

# Sobre conjuntos parcialmente ordenados

## About partially ordered sets

### Acerca de los conjuntos parcialmente ordenados

Wállace Mangueira de Sousa<sup>1</sup>

Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, PB, Brasil



<https://orcid.org/0000-0003-0894-9555>,



<http://lattes.cnpq.br/4079181802341367>

**Resumo:** Durante as aulas, é comum surgirem questionamentos curiosos sobre o conteúdo apresentado. Este artigo foi motivado pelas seguintes perguntas: Ao considerar um conjunto finito  $U$  munido de uma ordem parcial  $G \subseteq U \times U$ , qual seria a maior (e menor) quantidade de elementos em  $G$ ? Existe uma relação entre essa quantidade de elementos e a característica do par  $(U, G)$  ser um conjunto totalmente ordenado? Este artigo demonstra que  $(U, G)$  é totalmente ordenado se, e somente se,  $(U, G)$  é parcialmente ordenado e  $G$  possui  $n(n+1)/2$  elementos, sendo  $n$  a quantidade de elementos em  $U$ .

**Palavras-chave:** conjunto parcialmente ordenado; conjunto totalmente ordenado; conjunto finito.

**Abstract:** During classes, it's common for intriguing questions to arise regarding the presented content. This article was prompted by the following inquiries: Considering a finite set  $U$  equipped with a partial order  $G \subseteq U \times U$ , what would be the largest (and smallest) number of elements in  $G$ ? Is there a relationship between this quantity of elements and the nature of the pair  $(U, G)$  as a totally ordered set? This article demonstrates that  $(U, G)$  is totally ordered if, and only if,  $(U, G)$  is partially ordered and  $G$  contains  $n(n+1)/2$  elements, where  $n$  represents the cardinality of  $U$ .

**Keywords:** partially ordered set; totally ordered set; finite set.

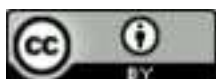
**Resumen:** Durante las clases, es común que surjan preguntas intrigantes sobre el contenido presentado. Este artículo fue motivado por las siguientes preguntas: Al considerar un conjunto finito  $U$  equipado con un orden parcial  $G \subseteq U \times U$ , ¿cuál sería la mayor (y menor) cantidad de elementos en  $G$ ? ¿Existe alguna relación entre esta cantidad de elementos y la naturaleza del par  $(U, G)$  como un conjunto totalmente ordenado? Este artículo demuestra que  $(U, G)$  está totalmente ordenado si, y solo si,  $(U, G)$  está parcialmente ordenado y  $G$  contiene  $n(n+1)/2$  elementos, donde  $n$  representa la cantidad de elementos en  $U$ .

**Palabras clave:** conjunto parcialmente ordenado; conjunto totalmente ordenado; conjunto finito.

**Data de submissão:** 13 de dezembro de 2023.

**Data de aprovação:** 5 de fevereiro de 2024.

<sup>1</sup>**Currículo sucinto:** Bacharele mestre em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba e doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal da Paraíba. **Contribuição de autoria:** escrita – primeira redação, escrita – revisão e edição, investigação, metodologia. **Contato:** wallace.mangueira@academico.ufpb.br.



## 1 Introdução

Se  $U$  é um conjunto finito, então podemos definir uma bijeção entre  $U$  e um subconjunto finito dos números naturais e, assim, induzir uma ordem em  $U$  de forma que  $U$  seja um conjunto totalmente ordenado. Mais geralmente, pelo Princípio da Boa Ordenação, qualquer conjunto pode ser bem ordenado e, em particular, possuir uma ordem total (O'Connor; Robertson, 1996).

Considere  $U$  um conjunto finito e  $G \subseteq U \times U$  um gráfico. Desejamos saber qual é o maior (e o menor) número de elementos que  $G$  deve conter para que  $(U, G)$  seja um conjunto parcialmente ordenado. Além disso, sabendo que  $(U, G)$  é um conjunto parcialmente ordenado, queremos determinar a quantidade de elementos que  $G$  deve ter para que  $(U, G)$  seja totalmente ordenado.

Na Seção 2, é apresentada uma revisão sobre conjuntos parcialmente ordenados, determinando o número de relações entre os elementos de alguns conjuntos parcialmente ordenados. Ao final, conclui-se que, para  $(U, G)$  um conjunto parcialmente ordenado geral, a quantidade de elementos de  $G$  pode variar.

A Seção 3 revisa o conceito de conjunto totalmente ordenado. Ao contrário do que ocorre geralmente com conjuntos parcialmente ordenados, no Teorema 3.3 é demonstrado que se  $(U, G)$  é um conjunto totalmente ordenado, a quantidade de elementos de  $G$  não se altera.

Espera-se que o leitor tenha conhecimento de algumas propriedades/definições básicas de Teoria dos Conjuntos, como por exemplo: para quaisquer dois conjuntos  $A$  e  $B$ , o conjunto  $A \times B$  é o produto cartesiano de  $A$  por  $B$ , definido por  $A \times B := \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}$ , sendo  $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ; se  $(a, b), (c, d) \in A \times B$  satisfazem  $(a, b) = (c, d)$ , então  $a = c$  e  $b = d$ ; qualquer subconjunto de  $A \times B$  é chamado de gráfico de  $A$  em  $B$  (Halmos, 1960; Hrbacek; Jech, 1999).

## 2 Conjunto parcialmente ordenado

Nesta seção, relembremos a definição de conjunto parcialmente ordenado e calculamos a quantidade de relações que os elementos desse conjunto parcialmente ordenado possuem, utilizando alguns exemplos.

Sejam  $U$  um conjunto e  $G \subseteq U \times U$  um gráfico quaisquer. Dizemos que  $G$  define uma relação de ordem (parcial) em  $U$  se



1. Para todo  $x \in U$ , temos que  $(x, x) \in G$ ;
2. Para todos  $x, y \in U$ , se  $(x, y), (y, x) \in G$ , então  $x = y$ ;
3. Para todos  $x, y, z \in U$ , se  $(x, y), (y, z) \in G$ , então  $(x, z) \in G$ .

Neste caso, dizemos que o par  $(U, G)$  é um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que  $x, y \in U$  se relacionam (via  $G$ ) se  $(x, y) \in G$  ou  $(y, x) \in G$ .

Para o restante do texto, considere  $N_G(U) := \#G$ . Isto é,  $N_G(U)$  é o número de relações entre os elementos de  $U$  com respeito a  $G$ .

**Exemplo 2.1.** Considere  $U$  um conjunto e  $D \subseteq U \times U$  o gráfico diagonal (ou gráfico identidade), ou seja,  $D := \{(a, b) \in U \times U; a = b\}$ . Não é difícil verificar que o par  $(U, D)$  é um conjunto parcialmente ordenado e que  $N_D(U) = \#U$ .

**Exemplo 2.2.** Sejam  $U$  um conjunto finito com  $n$  elementos,  $\mathcal{P}(U) := \{X; X \subseteq U\}$  o conjunto das partes de  $U$  e  $G := \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U); X \subseteq Y\}$  a relação definida pela inclusão de conjuntos. Neste caso, o par  $(\mathcal{P}(U), G)$  é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, notemos que para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathcal{P}(U)$  temos que:

- (i)  $X \subseteq X$ ;
- (ii) Se  $X \subseteq Y$  e  $Y \subseteq X$ , então  $X = Y$ ;
- (iii) Se  $X \subseteq Y$  e  $Y \subseteq Z$ , então  $X \subseteq Z$ .

**Proposição 2.3.** Considere a notação do Exemplo 2.2. Então,  $N_G(U) = \sum_{i=0}^n 2^i \cdot \binom{n}{i}$ .

**Prova.** Vamos analisar primeiro o caso em que  $U = \{a, b, c\}$  contém apenas 3 elementos. Neste caso, vamos fixar um conjunto  $Y$  com  $i$  elementos e contar todos os pares da forma  $(X, Y)$  que pertencem a  $G$ , ou seja, contar todos os conjuntos  $X$  tais que  $X \subseteq Y$ . Mostraremos, logo abaixo, todas as possibilidades para este caso:

Se  $\#Y = 0$ , então temos apenas  $(\emptyset, \emptyset) \in G$ .

Se  $\#Y = 1$ , então

- (i)  $(\emptyset, \{a\}), (\{a\}, \{a\}) \in G$ , para o conjunto  $\{a\}$ ;
- (ii)  $(\emptyset, \{b\}), (\{b\}, \{b\}) \in G$ , para o conjunto  $\{b\}$ ;



(iii)  $(\emptyset, \{c\}), (\{c\}, \{c\}) \in G$ , para o conjunto  $\{c\}$ .

Se  $\#Y = 2$ , então

(iv)  $(\emptyset, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, b\}) \in G$ , para o conjunto  $\{a, b\}$ ;

(v)  $(\emptyset, \{b, c\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{c\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, \{b, c\}) \in G$ , para o conjunto  $\{b, c\}$ ;

(vi)  $(\emptyset, \{a, c\}), (\{a\}, \{a, c\}), (\{c\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{a, c\}) \in G$ , para o conjunto  $\{a, c\}$ .

Se  $\#Y = 3$ , então  $(\emptyset, \{a, b, c\}), (\{a\}, \{a, b, c\}), (\{b\}, \{a, b, c\}), (\{c\}, \{a, b, c\}), (\{a, b\}, \{a, b, c\}), (\{a, c\}, \{a, b, c\}), (\{b, c\}, \{a, b, c\}), (\{a, b, c\}, \{a, b, c\}) \in G$ , para o conjunto  $\{a, b, c\}$ .

No caso geral, basta notar que existem  $2^i$  pares  $(X, Y) \in G$  para cada  $Y$  com  $i$  elementos e que existem  $\binom{n}{i}$  subconjuntos de  $U$  com  $i$  elementos.

**Exemplo 2.4.** Sejam  $U := \{1, 2, \dots, n\}$  e  $G := \{(a, b) \in U \times U; a \mid b\}^1$ . Então o par  $(U, G)$  é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, notemos que para quaisquer  $a, b, c \in U$

(i)  $a \mid a$ ;

(ii) Se  $a \mid b$  e  $b \mid a$ , então  $b = a$ ;

(iii) Se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então  $a \mid c$ .

**Proposição 2.5.** Considere a notação do Exemplo 2.4. Então  $N_G(U) = \sum_{i=1}^n \phi(i)$ , no qual  $\phi(k)$  representa o número de divisores positivos de  $k$ .

**Prova.** Vamos analisar primeiro o caso em que  $n = 6$ , ou seja,  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Neste caso, vamos fixar um número  $k$  e contar todos os pares da forma  $(a, k)$  que pertencem a  $G$ , ou seja, contar dos os números  $a$  tais que  $a \mid k$ . Mostraremos, logo abaixo, todas as possibilidades para este caso:

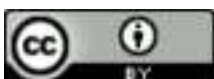
Se  $k = 1$ , então temos apenas  $(1, 1) \in G$ .

Se  $k = 2$ , então  $(1, 2), (2, 2) \in G$ .

Se  $k = 3$ , então  $(1, 3), (3, 3) \in G$ .

Se  $k = 4$ , então  $(1, 4), (2, 4), (4, 4) \in G$ .

<sup>1</sup> $a \mid b$  significa,  $a$  divide  $b$ .



Se  $k = 5$ , então  $(1, 5), (5, 5) \in G$ .

Se  $k = 6$ , então  $(1, 6), (2, 6), (3, 6), (6, 6) \in G$ .

No caso geral, basta notar que em cada etapa estamos somando a quantidade dos divisores positivos do número  $k$ .

**Exemplo 2.6.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos e  $G_A \subseteq A \times A$  e  $G_B \subseteq B \times B$  tais que  $(A, G_A)$  e  $(B, G_B)$  são conjuntos parcialmente ordenados. Considere a seguinte relação sobre  $A \times B$ , definida por  $G_{A \times B} := \left\{ ((a, b), (a', b')) \in (A \times B) \times (A \times B); (a, a') \in G_A \text{ e } (b, b') \in G_B \right\}$ . O par  $(A \times B, G_{A \times B})$  é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, notemos que:

- (i) Para quaisquer  $a \in A$  e  $b \in B$ , segue que  $(a, a) \in G_A$  e  $(b, b) \in G_B$ . Portanto,  $((a, b), (a, b)) \in G_{A \times B}$  para quaisquer  $a \in A$  e  $b \in B$ ;
- (ii) Se  $((a, b), (a', b')), ((a', b'), (a, b)) \in G_{A \times B}$ , então  $(a, a'), (a', a) \in G_A$  e  $(b, b'), (b', b) \in G_B$ . Logo,  $a = a'$  e  $b = b'$ . Portanto,  $(a, b) = (a', b')$ ;
- (iii) Se  $((a, b), (c, d)), ((c, d), (e, f)) \in G_{A \times B}$ , então  $(a, c), (c, e) \in G_A$  e  $(b, d), (d, f) \in G_B$ . Logo,  $(a, e) \in G_A$  e  $(b, f) \in G_B$ . Portanto,  $((a, b), (e, f)) \in G_{A \times B}$ .

**Proposição 2.7.** Considere a notação do Exemplo 2.6. Então  $N_{G_{A \times B}}(A \times B) = N_{G_A}(A) \cdot N_{G_B}(B)$ .

**Prova.** Basta notar que para cada  $(a, a') \in G_A$ , existem  $N_{G_B}(B)$  elementos  $(b, b') \in G_B$  tais que  $((a, b), (a', b')) \in G_{A \times B}$  e, assim, usar o princípio fundamental da contagem.

**Exemplo 2.8.** Sejam  $A$  um conjunto finito,  $(B, G_B)$  um conjunto finito parcialmente ordenado e  $B^A$  o conjunto de todas as funções de  $A$  em  $B$ , ou seja,  $B^A := \{f : A \rightarrow B; f \text{ é uma função}\}$ . Considere a relação  $G_{B^A} := \{(f, g) \in B^A \times B^A; (f(x), g(x)) \in G_B \text{ para todo } x \in A\}$ . O par  $(B^A, G_{B^A})$  é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, para quaisquer  $f, g, h \in B^A$  temos que

- (i)  $(f, f) \in G_{B^A}$ , pois  $(f(x), f(x)) \in G_B$  para todo  $x \in A$ ;
- (ii) Se  $(f, g), (g, f) \in G_{B^A}$ , então  $(f(x), g(x)), (g(x), f(x)) \in G_B$  para todo  $x \in A$ . Logo,  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ . Portanto,  $f = g$ ;
- (iii) Se  $(f, g), (g, h) \in G_{B^A}$ , então  $(f(x), g(x)), (g(x), h(x)) \in G_B$  para todo  $x \in A$ . Logo,  $(f(x), h(x)) \in G_B$  para todo  $x \in A$ . Portanto,  $(f, h) \in G_{B^A}$ .

**Proposição 2.9.** Considere a notação do Exemplo 2.8. Então  $N_{G_{B^A}}(B^A) = N_{G_B}(B)^{\#A}$ .



**Prova.** Primeiramente notemos que se  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  é um conjunto com  $n$  elementos então existe uma bijeção  $F : B^A \rightarrow B \times \dots \times B$ , dada por  $F(f) := (f(a_1), \dots, f(a_n))$ . Além disso, temos que  $(f, g) \in G_{BA}$  se, e somente se,  $\left( (f(a_1), \dots, f(a_n)), (g(a_1), \dots, g(a_n)) \right) \in G_{B \times \dots \times B}$  (ordem no produto cartesiano definido no Exemplo 2.6). Portanto,  $N_{G_{BA}}(B^A) = N_{G_{B \times \dots \times B}}(B \times \dots \times B) = N_{G_B}(B)^{\#A}$ .

Ao analisar brevemente o exposto anteriormente, concluímos que o número de elementos de  $G$  pode variar considerando apenas o fato de que o par  $(U, G)$  é um conjunto parcialmente ordenado. Na próxima seção, especificamente no Teorema 3.3, é demonstrado que a quantidade de elementos de  $G$  permanece inalterada se  $(U, G)$  for um conjunto totalmente ordenado.

### 3 Conjunto totalmente ordenado

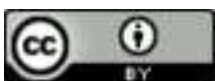
Sejam  $(U, G)$  um conjunto parcialmente ordenado e  $B \subseteq U$ . Não é difícil verificar que o gráfico  $G|_B := \{(x, y) \in G; x, y \in B\}$  define uma relação de ordem em  $B$ . Em outras palavras, o par  $(B, G|_B)$  é um conjunto parcialmente ordenado. Agora, caso todos os pares de elementos de  $B$  se relacionam (via  $G|_B$ ), ou seja, para quaisquer  $x, y \in B$  temos que  $(x, y) \in G|_B$  ou  $(y, x) \in G|_B$ , então dizemos que  $B$  é uma cadeia em  $(U, G)$ . Denominamos  $(U, G)$  como um conjunto totalmente ordenado se  $U$  for uma cadeia nele próprio.

**Exemplo 3.1.** Sejam  $U = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $G := \{(a, b) \in U \times U; a \mid b\}$  (do Exemplo 2.4). Para  $n \geq 3$ , o par  $(U, G)$  não é totalmente ordenado. Por outro lado, se  $k$  é um inteiro positivo tal que  $2^k \leq n$ , então  $B_k = \{1, 2, 4, \dots, 2^k\}$  é uma cadeia em  $(U, G)$ .

**Exemplo 3.2.** Considere  $U = \{1, \dots, n\}$  e  $G = \{(a, b) \in U \times U; a \leq b\}$  a relação de ordem usual. Não é difícil verificar que o par  $(U, G)$  é um conjunto totalmente ordenado.

#### 3.1 Totalmente ordenado versus quantidade de relações

Como foi discutido na seção anterior, não é intuitivo determinar o número de relações entre os elementos de um conjunto finito parcialmente ordenado sabendo apenas a quantidade de elementos deste conjunto. O Teorema 3.3 indica o intervalo no qual essa quantidade pode variar. Além disso, o referido teorema estabelece uma caracterização dos conjuntos totalmente ordenados com base na quantidade dessas relações.



**Teorema 3.3.** *Sejam  $U$  um conjunto com  $n$  elementos e  $G \subseteq U \times U$ . Se  $(U, G)$  é um conjunto parcialmente ordenado, então  $n \leq N_G(U) \leq n(n + 1)/2$ . Mais ainda,  $(U, G)$  é totalmente ordenado se, e somente se,  $(U, G)$  é parcialmente ordenado e  $N_G(U) = n(n + 1)/2$ .*

**Prova.** *A primeira desigualdade segue do fato de que  $(a, a) \in G$  para todo  $a \in U$ . A última desigualdade pode ser obtida da seguinte forma: o número máximo de relações que elementos distintos de um conjunto parcialmente ordenado pode ser interpretado como o número de escolhas de 2 elementos (sem importar a ordem) num conjunto de  $n$  possibilidades. Assim, existem  $n(n - 1)/2$  tais escolhas. Somando com as  $n$  relações do tipo  $(x, x)$ , temos um total de  $n + n(n - 1)/2 = n(n + 1)/2$  relações possíveis dos elementos de  $U$ . Para a segunda afirmação, podemos supor que  $\#U = n \geq 2$ . Neste caso, considere  $D = \{(a, b) \in U \times U; a = b\}$  o gráfico diagonal e  $Set_2(U) = \{X \subseteq U; \#X = 2\}$ . Assim, se  $(U, G)$  é parcialmente ordenado, então a função  $f : G \setminus D \rightarrow Set_2(U)$  dada por  $f((x, y)) = \{x, y\}$  está bem definida e é injetora. Além disso, o par  $(U, G)$  é totalmente ordenado se, e somente se,  $(U, G)$  é parcialmente ordenado e  $f$  é bijetora. E isto ocorre se, e somente se,  $(U, G)$  é parcialmente ordenado e  $\#G \setminus D = \#Set_2(U) = n(n - 1)/2$ .*

O Teorema 3.3 garante que a quantidade de relações entre os elementos de um conjunto finito totalmente ordenado é um invariante, ou seja, se  $(U, G_1)$  e  $(U, G_2)$  são conjuntos totalmente ordenados, então  $N_{G_1}(U) = N_{G_2}(U)$ . Logo, é possível concluir que se  $U$  é um conjunto com  $n$  elementos, então existem no máximo  $\binom{n^2}{n(n+1)/2}$  subconjuntos  $G \subset U \times U$  tais que  $(U, G)$  é um conjunto totalmente ordenado.

Os dois lemas subsequentes, essenciais para os próximos resultados, serão demonstrados utilizando o Princípio de Indução Finita.

**Lema 3.4.** *Sejam  $m$  e  $n$  inteiros tais que  $n, m > 1$ . Então  $nm + 1 > n + m$ .*

**Prova.** *Vamos mostrar, por indução em  $n$ , que  $nm + 1 > n + m$  para  $m$  qualquer ( $m \geq 2$ ).*

Caso base: *Suponhamos que  $n = 2$ ,  $m$  é qualquer. É claro que  $2m + 1 > 2 + m$ .*

Hipótese de Indução: *Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $n = k \geq 2$  e  $m$  qualquer, ou seja, suponhamos que  $km + 1 > k + m$  para  $m$  qualquer. Se a afirmação não vale para  $n = k + 1$ , ou seja,  $(k + 1)m + 1 \leq (k + 1) + m$  para  $m$  qualquer, segue que*

$$(k + 1)m + 1 \leq (k + 1) + m \implies (k + 1)m + 1 < km + 1 + 1 \implies$$

$$m + 1 < 2 \implies m < 1, \text{ o que é absurdo!}$$



Desta forma, temos que  $(k + 1)m + 1 > (k + 1) + m$ . Portanto,  $nm + 1 > n + m$  para quaisquer números inteiros  $n$  e  $m$  tais que  $n, m > 1$ .

**Lema 3.5.** *Sejam  $m$  e  $n$  números inteiros tais que  $m, n > 1$ . Então  $2^{n-1}(m^n + 1) > (m + 1)^n$ .*

**Prova.** *Vamos mostrar, por indução em  $n$ , que  $2^{n-1}(m^n + 1) > (m + 1)^n$  para  $m$  qualquer ( $m \geq 2$ ).*

Caso base: *Suponhamos que  $n = 2$ ,  $m$  inteiro qualquer ( $m \geq 2$ ) e, por absurdo, que vale  $2(m^2 + 1) \leq (m + 1)^2$ . Assim,  $2m^2 + 2 \leq m^2 + m + 1$  e, conseqüentemente,  $m^2 + 1 \leq 2m$ . E isto é um absurdo, visto que  $m \geq 2$ . Desta forma, concluímos que  $2(m^2 + 1) > (m + 1)^2$ .*

Hipótese de Indução: *Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $n = k \geq 2$  e  $m$  qualquer, ou seja, suponhamos que  $2^{k-1}(m^k + 1) > (m + 1)^k$  para  $m$  qualquer. Agora, suponhamos que  $2^k(m^{k+1} + 1) \leq (m + 1)^{k+1}$  para  $m$  qualquer. Assim,*

$$2^k(m^{k+1} + 1) \leq (m + 1)^{k+1} \implies 2^k(m^{k+1} + 1) < (m + 1) \cdot 2^{k-1}(m^k + 1) \implies$$

$$2(m^{k+1} + 1) < (m + 1)(m^k + 1) \implies m^{k+1} + 1 < m^k + m \implies$$

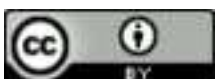
$$m(m^k - m^{k-1} - 1) + 1 < 0 \implies m^k - m^{k-1} < 1 \implies$$

$$m^{k-1}(m - 1) < 0 \implies m < 1, \text{ o que é absurdo.}$$

Desta forma, temos que  $2^k(m^{k+1} + 1) > (m + 1)^{k+1}$ . Portanto,  $2^{n-1}(m^n + 1) > (m + 1)^n$  para quaisquer números inteiros  $n$  e  $m$  tais que  $n, m > 1$ .

**Corolário 3.6.** *Considere a notação do Exemplo 2.6. O par  $(A \times B, G_{A \times B})$  é um conjunto totalmente ordenado se, e somente se,  $A$  é unitário e  $(B, G_B)$  é totalmente ordenado ou  $B$  é unitário e  $(A, G_A)$  é totalmente ordenado.*

**Prova.** *Suponhamos que  $A$  tem  $n$  elementos e que  $B$  tem  $m$  elementos. O par  $(A \times B, G_{A \times B})$  é um conjunto totalmente ordenado se  $N_{G_{A \times B}} = nm(nm + 1)/2$ , ou seja,  $N_{G_A}(A) \cdot N_{G_B}(B) = nm(nm + 1)/2$ . Por outro lado, temos que  $N_{G_A}(A) \cdot N_{G_B}(B) \leq (n(n + 1)/2) \cdot (m(m + 1)/2)$ . Desta forma, temos que  $nm(nm + 1)/2 \leq (n(n + 1)/2) \cdot (m(m + 1)/2)$ . Isto implica que  $nm + 1 \leq n + m$  e, conseqüentemente,  $n = 1$  ou  $m = 1$  (pelo Lema 3.4). Se  $n = 1$ , então  $N_{G_A}(A) = 1$  e a igualdade  $N_{G_A}(A) \cdot N_{G_B}(B) = N_{G_{A \times B}} = nm(nm + 1)/2$  garante que  $N_{G_B}(B) = m(m + 1)/2$ , ou seja,  $A$  é um conjunto unitário e  $(B, G_B)$  é um conjunto totalmente ordenado. Analogamente, se  $m = 1$ , então  $B$  é um conjunto unitário e  $(A, G_A)$  é um conjunto totalmente ordenado. A recíproca segue trivialmente.*



**Corolário 3.7.** *Considere a notação do Exemplo 2.8. O par  $(B^A, G_{B^A})$  é um conjunto totalmente ordenado se, e somente se,  $A$  é um conjunto unitário e  $(B, G_B)$  é totalmente ordenado ou  $B$  é um conjunto unitário.*

**Prova.** *Suponhamos que  $A$  tem  $n$  elementos e que  $B$  tem  $m$  elementos. O par  $(B^A, G_{B^A})$  é um conjunto totalmente ordenado se  $N_{G_{B^A}}(B^A) = m^n(m^n + 1)/2$ , ou seja,  $(N_{G_B}(B))^n = m^n(m^n + 1)/2$ . Por outro lado, temos que  $(N_{G_B}(B))^n \leq (m(m+1)/2)^n$ . Desta forma, temos a seguinte desigualdade  $m^n(m^n + 1)/2 \leq (m(m+1)/2)^n$ . Isto implica que  $2^{n-1}(m^n + 1) \leq (m+1)^n$ . Notemos que esta última desigualdade é verdadeira se  $n = 1$  e  $m$  qualquer ou  $n$  qualquer e  $m = 1$ . Além disso, o Lema 3.5 mostra que fora desses casos esta última desigualdade é falsa. Assim, se  $A$  é um conjunto unitário, temos que  $(N_{G_B}(B))^1 = m^1(m^1 + 1)/2$  e, portanto,  $(B, G_B)$  é um conjunto totalmente ordenado.*

**Exemplo 3.8.** *Considere  $U = \{1, \dots, n\}$  e  $G = \{(a, b) \in U \times U; a \leq b\}$  a relação de ordem usual. Como o par  $(U, G)$  é totalmente ordenado (ver Exemplo 3.2), segue que  $N_G(U) = n(n+1)/2$ . Por outro lado, notemos que para cada  $i \in U$ , a quantidade de elementos da forma  $(a, i) \in G$  é  $i$ . Segue que  $1 + 2 + \dots + i + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , a qual é uma expressão já conhecida.*

A seguir, apresentam-se dois problemas que surgiram durante a elaboração deste material e cujas soluções são desconhecidas pelo autor.

**Problema 3.9.** *Seja  $U$  um conjunto finito com  $n$  elementos. Para quais inteiros  $s$ , com  $n \leq s \leq n(n+1)/2$ , existe um gráfico  $G(s) \subset U \times U$  tal que o par  $(U, G(s))$  é um conjunto parcialmente ordenado e  $N_{G(s)}(U) = s$ ?*

**Problema 3.10.** *Seja  $U$  um conjunto finito. Existem quantos gráficos  $G \subset U \times U$  tais que  $(U, G)$  é um conjunto parcialmente (ou totalmente) ordenado?*

#### 4 Considerações finais

O texto oferece uma breve explanação sobre conjuntos parcialmente ordenados finitos, demonstrando, por meio de exemplos, como calcular o número de relações entre os elementos desses conjuntos em relação a uma ordem parcial específica. Destaca-se que foi identificado um intervalo, determinado exclusivamente em função da cardinalidade do conjunto, no qual o número de tais relações pode variar. O Teorema 3.3 estabelece que se um conjunto parcialmente ordenado tiver cardinalidade  $n$ , com  $n(n+1)/2$  relações entre seus elementos, então este conjunto é totalmente



ordenado. Vale ressaltar que o texto apresenta resultados que não foram encontrados na literatura científica.

Por fim, foram levantadas algumas questões pertinentes: a primeira indaga sobre a possibilidade de existência de uma ordem com uma quantidade específica de relações entre os elementos de um conjunto dado; enquanto a segunda aborda a quantidade de relações possíveis (parciais ou totais) que um conjunto finito pode ter.

## Referências

O'CONNOR, J. J.; ROBERTON, E. F. **A history of set theory**. Escócia: School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, 1996. Disponível em:

[https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Beginnings\\_of\\_set\\_theory](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory). Acesso em: 26 jan. 2024.

HALMOS, P. R. **Naive Set Theory**. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company, 1960.

HRBACEK, K.; JECH, T. **Introduction to Set Theory**. 3. ed. New York: Marcel Dekker, 1999.

## Agradecimentos

Agradeço à equipe editorial e aos avaliadores pela valiosa contribuição e pelos comentários construtivos que foram fundamentais para aprimorar a qualidade do trabalho.

