Sobre conjuntos parcialmente ordenados

About partially ordered sets

Acerca de los conjuntos parcialmente ordenados

Wállace Mangueira de Sousa[1]
Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, PB, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-0894-9555, http://lattes.cnpq.br/4079181802341367

Resumo: Durante as aulas, é comum surgirem questionamentos curiosos sobre o conteúdo apresentado. Este artigo foi motivado pelas seguintes perguntas: Ao considerar um conjunto finito U munido de uma ordem parcial $G \subseteq U \times U$, qual seria a maior (e menor) quantidade de elementos em G? Existe uma relação entre essa quantidade de elementos e a característica do par (U, G) ser um conjunto totalmente ordenado? Este artigo demonstra que (U, G) é totalmente ordenado se, e somente se, (U, G) é parcialmente ordenado e G possui $n(n+1)/2$ elementos, sendo n a quantidade de elementos em U.

Palavras-chave: conjunto parcialmente ordenado; conjunto totalmente ordenado; conjunto finito.

Abstract: During classes, it's common for intriguing questions to arise regarding the presented content. This article was prompted by the following inquiries: Considering a finite set U equipped with a partial order $G \subseteq U \times U$, what would be the largest (and smallest) number of elements in G? Is there a relationship between this quantity of elements and the nature of the pair (U, G) as a totally ordered set? This article demonstrates that (U, G) is totally ordered if, and only if, (U, G) is partially ordered and G contains $n(n+1)/2$ elements, where n represents the cardinality of U.

Keywords: partially ordered set; totally ordered set; finite set.

Resumen: Durante las clases, es común que surjan preguntas intrigantes sobre el contenido presentado. Este artículo fue motivado por las siguientes preguntas: Al considerar un conjunto finito U equipado con un orden parcial $G \subseteq U \times U$, ¿cuál sería la mayor (y menor) cantidad de elementos en G? ¿Existe alguna relación entre esta cantidad de elementos y la naturaleza del par (U, G) como un conjunto totalmente ordenado? Este artículo demuestra que (U, G) está totalmente ordenado si, y solo si, (U, G) está parcialmente ordenado y G contiene $n(n+1)/2$ elementos, donde n representa la cantidad de elementos en U.

Palabras clave: conjunto parcialmente ordenado; conjunto totalmente ordenado; conjunto finito.

Data de submissão: 13 de dezembro de 2023.

Data de aprovação: 5 de fevereiro de 2024.

[1]**Currículo sucinto**: Bacharele mestre em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba e doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal da Paraíba. **Contribuição de autoria**: escrita – primeira redação, escrita – revisão e edição, investigação, metodologia. **Contato**: wallace.mangueira@academico.ufpb.br.

1 Introdução

Se U é um conjunto finito, então podemos definir uma bijeção entre U e um subconjunto finito dos números naturais e, assim, induzir uma ordem em U de forma que U seja um conjunto totalmente ordenado. Mais geralmente, pelo Princípio da Boa Ordenação, qualquer conjunto pode ser bem ordenado e, em particular, possuir uma ordem total (O'Connor; Roberton, 1996).

Considere U um conjunto finito e $G \subseteq U \times U$ um gráfico. Desejamos saber qual é o maior (e o menor) número de elementos que G deve conter para que (U, G) seja um conjunto parcialmente ordenado. Além disso, sabendo que (U, G) é um conjunto parcialmente ordenado, queremos determinar a quantidade de elementos que G deve ter para que (U, G) seja totalmente ordenado.

Na Seção 2, é apresenta uma revisão sobre conjuntos parcialmente ordenados, determinando o número de relações entre os elementos de alguns conjuntos parcialmente ordenados. Ao final, conclui-se que, para (U, G) um conjunto parcialmente ordenado geral, a quantidade de elementos de G pode variar.

A Seção 3 revisa o conceito de conjunto totalmente ordenado. Ao contrário do que ocorre geralmente com conjuntos parcialmente ordenados, no Teorema 3.3 é demonstrado que se (U, G) é um conjunto totalmente ordenado, a quantidade de elementos de G não se altera.

Espera-se que o leitor tenha conhecimento de algumas propriedades/definições básicas de Teoria dos Conjuntos, como por exemplo: para quaisquer dois conjuntos A e B, o conjunto $A \times B$ é o produto cartesiano de A por B, definido por $A \times B := \big\{(a, b);\ a \in A \text{ e } b \in B\big\}$, sendo $(a, b) := \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$; se $(a, b), (c, d) \in A \times B$ satisfazem $(a, b) = (c, d)$, então $a = c$ e $b = d$; qualquer subconjunto de $A \times B$ é chamado de gráfico de A em B (Halmos, 1960; Hrbacek; Jech, 1999).

2 Conjunto parcialmente ordenado

Nesta seção, relembramos a definição de conjunto parcialmente ordenado e calculamos a quantidade de relações que os elementos desse conjunto parcialmente ordenado possuem, utilizando alguns exemplos.

Sejam U um conjunto e $G \subseteq U \times U$ um gráfico quaisquer. Dizemos que G define uma relação de ordem (parcial) em U se

1. Para todo $x \in U$, temos que $(x, x) \in G$;

2. Para todos $x, y \in U$, se $(x, y), (y, x) \in G$, então $x = y$;

3. Para todos $x, y, z \in U$, se $(x, y), (y, z) \in G$, então $(x, z) \in G$.

Neste caso, dizemos que o par (U, G) é um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $x, y \in U$ se relacionam (via G) se $(x, y) \in G$ ou $(y, x) \in G$.

Para o restante do texto, considere $N_G(U) := \#G$. Isto é, $N_G(U)$ é o número de relações entre os elementos de U com respeito a G.

Exemplo 2.1. *Considere U um conjunto e $D \subseteq U \times U$ o gráfico diagonal (ou gráfico identidade), ou seja, $D := \{(a, b) \in U \times U;\ a = b\}$. Não é difícil verificar que o par (U, D) é um conjunto parcialmente ordenado e que $N_D(U) = \#U$.*

Exemplo 2.2. *Sejam U um conjunto finito com n elementos, $\mathcal{P}(U) := \{X;\ X \subseteq U\}$ o conjunto das partes de U e $G := \big\{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U);\ X \subseteq Y\big\}$ a relação definida pela inclusão de conjuntos. Neste caso, o par $(\mathcal{P}(U), G)$ é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, notemos que para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{P}(U)$ temos que:*

(i) $X \subseteq X$*;*

(ii) Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, então $X = Y$;

(iii) Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, então $X \subseteq Z$.

Proposição 2.3. *Considere a notação do Exemplo 2.2. Então, $N_G(U) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot \binom{n}{i}$.*

Prova. *Vamos analisar primeiro o caso em que $U = \{a, b, c\}$ contém apenas 3 elementos. Neste caso, vamos fixar um conjunto Y com i elementos e contar todos os pares da forma (X, Y) que pertencem a G, ou seja, contar todos os conjuntos X tais que $X \subseteq Y$. Mostraremos, logo abaixo, todas as possibilidades para este caso:*

Se $\#Y = 0$, então temos apenas $(\emptyset, \emptyset) \in G$.

Se $\#Y = 1$, então

(i) $(\emptyset, \{a\}), (\{a\}, \{a\}) \in G$, para o conjunto $\{a\}$;

(ii) $(\emptyset, \{b\}), (\{b\}, \{b\}) \in G$, para o conjunto $\{b\}$;

(iii) $(\emptyset, \{c\}), (\{c\}, \{c\}) \in G$, *para o conjunto* $\{c\}$.

Se $\#Y = 2$, *então*

(iv) $(\emptyset, \{a,b\}), (\{a\}, \{a,b\}), (\{b\}, \{a,b\}), (\{a,b\}, \{a,b\}) \in G$, *para o conjunto* $\{a,b\}$;

(v) $(\emptyset, \{b,c\}), (\{b\}, \{b,c\}), (\{c\}, \{b,c\}), (\{b,c\}, \{b,c\}) \in G$, *para o conjunto* $\{b,c\}$;

(vi) $(\emptyset, \{a,c\}), (\{a\}, \{a,c\}), (\{c\}, \{a,c\}), (\{a,c\}, \{a,c\}) \in G$, *para o conjunto* $\{a,c\}$.

Se $\#Y = 3$, *então* $(\emptyset, \{a,b,c\}), (\{a\}, \{a,b,c\}), (\{b\}, \{a,b,c\}), (\{c\}, \{a,b,c\}), (\{a,b\}, \{a,b,c\}), (\{a,c\}, \{a,b,c\}), (\{b,c\}, \{a,b,c\}), (\{a,b,c\}, \{a,b,c\}) \in G$, *para o conjunto* $\{a,b,c\}$.

No caso geral, basta notar que existem 2^i *pares* $(X, Y) \in G$ *para cada* Y *com* i *elementos e que existem* $\binom{n}{i}$ *subconjuntos de* U *com* i *elementos.*

Exemplo 2.4. *Sejam* $U := \{1, 2, ..., n\}$ *e* $G := \{(a,b) \in U \times U;\ a \mid b\}$[1]. *Então o par* (U, G) *é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, notemos que para quaisquer* $a, b, c \in U$

(i) $a \mid a$;

(ii) *Se* $a \mid b$ *e* $b \mid a$, *então* $b = a$;

(iii) *Se* $a \mid b$ *e* $b \mid c$, *então* $a \mid c$.

Proposição 2.5. *Considere a notação do Exemplo 2.4. Então* $N_G(U) = \sum_{i=1}^{n} \phi(i)$, *no qual* $\phi(k)$ *representa o número de divisores positivos de* k.

Prova. *Vamos analisar primeiro o caso em que* $n = 6$, *ou seja,* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Neste caso, vamos fixar um número* k *e contar todos os pares da forma* (a, k) *que pertencem a* G, *ou seja, contar dos os números* a *tais que* $a \mid k$. *Mostraremos, logo abaixo, todas as possibilidades para este caso:*

Se $k = 1$, *então temos apenas* $(1, 1) \in G$.

Se $k = 2$, *então* $(1, 2), (2, 2) \in G$.

Se $k = 3$, *então* $(1, 3), (3, 3) \in G$.

Se $k = 4$, *então* $(1, 4), (2, 4), (4, 4) \in G$.

[1] $a \mid b$ *significa,* a *divide* b.

Se $k = 5$*, então* $(1,5),(5,5) \in G$*.*

Se $k = 6$*, então* $(1,6),(2,6),(3,6),(6,6) \in G$*.*

No caso geral, basta notar que em cada etapa estamos somando a quantidade dos divisores positivos do número k*.*

Exemplo 2.6. *Sejam* A *e* B *conjuntos finitos e* $G_A \subseteq A \times A$ *e* $G_B \subseteq B \times B$ *tais que* (A, G_A) *e* (B, G_B) *são conjuntos parcialmente ordenados. Considere a seguinte relação sobre* $A \times B$*, definida por* $G_{A\times B} := \Big\{ \big((a,b),(a',b')\big) \in (A \times B) \times (A \times B);\ (a,a') \in G_A \ e \ (b,b') \in G_B \Big\}$*. O par* $\Big(A \times B, G_{A\times B}\Big)$ *é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, notemos que:*

(i) Para quaisquer $a \in A$ *e* $b \in B$*, segue que* $(a,a) \in G_A$ *e* $(b,b) \in G_B$*. Portanto,* $\big((a,b),(a,b)\big) \in G_{A\times B}$ *para quaisquer* $a \in A$ *e* $b \in B$*;*

(ii) Se $\big((a,b),(a',b')\big), \big((a',b'),(a,b)\big) \in G_{A\times B}$*, então* $(a,a'),(a',a) \in G_A$ *e* $(b,b'),(b',b) \in G_B$*. Logo,* $a = a'$ *e* $b = b'$*. Portanto,* $(a,b) = (a',b')$*;*

(iii) Se $\big((a,b),(c,d)\big), \big((c,d),(e,f)\big) \in G_{A\times B}$*, então* $(a,c),(c,e) \in G_A$ *e* $(b,d),(d,f) \in G_B$*. Logo,* $(a,e) \in G_A$ *e* $(b,f) \in G_B$*. Portanto,* $\big((a,b),(e,f)\big) \in G_{A\times B}$*.*

Proposição 2.7. *Considere a notação do Exemplo 2.6. Então* $N_{G_{A\times B}}(A \times B) = N_{G_A}(A) \cdot N_{G_B}(B)$*.*

Prova. *Basta notar que para cada* $(a,a') \in G_A$*, existem* $N_{G_B}(B)$ *elementos* $(b,b') \in G_B$ *tais que* $\big((a,b),(a',b')\big) \in G_{A\times B}$ *e, assim, usar o princípio fundamental da contagem.*

Exemplo 2.8. *Sejam* A *um conjunto finito,* (B, G_B) *um conjunto finito parcialmente ordenado e* B^A *o conjunto de todas as funções de* A *em* B*, ou seja,* $B^A := \big\{ f : A \to B;\ f \ \textit{é uma função} \big\}$*. Considere a relação* $G_{B^A} := \big\{ (f,g) \in B^A \times B^A;\ \big(f(x),g(x)\big) \in G_B \ \textit{para todo} \ x \in A \big\}$*. O par* $\big(B^A, G_{B^A}\big)$ *é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, para quaisquer* $f,g,h \in B^A$ *temos que*

(i) $(f,f) \in G_{B^A}$*, pois* $\big(f(x),f(x)\big) \in G_B$ *para todo* $x \in A$*;*

(ii) Se $\big(f,g\big), \big(g,f\big) \in G_{B^A}$*, então* $\big(f(x),g(x)\big), \big(g(x),f(x)\big) \in G_{B^A}$ *para todo* $x \in A$*. Logo,* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in A$*. Portanto,* $f = g$*;*

(iii) Se $\big(f,g\big), \big(g,h\big) \in G_{B^A}$*, então* $\big(f(x),g(x)\big), \big(g(x),h(x)\big) \in G_B$ *para todo* $x \in A$*. Logo,* $(f(x),h(x)) \in G_B$ *para todo* $x \in A$*. Portanto,* $(f,h) \in G_{B^A}$*.*

Proposição 2.9. *Considere a notação do Exemplo 2.8. Então* $N_{G_{B^A}}(B^A) = N_{G_B}(B)^{\#A}$*.*

Prova. *Primeiramente notemos que se* $A = \{a_1, ..., a_n\}$ *é um conjunto com* n *elementos então existe uma bijeção* $F : B^A \to \underbrace{B \times \cdots \times B}_{n \text{ vezes}}$*, dada por* $F(f) := \big(f(a_1), ..., f(a_n)\big)$*. Além disso, temos que* $(f,g) \in G_{B^A}$ *se, e somente se,* $\Big(\big(f(a_1), ..., f(a_n)\big), \big(g(a_1), ..., g(a_n)\big)\Big) \in G_{B\times\cdots\times B}$ *(ordem no produto cartesiano definido no Exemplo 2.6). Portanto,* $N_{G_{B^A}}(B^A) = N_{G_{B\times\cdots\times B}}(B \times \cdots \times B) = N_{G_B}(B)^{\#A}$.

Ao analisar brevemente o exposto anteriormente, concluímos que o número de elementos de G pode variar considerando apenas o fato de que o par (U, G) é um conjunto parcialmente ordenado. Na próxima seção, especificamente no Teorema 3.3, é demonstrado que a quantidade de elementos de G permanece inalterada se (U, G) for um conjunto totalmente ordenado.

3 Conjunto totalmente ordenado

Sejam (U, G) um conjunto parcialmente ordenado e $B \subseteq U$. Não é difícil verificar que o gráfico $G|_B := \{(x, y) \in G;\ x, y \in B\}$ define uma relação de ordem em B. Em outras palavras, o par $(B, G|_B)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Agora, caso todos os pares de elementos de B se relacionam (via $G|_B$), ou seja, para quaisquer $x, y \in B$ temos que $(x, y) \in G|_B$ ou $(y, x) \in G|_B$, então dizemos que B é uma cadeia em (U, G). Denominamos (U, G) como um conjunto totalmente ordenado se U for uma cadeia nele próprio.

Exemplo 3.1. *Sejam* $U = \{1, 2, ..., n\}$ *e* $G := \{(a, b) \in U \times U;\ a \mid b\}$ *(do Exemplo 2.4). Para* $n \geq 3$*, o par* (U, G) *não é totalmente ordenado. Por outro lado, se* k *é um inteiro positivo tal que* $2^k \leq n$*, então* $B_k = \{1, 2, 4, ..., 2^k\}$ *é uma cadeia em* (U, G)*.*

Exemplo 3.2. *Considere* $U = \{1, ..., n\}$ *e* $G = \{(a, b) \in U \times U;\ a \leq b\}$ *a relação de ordem usual. Não é difícil verificar que o par* (U, G) *é um conjunto totalmente ordenado.*

3.1 **Totalmente ordenado *versus* quantidade de relações**

Como foi discutido na seção anterior, não é intuitivo determinar o número de relações entre os elementos de um conjunto finito parcialmente ordenado sabendo apenas a quantidade de elementos deste conjunto. O Teorema 3.3 indica o intervalo no qual essa quantidade pode variar. Além disso, o referido teorema estabelece uma caracterização dos conjuntos totalmente ordenados com base na quantidade dessas relações.

SOUSA, Wállace Mangueira de. Sobre conjuntos parcialmente ordenados. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 1, p. e3007, 17 de abril de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id7008.

Teorema 3.3. *Sejam U um conjunto com n elementos e $G \subseteq U \times U$. Se (U,G) é um conjunto parcialmente ordenado, então $n \leq N_G(U) \leq n(n+1)/2$. Mais ainda, (U,G) é totalmente ordenado se, e somente se, (U,G) é parcialmente ordenado e $N_G(U) = n(n+1)/2$.*

Prova. *A primeira desigualdade segue do fato de que $(a,a) \in G$ para todo $a \in U$. A última desigualdade pode ser obtida da seguinte forma: o número máximo de relações que elementos distintos de um conjunto parcialmente ordenado pode ser interpretado como o número de escolhas de 2 elementos (sem importar a ordem) num conjunto de n possibilidades. Assim, existem $n(n-1)/2$ tais escolhas. Somando com as n relações do tipo (x,x), temos um total de $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ relações possíveis dos elementos de U. Para a segunda afirmação, podemos supor que $\#U = n \geq 2$. Neste caso, considere $D = \{(a,b) \in U \times U;\ a = b\}$ o gráfico diagonal e $Set_2(U) = \{X \subseteq U;\ \#X = 2\}$. Assim, se (U,G) é parcialmente ordenado, então a função $f : G \setminus D \to Set_2(U)$ dada por $f\big((x,y)\big) = \{x,y\}$ está bem definida e é injetora. Além disso, o par (U,G) é totalmente ordenado se, e somente se, (U,G) é parcialmente ordenado e f é bijetora. E isto ocorre se, e somente se, (U,G) é parcialmente ordenado e $\#G \setminus D = \#Set_2(U) = n(n-1)/2$.*

O Teorema 3.3 garante que a quantidade de relações entre os elementos de um conjunto finito totalmente ordenado é um invariante, ou seja, se (U,G_1) e (U,G_2) são conjuntos totalmente ordenados, então $N_{G_1}(U) = N_{G_2}(U)$. Logo, é possível concluir que se U é um conjunto com n elementos, então existem no máximo $\binom{n^2}{n(n+1)/2}$ subconjuntos $G \subset U \times U$ tais que (U,G) é um conjunto totalmente ordenado.

Os dois lemas subsequentes, essenciais para os próximos resultados, serão demonstrados utilizando o Princípio de Indução Finita.

Lema 3.4. *Sejam m e n inteiros tais que $n,m > 1$. Então $nm + 1 > n + m$.*

Prova. *Vamos mostrar, por indução em n, que $nm + 1 > n + m$ para m qualquer ($m \geq 2$).*

<u>Caso base</u>: Suponhamos que $n = 2$, m é qualquer. É claro que $2m + 1 > 2 + m$.

<u>Hipótese de Indução</u>: Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k \geq 2$ e m qualquer, ou seja, suponhamos que $km + 1 > k + m$ para m qualquer. Se a afirmação não vale para $n = k+1$, ou seja, $(k+1)m + 1 \leq (k+1) + m$ para m qualquer, segue que

$$(k+1)m + 1 \leq (k+1) + m \implies (k+1)m + 1 < km + 1 + 1 \implies$$

$m + 1 < 2 \implies m < 1$, *o que é absurdo!*

Desta forma, temos que $(k+1)m+1 > (k+1)+m$. *Portanto,* $nm+1 > n+m$ *para quaisquer números inteiros* n *e* m *tais que* $n, m > 1$.

Lema 3.5. *Sejam* m *e* n *números inteiros tais que* $m, n > 1$. *Então* $2^{n-1}(m^n+1) > (m+1)^n$.

Prova. *Vamos mostrar, por indução em* n, *que* $2^{n-1}(m^n+1) > (m+1)^n$ *para* m *qualquer (*$m \geq 2$*).*

Caso base: Suponhamos que $n = 2$, m *inteiro qualquer (*$m \geq 2$*) e, por absurdo, que vale* $2(m^2+1) \leq (m+1)^2$. *Assim,* $2m^2+2 \leq m^2+m+1$ *e, consequentemente,* $m^2+1 \leq 2m$. *E isto é um absurdo, visto que* $m \geq 2$. *Desta forma, concluímos que* $2(m^2+1) > (m+1)^2$.

Hipótese de Indução: Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k \geq 2$ *e* m *qualquer, ou seja, suponhamos que* $2^{k-1}(m^k+1) > (m+1)^k$ *para* m *qualquer. Agora, suponhamos que* $2^k(m^{k+1}+1) \leq (m+1)^{k+1}$ *para* m *qualquer. Assim,*

$$2^k(m^{k+1}+1) \leq (m+1)^{k+1} \implies 2^k(m^{k+1}+1) < (m+1) \cdot 2^{k-1}(m^k+1) \implies$$

$$2(m^{k+1}+1) < (m+1)(m^k+1) \implies m^{k+1}+1 < m^k+m \implies$$

$$m(m^k - m^{k-1} - 1) + 1 < 0 \implies m^k - m^{k-1} < 1 \implies$$

$$m^{k-1}(m-1) < 0 \implies m < 1, \text{ o que é absurdo.}$$

Desta forma, temos que $2^k(m^{k+1}+1) > (m+1)^{k+1}$. *Portanto,* $2^{n-1}(m^n+1) > (m+1)^n$ *para quaisquer números inteiros* n *e* m *tais que* $n, m > 1$.

Corolário 3.6. *Considere a notação do Exemplo 2.6. O par* $(A \times B, G_{A\times B})$ *é um conjunto totalmente ordenado se, e somente se,* A *é unitário e* (B, G_B) *é totalmente ordenado ou* B *é unitário e* (A, G_A) *é totalmente ordenado.*

Prova. *Suponhamos que* A *tem* n *elementos e que* B *tem* m *elementos. O par* $(A \times B, G_{A\times B})$ *é um conjunto totalmente ordenado se* $N_{G_{A\times B}} = nm(nm+1)/2$, *ou seja,* $N_{G_A}(A) \cdot N_{G_B}(B) = nm(nm+1)/2$. *Por outro lado, temos que* $N_{G_A}(A) \cdot N_{G_B}(B) \leq \big(n(n+1)/2\big) \cdot \big(m(m+1)/2\big)$. *Desta forma, temos que* $nm(nm+1)/2 \leq \big(n(n+1)/2\big) \cdot \big(m(m+1)/2\big)$. *Isto implica que* $nm+1 \leq n+m$ *e, consequentemente,* $n = 1$ *ou* $m = 1$ *(pelo Lema 3.4). Se* $n = 1$, *então* $N_{G_A}(A) = 1$ *e a igualdade* $N_{G_A}(A) \cdot N_{G_B}(B) = N_{G_{A\times B}} = nm(nm+1)/2$ *garante que* $N_{G_B}(B) = m(m+1)/2$, *ou seja,* A *é um conjunto unitário e* (B, G_B) *é um conjunto totalmente ordenado. Analogamente, se* $m = 1$, *então* B *é um conjunto unitário e* (A, G_A) *é um conjunto totalmente ordenado. A recíproca segue trivialmente.*

Corolário 3.7. *Considere a notação do Exemplo 2.8. O par* (B^A, G_{B^A}) *é um conjunto totalmente ordenado se, e somente se,* A *é um conjunto unitário e* (B, G_B) *é totalmente ordenado ou* B *é um conjunto unitário.*

Prova. *Suponhamos que* A *tem* n *elementos e que* B *tem* m *elementos. O par* (B^A, G_{B^A}) *é um conjunto totalmente ordenado se* $N_{G_{B^A}}(B^A) = m^n(m^n+1)/2$*, ou seja,* $\big(N_{G_B}(B)\big)^n = m^n(m^n+1)/2$*. Por outro lado, temos que* $\big(N_{G_B}(B)\big)^n \leq \big(m(m+1)/2\big)^n$*. Desta forma, temos a seguinte desigualdade* $m^n(m^n+1)/2 \leq \big(m(m+1)/2\big)^n$*. Isto implica que* $2^{n-1}(m^n+1) \leq (m+1)^n$*. Notemos que esta última desigualdade é verdadeira se* $n = 1$ *e* m *qualquer ou* n *qualquer e* $m = 1$*. Além disso, o Lema 3.5 mostra que fora desses casos esta última desigualdade é falsa. Assim, se* A *é um conjunto unitário, temos que* $\big(N_{G_B}(B)\big)^1 = m^1(m^1+1)/2$ *e, portanto,* (B, G_B) *é um conjunto totalmente ordenado.*

Exemplo 3.8. *Considere* $U = \{1, ..., n\}$ *e* $G = \{(a, b) \in U \times U;\ a \leq b\}$ *a relação de ordem usual. Como o par* (U, G) *é totalmente ordenado (ver Exemplo 3.2), segue que* $N_G(U) = n(n+1)/2$*. Por outro lado, notemos que para cada* $i \in U$*, a quantidade de elementos da forma* $(a, i) \in G$ *é* i*. Segue que* $1 + 2 + \cdots + i + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$*, a qual é uma expressão já conhecida.*

A seguir, apresentam-se dois problemas que surgiram durante a elaboração deste material e cujas soluções são desconhecidas pelo autor.

Problema 3.9. *Seja* U *um conjunto finito com* n *elementos. Para quais inteiros* s*, com* $n \leq s \leq n(n+1)/2$*, existe um gráfico* $G(s) \subset U \times U$ *tal que o par* $(U, G(s))$ *é um conjunto parcialmente ordenado e* $N_{G(s)}(U) = s$*?*

Problema 3.10. *Seja* U *um conjunto finito. Existem quantos gráficos* $G \subset U \times U$ *tais que* (U, G) *é um conjunto parcialmente (ou totalmente) ordenado?*

4 Considerações finais

O texto oferece uma breve explanação sobre conjuntos parcialmente ordenados finitos, demonstrando, por meio de exemplos, como calcular o número de relações entre os elementos desses conjuntos em relação a uma ordem parcial específica. Destaca-se que foi identificado um intervalo, determinado exclusivamente em função da cardinalidade do conjunto, no qual o número de tais relações pode variar. O Teorema 3.3 estabelece que se um conjunto parcialmente ordenado tiver cardinalidade n, com $n(n+1)/2$ relações entre seus elementos, então este conjunto é totalmente ordenado. Vale ressaltar que o texto apresenta resultados que não foram encontrados na literatura científica.

Por fim, foram levantadas algumas questões pertinentes: a primeira indaga sobre a possibilidade de existência de uma ordem com uma quantidade específica de relações entre os elementos de um conjunto dado; enquanto a segunda aborda a quantidade de relações possíveis (parciais ou totais) que um conjunto finito pode ter.

Referências

O'CONNOR, J. J.; ROBERTON, E. F. **A history of set theory**. Escócia: School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, 1996. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory. Acesso em: 26 jan. 2024.

HALMOS, P. R. **Naive Set Theory**. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company, 1960.

HRBACEK, K.; JECH, T. **Introduction to Set Theory**. 3. ed. New York: Marcel Dekker, 1999.

Agradecimentos

Agradeço à equipe editorial e aos avaliadores pela valiosa contribuição e pelos comentários construtivos que foram fundamentais para aprimorar a qualidade do trabalho.