

Novos Esquemas de Diferenças Finitas para a Equação de Helmholtz¹

New Finite Difference Schemes for Helmholtz Equation

Nuevos Esquemas en Diferencias Finitas para la Ecuación de Helmholtz

Gustavo Benitez Alvarez²

Universidade Federal Fluminense (UFF), Volta Redonda, RJ, Brasil



<https://orcid.org/0000-0002-2618-9513>,



<http://lattes.cnpq.br/9571488360812994>

Helder da Fonseca Nunes³

Universidade Federal Fluminense (UFF), Volta Redonda, RJ, Brasil



<https://orcid.org/0009-0005-9593-9241>,



<http://lattes.cnpq.br/9801690867484750>

Resumo: A equação escalar de Helmholtz descreve os harmônicos-temporais de ondas acústicas. É bem conhecido que métodos de diferenças finitas e elementos finitos apresentam o efeito de poluição do erro para números de onda médio e alto. Neste trabalho são analisados três novos esquemas de diferenças finitas centradas de segunda ordem de precisão em uma e duas dimensões. Esses novos esquemas são consistentes e foram obtidos realizando novas aproximações apenas no segundo termo da equação de Helmholtz. A análise de dispersão, o comportamento do erro e os resultados numéricos mostram o bom desempenho dos Novos Esquemas 2 e 3. O Novo Esquema 3 é capaz de eliminar o efeito de poluição do erro em uma dimensão e minimizar a dispersão da onda plana em duas dimensões.

Palavras-chave: equação de Helmholtz; método de diferenças finitas; análise de dispersão; poluição do erro; estabilização.

Abstract: The Helmholtz scalar equation describes the temporal harmonics of acoustic waves. It is well known that finite difference and finite element methods exhibit the effect of pollution error for medium and high wave-number. In this work, three new centered finite difference schemes of second order precision in one and two dimensions are analyzed. These new schemes are consistent, and were obtained by new approximations only

¹ Artigo apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional 2023 (ERMAC-RJ) & Simpósio 1ª Década do Curso de Mestrado Multidisciplinar em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPG-MCCT), da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Rio de Janeiro, realizado de 30 de outubro a 1 de novembro de 2023.

² **Currículo sucinto:** Licenciado em Física Nuclear pelo Instituto Superior de Ciências y Tecnología Nucleares, mestre e doutor em Engenharia Nuclear pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, pós-doutorado no Laboratório Nacional de Computação Científica, docente da Universidade Federal Fluminense. Professor do Programa de Pós-Graduação Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Obtenção de Financiamento, Recursos, Software, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato:** benitez.gustavo@gmail.com.

³ **Currículo sucinto:** Bacharel em Engenharia Metalúrgica pela Universidade Federal Fluminense e licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro. Mestrando em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Fluminense. **Contribuição de autoria:** Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Recursos, Software, Validação e Visualização. **Contato:** helderfn@id.uff.br.



on the second term of the Helmholtz equation. Dispersion analysis, error behavior and numerical results show the good performance of New Schemes 2 and 3. New Scheme 3 is able to eliminate the pollution error effect in one dimension and minimize the dispersion of the plane wave in two dimensions.

Keywords: Helmholtz equation; finite difference method; dispersion analysis; pollution error; stabilization.

Resumen: La ecuación escalar de Helmholtz describe los armónicos temporales de las ondas acústicas. Es bien conocido que los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos presentan el efecto de polución del error para números de onda medios y altos. En este trabajo se analizan tres nuevos esquemas de diferencias finitas centradas de segundo orden de precisión en una y dos dimensiones. Estos nuevos esquemas son consistentes y se obtuvieron con nuevas aproximaciones sólo en el segundo término de la ecuación de Helmholtz. El análisis de dispersión, el comportamiento del error y los resultados numéricos muestran la eficacia de los Nuevos Esquemas 2 y 3. El Nuevo Esquema 3 es capaz de eliminar el efecto de polución del error en una dimensión y minimizar la dispersión de la onda plana en dos dimensiones.

Palabras clave: ecuación de Helmholtz; método de diferencias finitas; análisis de dispersión; polución del error; estabilización.

Data de submissão: 21 de dezembro de 2023.

Data de aprovação: 4 de abril de 2024.

1 Introdução

A equação escalar de Helmholtz com condições de contorno de Dirichlet é dada por

$$\Delta u + k^2 u = f \text{ em } \Omega, \quad (1)$$

$$u = g \text{ em } \partial\Omega, \quad (2)$$

onde Δ é o operador Laplaciano, u é um campo escalar que descreve os harmônicos-temporais de ondas acústicas, k é o número de onda, f é um termo fonte, Ω é o interior do domínio limitado com contorno Lipschitz $\partial\Omega$ e g é a condição de contorno. Pela sua grande importância, tal equação é objeto de muitos estudos. Contudo, grande parte das aplicações práticas exigem que se tenha um valor de número de onda elevado e sabe-se que a qualidade da solução numérica depende significativamente desse parâmetro, sendo sua precisão deteriorada com o aumento do valor de k (Loula *et al.*, 2007).

Para que uma aceitável aproximação possa ser obtida, a resolução da malha utilizada deve ser ajustada de acordo com o número de onda. Esse ajuste é obtido por meio da regra do dedão



(*rule of thumb*), que prescreve uma quantidade mínima de nós por comprimento de onda (Ihlenburg; Babuška, 1995b). Contudo, é de conhecimento que, mesmo quando a regra do dedão é obedecida, a performance dos métodos de diferenças finitas (MDF) e elementos finitos (MEF) diminui drasticamente com o aumento do número de onda (Singer; Turkel, 1998; Ihlenburg; Babuška, 1995a). Esse problema é conhecido por efeito de poluição do erro e está relacionado à diferença entre o número de onda k da solução exata e o número de onda k^h da solução numérica.

Para problemas unidimensionais (1D), já existem MEF que eliminam esse efeito, tal como o método GLS (Galerkin-Mínimos Quadrados) apresentado por Harari e Hughes (1991). Para problemas bidimensionais (2D), sabe-se que é impossível eliminar totalmente esse efeito de poluição, como pode ser visto em Babuška e Sauter (1997). Portanto, buscaram-se desenvolver métodos que minimizassem essa poluição do erro, como o Método de Elementos Finitos Quase Estabilizado (QSFEM) descrito por Babuška *et al.* (1995). Entretanto, o QSFEM não é derivado de uma formulação variacional típica do MEF. Logo, não existia um MEF derivado de uma formulação variacional com relação de dispersão equivalente ao QSFEM. Posteriormente, surgiram MEF com a relação de dispersão equivalente à do QSFEM (Alvarez *et al.*, 2006; Loula *et al.*, 2007; Rochinha *et al.*, 2007; Carmo *et al.*, 2008).

Alguns trabalhos têm sido desenvolvidos também com a utilização do MDF, de modo a obter uma melhor qualidade nas soluções. Podemos citar Sutmann (2007) que desenvolveu um novo esquema de sexta ordem; Singer e Turkel (1998) que desenvolveram esquemas de quarta ordem baseados nas generalizações das aproximações de Padé. Nabavi, Siddiqui e Dargahi (2007) desenvolveram um novo esquema compacto de sexta ordem utilizando nove pontos. Wu (2017) desenvolveu um esquema de quarta ordem que minimiza o erro de dispersão, e Wu e Xu (2018) apresentam um esquema de sexta ordem.

No presente trabalho são apresentados o esquema centrado clássico, já bem conhecido da literatura e três novos esquemas de diferenças finitas centrados de segunda ordem de precisão para a equação de Helmholtz em uma e duas dimensões. Esses esquemas são consistentes, ou seja, conforme há o refinamento da malha, a solução numérica tende para solução exata. Os novos esquemas foram obtidos realizando apenas novas aproximações do termo k^2u da equação 1.

O trabalho é organizado da seguinte forma: inicialmente são apresentados os esquemas de diferenças finitas e a análise de dispersão para os casos 1D e 2D. Em sequência, tem-se um breve estudo do erro seguido dos resultados numéricos e discussões. Por fim, tem-se as conclusões.



2 Metodologia

2.1 Materiais

Para a realização deste trabalho foram utilizados dois programas de computador. O *software Mathematica*⁴ foi utilizado para realizar uma parte dos cálculos simbólicos. O *software GNU Octave*⁵ foi utilizado para desenvolver dois códigos computacionais 1D e 2D, os quais permitiram obter os resultados numéricos de todos os esquemas de diferenças finitas analisados neste trabalho.

2.2 Métodos da pesquisa

Foram desenvolvidos novos métodos de diferenças finitas para resolver a equação escalar de Helmholtz unidimensional e bidimensional. Estes métodos foram comparados com o método centrado clássico no que diz respeito à Análise de Dispersão, Erro de Truncamento Local, Erro Global, estabilidade e precisão da solução numérica.

3 Esquemas de Diferenças Finitas em uma e duas Dimensões

Quatro esquemas de diferenças finitas são apresentados, o bem conhecido Centrado Clássico (**CC**) e os novos esquemas: Novo Esquema 1 (**NE-1**), Novo Esquema 2 (**NE-2**) e Novo Esquema 3 (**NE-3**). Todos os novos esquemas são centrados de segunda ordem de precisão, em que a aproximação do termo k^2u na equação de Helmholtz pode ser entendida como uma média da solução em torno do ponto central. A análise realizada aqui apenas considera malhas uniformes, onde $h = \Delta x = \Delta y$ é o espaçamento da malha.

3.1 Em uma Dimensão (1D)

Considere um estêncil clássico de diferenças finitas centradas com 3 pontos. Para todos os esquemas, a derivada segunda foi aproximada com diferenças finitas centradas de segunda ordem de precisão

⁴*Software Mathematica*. Disponível em: <https://www.wolfram.com/mathematica>.

⁵*Software GNU Octave*. Disponível em: <https://www.octave.org>.



$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}, \quad (3)$$

onde $U_{i-1} = U(x_i - h)$, $U_i = U(x_i)$, $U_{i+1} = U(x_i + h)$.

3.1.1 Centrado Clássico (CC)

Neste esquema, o segundo termo da equação de Helmholtz é aproximado na forma clássica $k^2u(x) \approx k^2U_i$. Isso resulta na equação matricial

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + k^2U_i = f_i \text{ ou } \frac{1}{h^2} (AU_{i-1} + BU_i + AU_{i+1}) = f_i, \quad (4)$$

onde $A = 1$ e $B = -2 + (kh)^2$.

3.1.2 Novo Esquema 1 (NE-1)

Neste esquema utilizou-se a aproximação $k^2u(x) \approx k^2\frac{U_{i-1}+U_{i+1}}{2}$, a qual corresponde à média entre os nós adjacentes ao nó central. Isso resulta na equação matricial

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + k^2\left(\frac{U_{i-1} + U_{i+1}}{2}\right) = f_i \text{ ou } \frac{1}{h^2} (AU_{i-1} + BU_i + AU_{i+1}) = f_i, \quad (5)$$

onde $A = 1 + \frac{(kh)^2}{2}$ e $B = -2$.

3.1.3 Novo Esquema 2 (NE-2)

Este esquema consiste na média dos esquemas **CC** e **NE-1**, resultando na equação do estêncil

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + k^2\frac{1}{2}\left(U_i + \frac{U_{i-1} + U_{i+1}}{2}\right) = f_i \text{ ou } \frac{1}{h^2} (AU_{i-1} + BU_i + AU_{i+1}) = f_i, \quad (6)$$

onde $A = 1 + \frac{(kh)^2}{4}$ e $B = -2 + \frac{(kh)^2}{2}$.

3.1.4 Novo Esquema 3 (NE-3)

Este esquema consiste em uma média ponderada dos esquemas **CC** e **NE-1**. O parâmetro livre de ponderação α será determinado pelo critério de minimizar a relação de dispersão da onda



plana. Isso resulta na equação do estêncil

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + k^2 \left[\alpha U_i + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{i+1} + U_{i-1}}{2} \right) \right] = f_i \text{ ou } \frac{1}{h^2} (AU_{i-1} + BU_i + AU_{i+1}) = f_i, \quad (7)$$

com $A = 1 + \frac{(1-\alpha)(kh)^2}{2}$ e $B = -2 + \alpha(kh)^2$.

3.2 Em duas Dimensões (2D)

Considere um estêncil clássico de diferenças finitas centradas com 5 pontos. Analogamente ao caso 1D, para todos os esquemas as derivadas segundas foram aproximadas com diferenças finitas centradas de segunda ordem de precisão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2}. \quad (8)$$

A equação do estêncil clássico de 5 pontos para cada esquema resulta em uma equação matricial do tipo

$$\frac{1}{h^2} (AU_{i-1,j} + AU_{i+1,j} + BU_{i,j} + AU_{i,j-1} + AU_{i,j+1}) = f_{i,j}. \quad (9)$$

3.2.1 Centrado Clássico (CC)

Tem-se a equação do estêncil

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} + k^2 U_{i,j} = f_{i,j}, \quad (10)$$

que pode ser escrita na forma da equação 9 com $A = 1$ e $B = -4 + (kh)^2$.

3.2.2 Novo Esquema 1 (NE-1)

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} + k^2 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{2} \right) + \left(\frac{U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{2} \right) \right] = f_{i,j}, \quad (11)$$

ou na forma da equação 9 com $A = 1 + \frac{(kh)^2}{4}$ e $B = -4$. O fator $\frac{1}{2}$ no segundo termo da equação de Helmholtz é necessário para garantir a consistência do esquema, já que cada dimensão contribui com uma aproximação para $u(x_i, y_j)$.



3.2.3 Novo Esquema 2 (NE-2)

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} + k^2 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(U_{i,j} + \frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(U_{i,j} + \frac{U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{2} \right) \right] = f_{i,j}, \quad (12)$$

ou na forma da equação 9 com $A = 1 + \frac{(kh)^2}{8}$ e $B = -4 + \frac{(kh)^2}{2}$.

3.2.4 Novo Esquema 3 (NE-3)

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} + k^2 \left[\alpha U_{i,j} + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{4} \right) \right], \quad (13)$$

ou na forma da equação 9 com $A = 1 + \frac{(1-\alpha)(kh)^2}{4}$ e $B = -4 + \alpha(kh)^2$.

4 Análise de Dispersão

A diferença entre o número de onda da solução exata (k) e da solução numérica (k^h) pode ser estimada por meio da análise de dispersão. Essa diferença provoca a perda de fase da solução numérica e impacta o efeito de poluição do erro. A análise consiste em considerar a equação de Helmholtz homogênea ($f = 0$) e supor soluções numéricas na forma de ondas planas que, substituídas na equação do estêncil para cada esquema, permite obter uma expressão para k^h (número de onda discreto) em função de k (Fernandes, 2009).

4.1 Caso Unidimensional

Neste caso, a solução numérica na forma $U_i = e^{ik^h x_i}$ é substituída na equação do estêncil 4 obtendo

$$k^h = \frac{1}{h} \arccos \left(-\frac{B}{A} \right). \quad (14)$$



Substituindo os valores de A e B de cada esquema em 14 e realizando a expansão em série de Taylor em torno de $kh = 0$, obtêm-se as expressões $k^h - k$ para cada método.

$$\mathbf{CC}: k^h - k = \frac{1}{24}(k^3h^2) + \frac{3}{640}(k^5h^4) + \mathcal{O}(k^6h^5), \quad (15)$$

$$\mathbf{NE-1}: k^h - k = -\frac{5}{24}(k^3h^2) + \frac{43}{640}(k^5h^4) + \mathcal{O}(k^6h^5), \quad (16)$$

$$\mathbf{NE-2}: k^h - k = -\frac{1}{12}(k^3h^2) + \frac{1}{80}(k^5h^4) + \mathcal{O}(k^6h^5), \quad (17)$$

$$\mathbf{NE-3}: k^h - k = \frac{(-5 + 6\alpha)}{24}(k^3h^2) + \frac{(60\alpha^2 - 100\alpha + 43)}{640}(k^5h^4) + \mathcal{O}(k^6h^5). \quad (18)$$

O parâmetro livre α em **NE-3** pode ser determinado utilizando-se a equação 14 e fazendo $k^h = k$, obtendo

$$\alpha = \frac{2}{kh^2} - \frac{\cos(kh)}{1 - \cos(kh)}. \quad (19)$$

Dessa maneira, tem-se um método que apresenta dispersão de onda plana nula, eliminando assim o efeito de poluição do erro.

4.2 Caso Bidimensional

Neste caso, a onda plana discreta na direção θ é $U_{i,j} = e^{ik^h(x_i \cos \theta + y_j \sin \theta)}$. Substituindo na equação homogênea 9 obtêm-se

$$B + 2A[\cos(k^h h \cos \theta) + \cos(k^h h \sin \theta)] = 0. \quad (20)$$

Substituindo os valores de A e B para cada esquema e realizando a expansão em série de Taylor em torno de $kh = 0$, após algumas manipulações algébricas com o auxílio do *software* Mathematica⁶ obtêm-se

$$\mathbf{CC}: k^h - k = \frac{3 + \cos 4\theta}{96}(k^3h^2) + \frac{235 + 162 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160}(k^5h^4) + \mathcal{O}(k^6h^5), \quad (21)$$

$$\mathbf{NE-1}: k^h - k = \frac{-9 + \cos 4\theta}{96}(k^3h^2) + \frac{1315 - 198 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160}(k^5h^4) + \mathcal{O}(k^6h^5), \quad (22)$$

$$\mathbf{NE-2}: k^h - k = \frac{-3 + \cos 4\theta}{96}(k^3h^2) + \frac{235 + 162 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160}(k^5h^4) + \mathcal{O}(k^6h^5), \quad (23)$$

⁶<https://www.wolfram.com/mathematica>



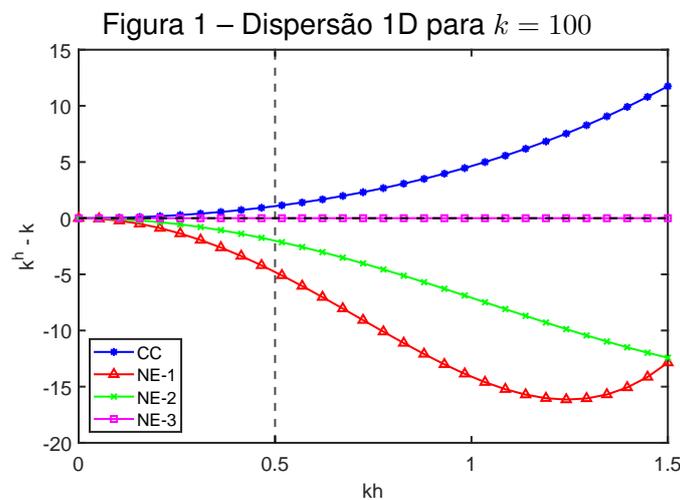
$$\text{NE-3: } k^h - k = \frac{-9 + 12\alpha + \cos 4\theta}{96} (k^3 h^2) + \left(\frac{1315 - 3240\alpha + 2160\alpha^2}{92160} - \frac{-198 \cos 4\theta + 360\alpha \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160} \right) (k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (24)$$

O procedimento para encontrar o parâmetro α no caso 2D é análogo ao caso 1D. Utilizando-se a equação 20 e fazendo $k^h = k$, obtém-se o valor do parâmetro α que minimiza a dispersão,

$$\alpha = \frac{-8 + (4 + k^2 h^2)(u + v)}{k^2 h^2 (-2 + u + v)}, \quad u = \cos(kh \cos(\theta_1)), \quad v = \cos(kh \sin(\theta_1)), \quad (25)$$

onde θ_1 é a direção de onda para a qual a dispersão será nula. A escolha $\theta_1 = \pi/8$ é a que apresenta menor dispersão de onda para qualquer direção θ da onda plana. Isso é, menor distância da dispersão exata.

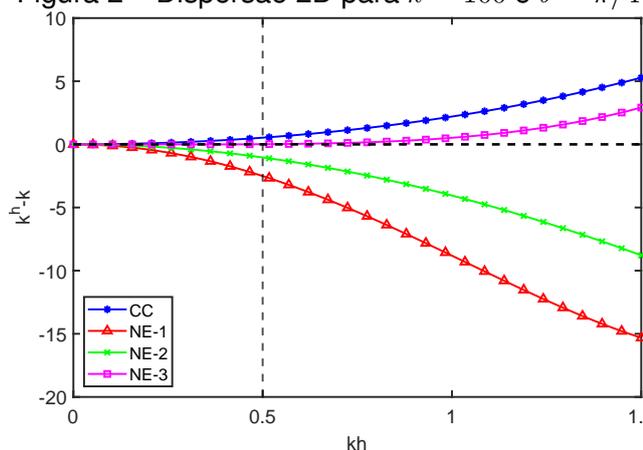
As figuras 1, 2 e 3 mostram que para ambos os casos, 1D e 2D, como esperado, o retardo de fase diminui para malhas mais refinadas. O esquema **NE-3** apresenta melhor performance quando comparado aos esquemas **CC**, **NE-1** e **NE-2**, embora todos apresentem dispersão da mesma ordem ($k^3 h^2$). Entretanto, o esquema **NE-3** apresenta dispersão zero no caso 1D (figura 4.2), e no caso 2D quando a direção da onda plana é $\theta = \pi/8$ (figura 3).



Fonte: Elaboração dos autores.

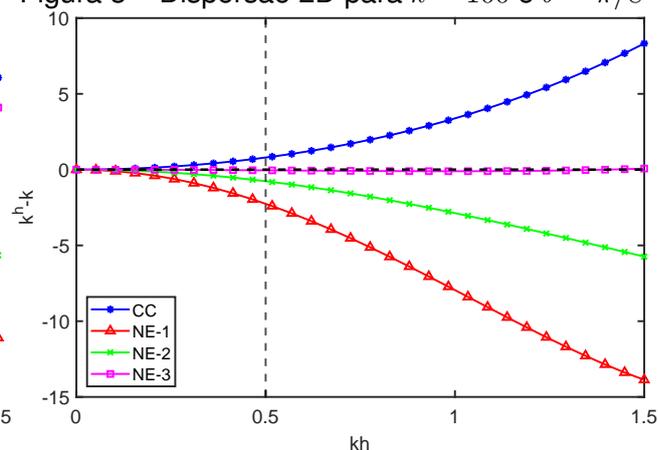


Figura 2 – Dispersão 2D para $k = 100$ e $\theta = \pi/4$



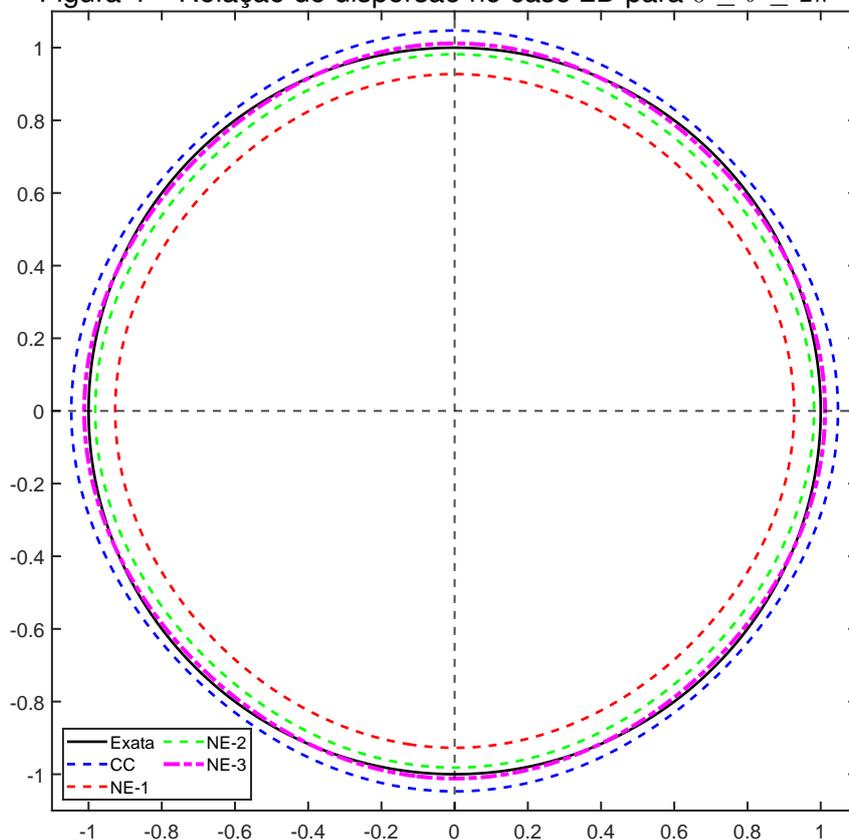
Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 3 – Dispersão 2D para $k = 100$ e $\theta = \pi/8$



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 4 – Relação de dispersão no caso 2D para $0 \leq \theta \leq 2\pi$



Fonte: Elaboração dos autores.

Quando comparamos a relação de dispersão de cada esquema no caso 2D com a dispersão exata na figura 4, podemos observar que o **NE-2** apresentou a menor dispersão para ondas planas na direção $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, e a maior dispersão em $\theta = \pi/4$. O método **CC** apresentou um comportamento contrário ao **NE-2**, exibindo maior dispersão em $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, e a menor



dispersão em $\theta = \pi/4$. A dispersão do **NE-1** apresenta a maior distância da dispersão exata entre todos os esquemas. Por outro lado, a dispersão do **NE-3** apresenta a menor distância da dispersão exata entre todos os esquemas, a qual é zero para ondas planas nas direções $\theta_i = \pi/8 + i\pi/4$ com $i = 0, 1, \dots, 7$. Em outras palavras, o esquema **NE-3** apresenta a menor dispersão possível para um estêncil clássico de diferenças finitas centradas com 5 pontos.

5 Comportamento do Erro

São analisados dois tipos de erro: o Erro de Truncamento Local e o Erro Global. Inicialmente é calculado o Erro de Truncamento Local para cada esquema no caso unidimensional e bidimensional. Posteriormente, é realizado um estudo numérico sobre o comportamento do Erro Global.

5.1 Erro de Truncamento Local

O erro de truncamento local é definido substituindo-se a solução aproximada U pelos valores da solução exata u na equação discretizada de cada esquema. De acordo com LeVeque (2007), em geral, a solução exata não irá satisfazer totalmente a equação e essa discrepância representará o erro de truncamento local (ETL), denotado por τ .

5.1.1 Caso Unidimensional

Usando a notação $u_i^{(n)} = \frac{d^n u(x_i)}{dx^n}$ são obtidos os ETL para cada esquema.

$$\mathbf{CC:} \tau_i = u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} \right) + \mathcal{O}(h^3), \tag{26}$$

$$\mathbf{NE-1:} \tau_i = u_i^{(2)} \left(\frac{h^2}{12} k^2 \right) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{24} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \tag{27}$$

$$\mathbf{NE-2:} \tau_i = u_i^{(2)} \left(\frac{h^2}{4} k^2 \right) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{48} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \tag{28}$$

$$\mathbf{NE-3:} \tau_i = u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} \right) + (1 - \alpha) k^2 \left[u_i^{(2)} \left(\frac{h^2}{2} \right) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^4}{24} \right) \right] + \mathcal{O}(h^5). \tag{29}$$



5.1.2 Caso Bidimensional

Usando a notação $u_{i,j}^{(nx)} = \frac{\partial^n u(x_i, y_j)}{\partial x^n}$ e $u_{i,j}^{(ny)} = \frac{\partial^n u(x_i, y_j)}{\partial y^n}$ são obtidos os ETL para cada esquema.

$$\mathbf{CC}: \tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \mathcal{O}(h^3), \tag{30}$$

$$\mathbf{NE-1}: \tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{4} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{48} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \tag{31}$$

$$\mathbf{NE-2}: \tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{8} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{96} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \tag{32}$$

$$\mathbf{NE-3}: \tau_{i,j} = \left[u^{(4x)} + u^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + (1 - \alpha) k^2 \left\{ \left[u^{(2x)} + u^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{4} \right) + \left[u^{(4x)} + u^{(4y)} \right] \left(\frac{h^4}{48} \right) \right\} + \mathcal{O}(h^5). \tag{33}$$

5.2 Comportamento do Erro Global

Embora ainda não tenham sido obtidas estimativas teóricas para o erro global, podemos mostrar o efeito de poluição do erro com o refinamento da malha para um dado número de onda fixo. É esperado que, se não houvesse o efeito de poluição, o erro diminuiria conforme o refinamento. O erro absoluto apresentado aqui foi calculado utilizando a q -norma

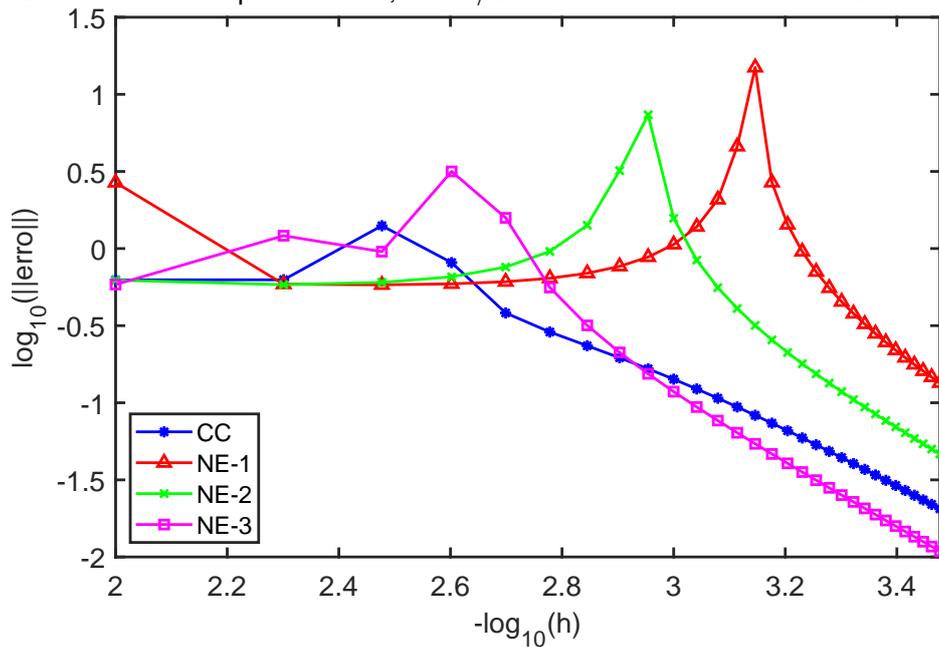
$$\|\text{erro}\|_q = \left(h \sum_{i,j=1}^{N_x, N_y} |e_{i,j}|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{34}$$

onde $e_{i,j} = U_{i,j} - u_{i,j}$, e $q = 2$. Maiores detalhes sobre esta norma podem ser encontrados em LeVeque (2007) (ver a equação A.18 na página 252 do Apêndice A desse livro).

Na figura 5 é possível observar que aumentando-se a quantidade de pontos da malha ($N = N_x \times N_y$) o erro aumenta para certos valores de N (picos) e só após isso temos uma convergência assintótica para a ordem de convergência de cada método. Manter kh constante, como já mencionado, também não é o suficiente para controlar o efeito da poluição do erro, como pode ser visto na figura 6.

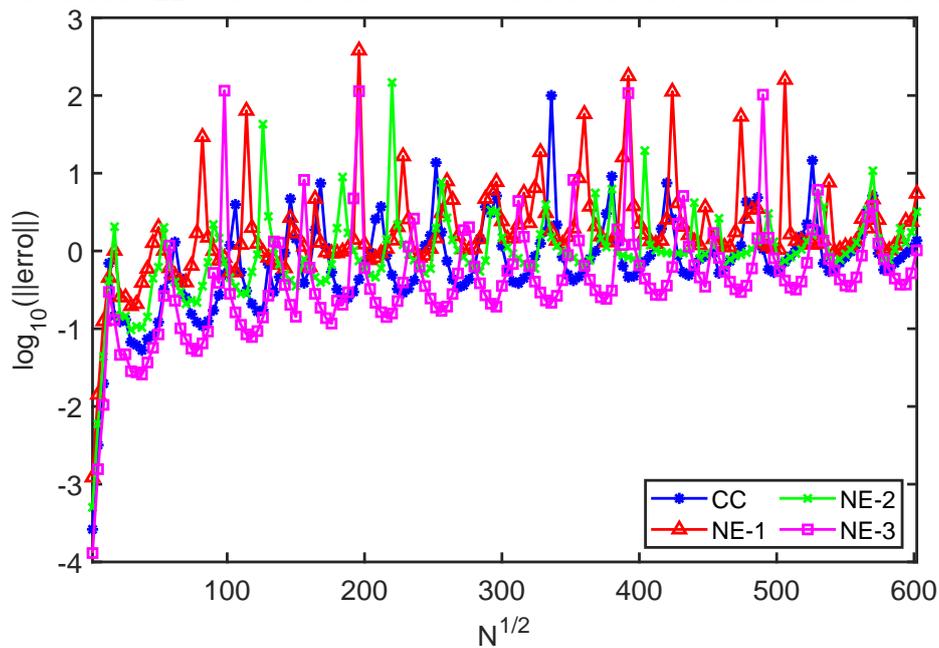


Figura 5 – Erro no caso 2D para $k = 80$, $\theta = \pi/4$ e variando-se N de 100×100 a 3000×3000



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 6 – Erro no caso 2D mantendo-se $kh = 0.5$ constante com k variando de 1 a 300 e $\theta = \pi/4$



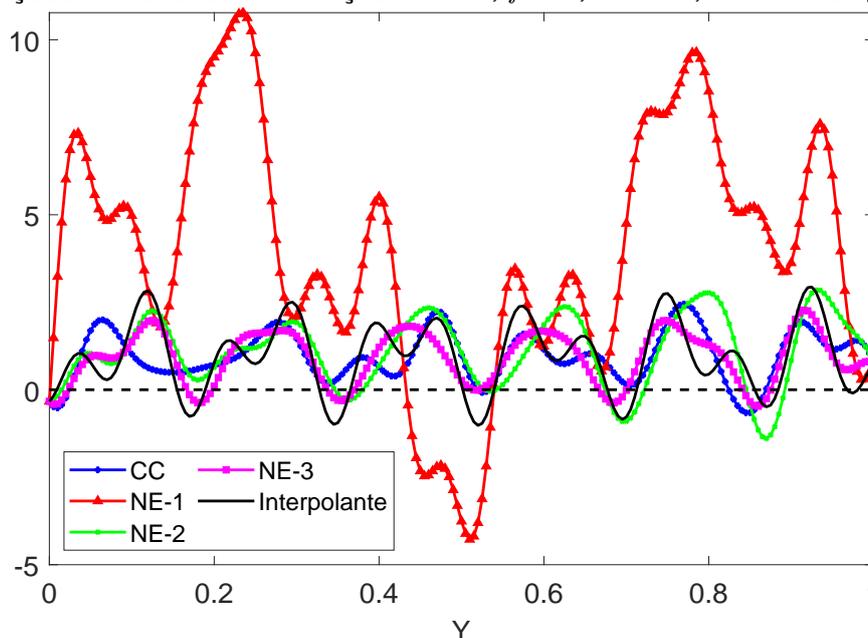
Fonte: Elaboração dos autores.



6 Resultados Numéricos

São apresentados resultados numéricos das equações homogênea e não-homogênea para um domínio quadrado unitário e malha uniforme composta por 200×200 pontos. As figuras 7 e 8 apresentam as soluções dos quatro métodos e o interpolante para a equação homogênea com $k = 100$, $kh = 0.5$ e superposição de três ondas planas nas direções $\theta_i = 0, \pi/4$ e $\pi/8$. Nesse caso, a solução exata $u(x, y) = \sum_{i=1}^n (\cos(k(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)))$ é a superposição de $n = 3$ ondas planas. Nas figuras 9 e 10 considera-se a fonte $f(x, y) = 4 + k^2(x^2 + y^2)$ cuja solução exata é $u(x, y) = x^2 + y^2 + \sin(k(x \cos \theta + y \sin \theta))$. Em ambos casos, homogêneo e não-homogêneo, percebe-se que o método **NE-3** exibe resultados muito próximos do interpolante, apresentando menor retardo de fase e diferença de amplitude que os métodos **CC**, **NE-1** e **NE-2**.

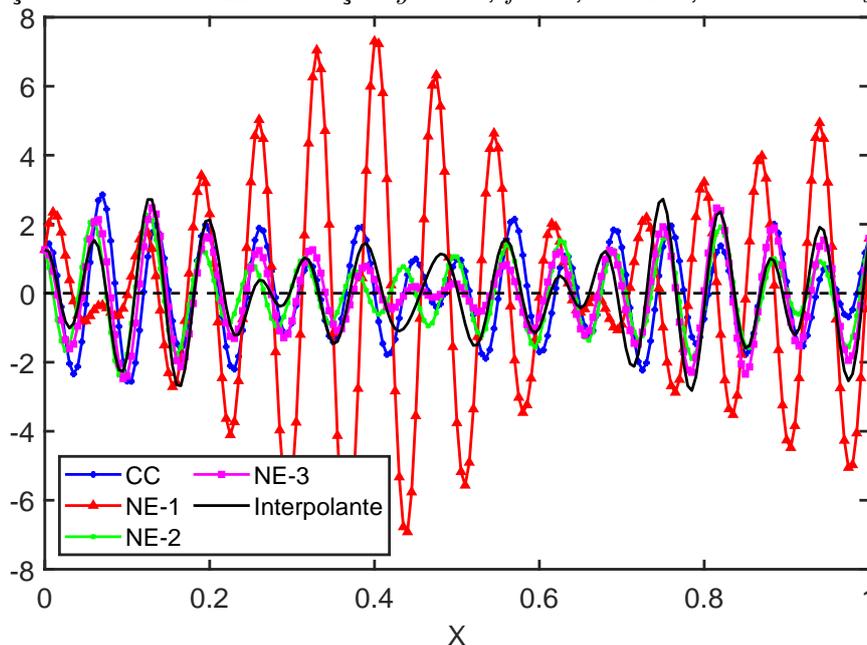
Figura 7 – Soluções numéricas 2D na seção $x = 0.5$, $f = 0$, $k = 100$, $kh = 0.5$ e $\theta_i = \{0, \pi/4, \pi/8\}$



Fonte: Elaboração dos autores.

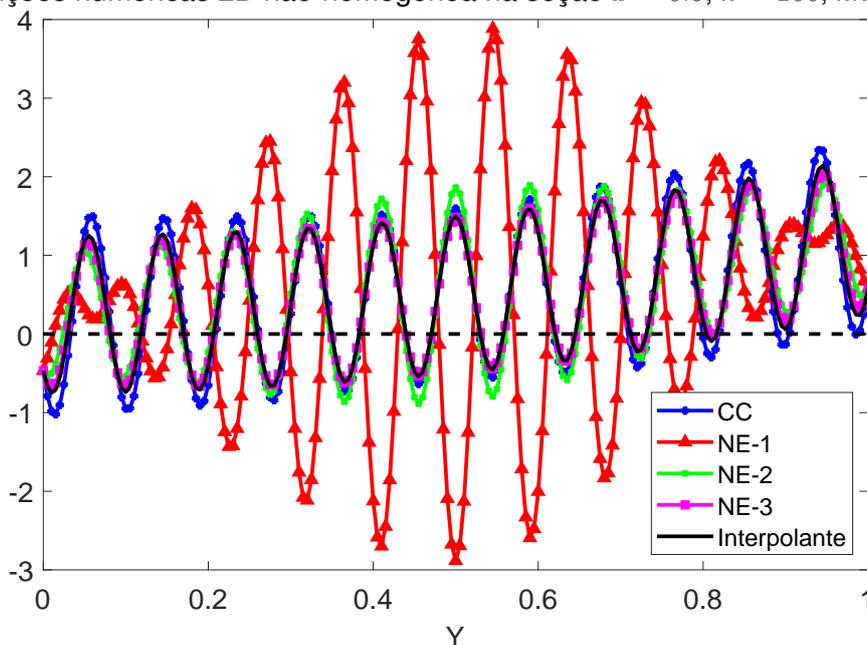


Figura 8 – Soluções numéricas 2D na seção $y = 0.5$, $f = 0$, $k = 100$, $kh = 0.5$ e $\theta_i = \{0, \pi/4, \pi/8\}$



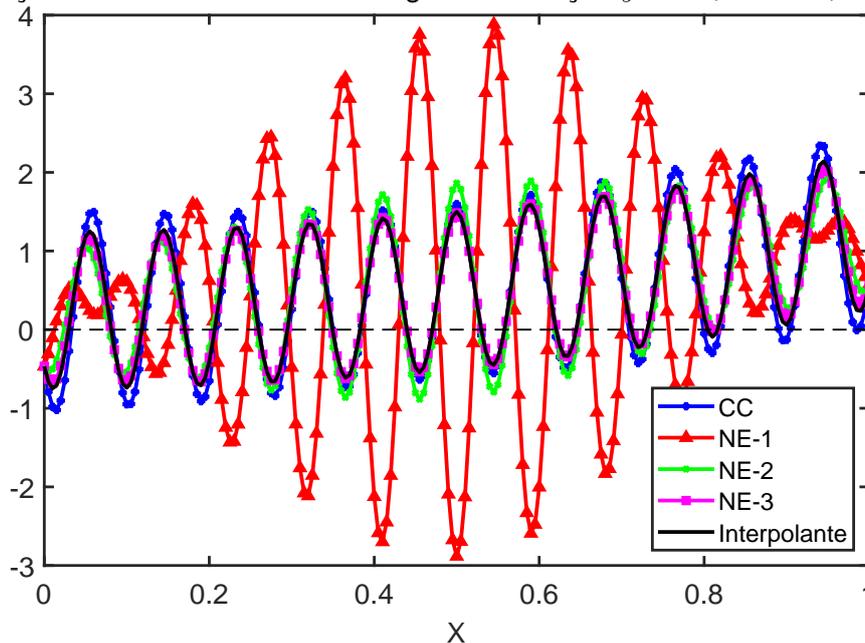
Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 9 – Soluções numéricas 2D não-homogênea na seção $x = 0.5$, $k = 100$, $kh = 0.5$ e $\theta = \pi/4$



Fonte: Elaboração dos autores.



Figura 10 – Soluções numéricas 2D não-homogênea na seção $y = 0.5$, $k = 100$, $kh = 0.5$ e $\theta = \pi/4$ 

Fonte: Elaboração dos autores.

7 Conclusões

Três novos esquemas de diferenças finitas para a equação de Helmholtz foram apresentados. Esses foram obtidos modificando apenas a aproximação para o segundo termo k^2u e possuem um erro de truncamento local de segunda ordem de precisão. As análises de dispersão para os casos 1D e 2D mostraram o bom desempenho dos esquemas **NE-2** e **NE-3**. O efeito de poluição do erro é eliminado completamente no caso 1D pelo esquema **NE-3**. No caso 2D, o esquema **NE-3** apresenta dispersão mínima para o estêncil clássico de diferenças finitas centradas com 5 pontos, sendo zero para ondas planas nas direções $\theta_i = \pi/8 + i\pi/4$ com $i = 0, 1, \dots, 7$. Entretanto, no caso 2D os gráficos dos erros confirmaram a presença do efeito de poluição do erro para todos os métodos, conforme esperado. Os resultados numéricos corroboram o que foi visto nas análises de dispersão, com o novo método **NE-3** apresentando resultados mais próximos aos do interpolante.

Após experiências adquiridas com as análises e os desenvolvimentos apresentados neste trabalho, percebeu-se que seria possível o desenvolvimento de um novo método de diferenças finitas mais estável e preciso. Esse método foi chamado de **Método Completo de Diferenças Finitas Centradas** (*Complete Centered Finite Difference Method*) e apresentado recentemente em Nunes (2024).



Referências

ALVAREZ, Gustavo Benitez; LOULA, Abimael Fernando Dourado; CARMO, Eduardo Gomes Dutra do; ROCHINHA, Fernando Alves. A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Netherlands, v. 195, n. 33-36, p. 4018-4035, July 2006. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2005.07.013>.

BABUŠKA, Ivo; IHLENBURG, Frank; PAIK, Ellen T.; SAUTER, Stefan A.. A Generalized Finite Element Method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Netherlands, v. 128, n. 3-4, p. 325-359, Dec. 1995. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00890-X](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(95)00890-X).

BABUŠKA, Ivo M.; SAUTER, Stefan A.. Is the Pollution Effect of the FEM Avoidable for the Helmholtz Equation Considering High Wave Numbers? **SIAM Journal on Numerical Analysis**, Philadelphia, v. 34, n. 6, p. 2392-2423, 1997. DOI: <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142994269186>.

CARMO, Eduardo Gomes Dutra do; ALVAREZ, Gustavo Benitez; LOULA, Abimael Fernando Dourado; ROCHINHA, Fernando Alves. A nearly optimal Galerkin projected residual finite element method for Helmholtz problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Netherlands, v. 197, n. 13-16, p. 1362-1375, Feb. 2008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.11.001>.

FERNANDES, Daniel Thomes. **Métodos de Diferenças Finitas e Elementos Finitos para o Problema de Helmholtz**. Orientador: Abimael F. D. Loula. 2009. 126 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 2009. Disponível em: <https://tede.lncc.br/handle/tede/98>. Acesso em: 20 jun. 2024.

HARARI, Isaac; HUGHES, Thomas J.R.. Finite element methods for the helmholtz equation in an exterior domain: Model problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Netherlands, v. 87, n. 1, p. 59-96, May 1991. DOI: [http://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90146-W](http://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90146-W).

IHLENBURG, Frank; BABUŠKA, Ivo. Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for the Helmholtz equation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, n. 22, p. 3745-3774, Nov. 1995. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620382203>.

IHLENBURG, Frank; BABUŠKA, Ivo. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part I: The h-version of the FEM. **Computers & Mathematics with Applications**, Netherlands, v. 30, n. 9, p. 9-37, Nov. 1995. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0898-1221\(95\)00144-N](http://dx.doi.org/10.1016/0898-1221(95)00144-N).

LEVEQUE, Randall J.. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems**. Philadelphia: SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 341 p. ISBN 978-0-898716-29-0.

LOULA, Abimael Fernando Dourado; ALVAREZ, Gustavo Benitez; CARMO, Eduardo Gomes Dutra do; ROCHINHA, Fernando Alves. A discontinuous finite element method at element level for Helmholtz equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Netherlands, v. 196, n. 4-6, p. 867-878, Jan. 2007. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2006.07.008>.



NABAVI, Majid; SIDDIQUI, M.H. Kamran; DARGAHI, Javad. A new 9-point sixth-order accurate compact finite-difference method for the Helmholtz equation. **Journal of Sound and Vibration**, Netherlands, v. 307, n. 3-5, p. 972-982, Nov. 2007. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.070>.

NUNES, Helder da Fonseca. **Método Completo de Diferenças Finitas Centradas para a Equação de Helmholtz**. Orientador: Gustavo Benitez Alvarez. Coorientador: Welton Alves de Menezes. 2024. 133 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia) – Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2024. Disponível em: <http://mcct.uff.br/documentos-teses>. Acesso em: 23 jun. 2024.

ROCHINHA, Fernando Alves; ALVAREZ, Gustavo Benitez; CARMO, Eduardo Gomes Dutra do; LOULA, Abimael Fernando Dourado. A locally discontinuous enriched finite element formulation for acoustics. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, United Kingdom, v. 23, n. 6, p. 623-637, June 2007. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/cnm.946>.

SINGER, I.; TURKEL, E.. High-order finite difference methods for the Helmholtz equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Netherlands, v. 163, n. 1-4, p. 343-358, Sept. 1998. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00023-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00023-1).

SUTMANN, Godehard. Compact finite difference schemes of sixth order for the Helmholtz equation. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Netherlands, v. 311, n. 1, p. 15-31, June 2007. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2006.03.008>.

WU, Tingting. A dispersion minimizing compact finite difference scheme for the 2D Helmholtz equation. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Netherlands, v. 203, p. 497-512, Feb. 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.08.018>.

WU, Tingting; XU, Ruimin. An optimal compact sixth-order finite difference scheme for the Helmholtz equation. **Computers & Mathematics with Applications**, Netherlands, v. 75, n. 7, p. 2520-2537, Apr. 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2017.12.023>.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, e dedicam este trabalho ao povo brasileiro.

