16).

Finalmente,

Teorema 4.5. O semigrupo definido pela equação (1)-(3) é exponencialmente estável.

Prova. Usando a desigualdade (11) e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\int_0^\ell |v|^2 dx \leq C_p \int_0^\ell |v_x|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{17}$$

Pelo Teorema das derivadas intermediárias, temos

$$\|u_{xx}\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2} + C \|u\|^{1/2} \|u_{xxxx}\|_{L^2}^{1/2}.$$

Agora, usando (8) e (9), segue que

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|_{L^2} &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|v + f_1\|_{L^2} + C \|v + f_1\|_{L^2}^{1/2} \left[C \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} + C \|v\|_{L^2}^{1/2} \right] + \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|v + f_1\|_{L^2}^{1/2} \left[C \|f_2\|_{L^2}^{1/2} + C \|f_1''\|_{L^2}^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|_{L^2} &\leq C_\epsilon \|v\|_{L^2} + C_\epsilon \|f_1\|_{L^2} + \epsilon \|u_{xx}\|_{L^2} + \epsilon \|v\|_{L^2} + \epsilon \|f_2\|_{L^2} + \epsilon \|f_1''\|_{L^2} \\ &\leq \epsilon \|u_{xx}\|_{L^2} + \epsilon \|v\|_{L^2} + C_\epsilon \mathfrak{R}^{1/2}. \end{aligned}$$

E, assim, temos que

$$\int_0^\ell \alpha |u_{xx}|^2 dx \leq C_\epsilon \mathfrak{R} + \epsilon \int_0^\ell \mathcal{I}(x) dx. \tag{18}$$

Somando as desigualdades (17) e (18), obtemos

$$\int_0^\ell (|v|^2 + \alpha |u_{xx}|^2) dx \leq C_\epsilon \mathfrak{R} + \epsilon \int_0^\ell \mathcal{I}(x) dx.$$

Tomando ϵ pequeno, segue nossa conclusão.



5 Perda de Analiticidade

A seguir, mostramos a perda de analiticidade de uma viga viscoelástico para o problema (1) e (3) com condição de fronteira (5), usando um resultado que enunciaremos a seguir e que pode ser encontrado em Liu e Zheng (1999).

Teorema 5.1. *Seja $\varrho(\mathcal{A})$ o conjunto resolvente do operador linear \mathcal{A} . Então, um semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é analítico se, e somente se, $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ e*

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Isso que permite demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 5.2. *O semigrupo $e^{A_2 t}$ definido sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H}_2 é não analítico.*

Prova. *É suficiente mostrar que existe uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números reais e uma sequência limitada U_n em \mathcal{H}_2 tal que $\lambda_n \rightarrow +\infty$ e*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\lambda_n(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = +\infty.$$

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos

$$F_n = \left(0, \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right)^T.$$

Seja $U_n = (u_n, v_n)^T \in D(\mathcal{A}_2)$ a solução única da equação resolvente $i\lambda_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n$ com $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ou, equivalentemente,

$$i\lambda_n u - v = 0, \text{ em } (0, \ell) \times \mathbb{R}^+ \tag{19}$$

$$i\lambda_n \rho v - \alpha u_{xxxx} + \alpha_0 v_{xx} = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \text{ em } (0, \ell) \times \mathbb{R}^+. \tag{20}$$

Pelas condições de contorno (5), as soluções do sistema são da forma

$$u_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Por (19),

$$v_n = i\lambda_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$



Por (20),

$$\left(\alpha \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 - \lambda_n^2\right) A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \alpha_0 i \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Obtemos

$$A_n = \frac{-i}{\alpha_0} \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2.$$

Então,

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \alpha \int_0^\ell |u_{n,xx}|^2 dx = \frac{\alpha}{\alpha_0^2},$$

de modo que

$$\|\lambda_n U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = |\lambda_n|^2 \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\sqrt{\alpha^3}}{\alpha_0^2} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2.$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, o resultado segue.

6 Conclusões

Neste trabalho mostramos a existência e a unicidade de soluções para dois modelos de vigas viscoelásticas, bem como a estabilidade exponencial para ambos os problemas. Porém, note que mostramos a perda de analiticidade apenas para o problema determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (5).

Por outro lado, ao compararmos os dois problemas, apesar de suas similaridades, a técnica para provar a perda de analiticidade para o segundo não pôde ser aplicada ao primeiro, uma vez que não temos as soluções adequadas para as condições (4). Portanto, um problema em aberto é o estudo desta questão para o primeiro problema.

Referências

- ADAMS, R. A.. **Sobolev Spaces**. New York; San Francisco; London: Academic Press, 1975.
- BREZIS, H.. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Berlin: Springer, 2011.
- CHRISTENSEN, R. M.. **Theory of Viscoelasticity: An Introduction**. 2. ed. [S. l.]: Elsevier. 1982.
DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7>.



LAKES, R.. **Viscoelastic Materials**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511626722>.

LIU, Z.; ZHENG, S.. **Semigroups associated to dissipative systems**. [S. l.]: Chapman & Hall/CRC, 1999.

PAZY, A.. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. New York: Springer, 1983. v. 44. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>.

Agradecimentos

Os autores desejam registrar os seus agradecimentos ao Prof. Jaime M. Rivera devido a suas orientações durante todo tempo em que eles foram discentes de doutorado no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

