

Sincronismo em um modelo metapopulacional de agregação com acoplamento não linear convexo

Synchronism in a metapopulational aggregation model with convex nonlinear coupling

Sincronización en un modelo de agregación de metapoblación con acoplamiento convexo no lineal

Francisco Helmuth Soares Dias¹

Secretaria de Município da Educação (SMEd), Santa Maria, RS, Brasil



<https://orcid.org/0000-0003-0291-7130>,



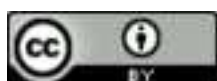
<http://lattes.cnpq.br/1330455165968118>

Resumo: O presente trabalho é parte do resultado da tese de doutorado do autor, e tem como objetivo apresentar um modelo metapopulacional de agregação com taxa de migração independente da densidade que permite a escolha do sítio de destino de acordo com a sua densidade. É trabalhado aqui um acoplamento não linear, formado por uma combinação convexa de duas matrizes, uma de conexão local e outra, de conexão global. Obtém-se um resultado que garante a estabilidade assintótica do atrator sincronizado e também que o número de Lyapunov transversal do atrator sincronizado é dado pelo produto do número de Lyapunov da órbita por um quantificador que depende da taxa de migração e dos autovalores de uma matriz oriunda da matriz de conexão. A partir das simulações numéricas da variação do número de Lyapunov transversal em relação aos parâmetros taxa de migração e taxa de reprodução intrínseca da função que descreve a dinâmica local, são mensuradas as regiões de possível e impossível sincronia. Com as simulações da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações, determinam-se os valores da taxa de reprodução intrínseca e da taxa de migração para os quais mais ocorre sincronização e ainda que não ocorre sincronização de órbitas caóticas.

Palavras-chave: metapopulação; estabilidade; sincronismo; número de Lyapunov; combinação convexa.

Abstract: The present work is part of the result of the author's doctoral dissertation and aims at presenting a metapopulational aggregation model with a density-independent migration rate that allows the choice of the destination site according to its density. A non-linear coupling is produced here, formed by a convex combination of two matrices, one with a local connection and the other with a global connection. The result obtained here guarantees the asymptotic stability of the synchronized attractor and also that the transverse Lyapunov number of the synchronized attractor is given by the product of the orbital Lyapunov number by a quantifier that depends on the migration rate and the eigenvalues of an originating matrix of the connection matrix. From

¹ **Currículo sucinto:** Licenciado e mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria, doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Docente da Secretaria de Município da Educação de Santa Maria, RS. **Contribuição de autoria:** Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** fhsoaresdias@gmail.com.



the numerical simulations of the variation of the transversal Lyapunov number in relation to the parameters migration rate and intrinsic reproduction rate of the function that describes the local dynamics, the regions of possible and impossible synchrony are measured. With the simulations of the synchronized orbit with respect to small perturbations, the values of the intrinsic reproduction rate and the migration rate are determined, for which the most synchronization occurs, and it is also determined that there is no synchronization of chaotic orbits.

Keywords: metapopulation; stability; synchronism; Lyapunov number; convex combination.

Resumen: El presente trabajo es parte del resultado de la tesis doctoral del autor, y tiene como objetivo presentar un modelo metapoblacional de agregación con una tasa de migración independiente de la densidad que permita la elección del sitio de destino de acuerdo con su densidad. Aquí se trabaja un acoplamiento no lineal, formado por una combinación convexa de dos matrices, una con conexión local y la otra con conexión global. Obtenemos un resultado que garantiza la estabilidad asintótica del atractor sincronizado. Además vemos que el número de Lyapunov transversal del atractor sincronizado viene dado por el producto del número de Lyapunov orbital por medio de un cuantificador que depende de la tasa de migración y los valores propios de una matriz que se origina en la matriz de conexión. A partir de las simulaciones numéricas de la variación del número transversal de Lyapunov en relación con los parámetros tasa de migración y tasa de reproducción intrínseca de la función que describe la dinámica local, se miden las regiones de sincronía posible e imposible. Post las simulaciones de la órbita sincronizada con respecto a pequeñas perturbaciones se determinan los valores de la tasa de reproducción intrínseca y la tasa de migración. Luego se produce la mayor sincronización e incluso se observa si no hay sincronización de órbitas caóticas.

Palabras clave: metapoblación; estabilidad; sincronismo; número de Lyapunov; combinación convexa.

Data de submissão: 30 de setembro de 2023.

Data de aprovação: 11 de março de 2024.

1 Introdução

Os estudos em modelos metapopulacionais são um importante ramo das pesquisas em dinâmica populacional, como pode ser visto em Earn, Levin e Rohani (2000), Kahilainen *et al.* (2018), Barrionuevo e Silva (2008) e Uchmański (2016). Nesses modelos, a população está dividida em pequenos fragmentos adequados para reprodução e sobrevivência da espécie, ditos sítios e ao conjunto discreto deles denominado metapopulação.



O termo metapopulação foi utilizado pioneiramente para descrever uma população de populações (Levins, 1969). Uma metapopulação em que todos os seus sítios possuem a mesma dinâmica local (reprodução e sobrevivência) é dita homogênea. Caso contrário, a metapopulação é dita heterogênea.

Existem três abordagens para a ecologia espacial. A primeira é a de ecologistas teóricos que investigam modelos que descrevem indivíduos em um espaço uniforme, sem qualquer heterogeneidade ambiental. Por outro lado, os ecologistas de paisagem reproduzem descrições da estrutura física muito complexa de ambientes reais e o movimento de indivíduos e recursos neles existente. Já os ecologistas de metapopulação tentam chegar a um meio termo: o espaço é descrito como fragmentos de *habitat* nos quais as espécies vivem como populações locais discretas conectadas pela migração (Hanski, 1998).

Os sítios estão cercados por um ambiente hostil e totalmente impróprio para reprodução e sobrevivência. A conexão entre eles ocorre por meio de movimentos migratórios que serão assumidos acontecer depois do processo de dinâmica local. Se esses processos não forem bem separados, poderão suceder-se resultados improváveis do ponto de vista biológico (Hassel *et al.*, 1995). Neste trabalho, migração e dispersão terão o mesmo significado, e serão utilizadas para descrever o movimento dos indivíduos de um sítio para outro.

Para um modelo hospedeiro-parasitoide, uma grande assimetria nas taxas de dispersão de hospedeiros e parasitoides pode ser desestabilizadora, do ponto de vista do equilíbrio da metapopulação. Essa conclusão só é possível se não ocorrerem refúgios para os hospedeiros, reprodução hospedeira dependente da densidade ou outros mecanismos reguladores (Rohani; Ruxton, 1999). A dispersão também pode ter uma relação com a persistência de uma população. Uma taxa de migração muito alta pode ser tão ruim para a persistência da metapopulação quanto a migração baixa. Além disso, espécies com taxas intermediárias de migração respondem melhor à fragmentação de *habitat* (Hanski; Zhang, 1993).

A movimentação entre os sítios, pode provocar um outro processo muito importante, denominado sincronização. Uma dinâmica sincronizada ocorre quando todos os sítios da metapopulação, com condições iniciais diferentes, passam a ter o mesmo número de indivíduos num determinado instante de tempo, a partir do qual oscilam de maneira idêntica.

A sincronização está fortemente correlacionada com a extinção da metapopulação. Existe uma correspondência positiva entre o grau de sincronia das populações e o risco de extinção da



metapopulação (Earn, Levin e Rohani, 2000). Em contraponto, as oscilações caóticas reduzem a viabilidade de sincronização, reduzindo assim a probabilidade de extinção (Allen; Schaffer; Rosko, 1993). Mais de sincronização e oscilações caóticas em Pikovsky, Rosenblum e Kurths (2001).

No trabalho de Dias e Silva (2018) é apresentado um novo modelo metapopulacional com taxa de migração independente da densidade. Eles obtêm um critério para a estabilidade do estado síncrono, baseado no cálculo do número de Lyapunov Transversal do atrator sincronizado aplicado num acoplamento local e num acoplamento global.

Diante disso, o objetivo deste trabalho é apresentar uma generalização de Dias e Silva (2018), fazendo uma releitura dos resultados apresentados em Dias (2018), pois considera-se um acoplamento não linear, através de uma matriz de conexão gerada por uma combinação convexa de duas matrizes circulantes, uma representando um anel cíclico de conexão local e outra, representando um anel cíclico de conexão global. Essa topologia de rede possibilita que os indivíduos tenham uma movimentação por vezes permitida para qualquer sítio e outras vezes, mais restrita aos sítios mais próximos. São apresentadas também as simulações numéricas da variação do número de Lyapunov transversal em relação à taxa de migração e a taxa de reprodução intrínseca da função que descreve a dinâmica local além de simulações numéricas da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações, feitas em Dias (2018).

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2 são apresentados alguns resultados essenciais sobre sistemas dinâmicos para a melhor compreensão do trabalho. Na seção 3 é descrito o modelo metapopulacional estudado e a matriz de conexão considerada. Na seção 4 aborda-se a sincronização e obtém-se um resultado para a estabilidade assintótica do estado sincronizado. Na seção 5, são apresentadas as simulações numéricas. Por fim, na seção 6, são apresentadas as discussões e conclusões acerca do trabalho.

2 Resultados essenciais de sistemas dinâmicos

Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 . Definimos o *número de Lyapunov* da órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$ como

$$L(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{\tau=0}^{t-1} |f'(x_\tau)| \right)^{1/t}, \quad (1)$$



e o expoente de Lyapunov como

$$h(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{\tau=0}^{t-1} \ln |f'(x_\tau)|, \tag{2}$$

desde que ambos limites existam. Notemos que $h(x_0)$ existe se, e somente se, $L(x_0)$ existe e $\ln(L(x_0)) = h(x_0)$. Uma órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$ é denominada *assintoticamente periódica* se ela converge para uma órbita periódica quando $t \rightarrow \infty$. Dizemos que a órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$ é *caótica* se ela não é assintoticamente periódica e se $L(x_0) > 1$ (ou $h(x_0) > 0$).

Um conjunto *atrator* é um conjunto ω -limite que atrai um conjunto de valores iniciais que tem medida diferente de zero, onde para uma órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$, o seu ω -limite é definido como sendo $\omega(x_0) = \left\{ x : \exists \{n_j\}_{j=1}^\infty \text{ tal que } x = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x_0) \right\}$. Seja $\{x_0, x_1, \dots\}$ uma órbita caótica. No caso de $x_0 \in \omega(x_0)$, então $\omega(x_0)$ é denominado um conjunto *caótico*. Um *atrator caótico* é um conjunto caótico que também é um atrator.

Seguem agora, algumas definições envolvendo Teoria da Medida e Integração. Dizemos que um espaço (X, \mathcal{A}, ν) é de probabilidade se X é um conjunto, \mathcal{A} é uma σ -álgebra definida em X e ν uma medida definida em (X, \mathcal{A}) tal que $\nu(X) = 1$. Uma transformação mensurável $h : X \rightarrow X$, *preserva a medida* ν ou ν é *h-invariante*, se para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ vale $\nu(h^{-1}(A)) = \nu(A)$. Chamamos uma medida de *ergódica* para h se para qualquer subconjunto h -invariante $A \in \mathcal{A}$ (ou seja, $A = h^{-1}(A)$), se verifica $\nu(A) = 0$ ou $\nu(A) = 1$. Enunciamos agora o resultado devido a von Neumann (em sua forma mais fraca) e provada na sua forma definitiva por Birkhoff, o qual pode ser encontrado em Oliveira (2005) e Díaz e Jorge (2007).

Proposição 2.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Consideremos um espaço de probabilidade (X, \mathcal{A}, ν) e uma transformação mensurável $h : X \rightarrow X$ que preserva a medida ν . Então, para toda função integrável φ , existe uma função integrável ϑ e h -invariante que verifica as seguintes propriedades:*

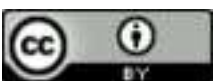
(i) *para ν -quase todo $x \in X$ se verifica*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \varphi(h^j(x)) = \vartheta;$$

(ii) $\int_X \varphi \, d\nu = \int_X \vartheta \, d\nu;$

(iii) *Se a medida ν for ergódica (com respeito a h), então ϑ é constante $\nu - q.t.p.$ Em particular, para ν -quase todo $x \in X$:*

$$\vartheta(x) = \int_X \varphi \, d\nu.$$



Por fim, apresenta-se aqui um importante resultado que diz como as órbitas se distribuem sobre atratores, no caso de mapeamentos multidimensionais. Para maiores detalhes, consulte o trabalho de Eckmann e Ruelle (1985).

Proposição 2.2 (Teorema Multiplicativo de Oseledec). *Consideremos um espaço \mathbb{M} , ν uma medida de probabilidade neste espaço e $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ um mapa que preserva a medida ergódica ν . Seja T um mapeamento mensurável de \mathbb{M} no espaço das matrizes de ordem $m \times m$, tal que*

$$\int \ln^+ \|T(x)\| \nu(dx) < \infty,$$

onde $\ln^+ u = \max\{0, \ln u\}$. Se $T_x^t = T(h^{t-1}(x)) \dots T(h(x))T(x)$ é uma matriz, então para ν -quase todo x , existe o seguinte limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T_x^{t*} T_x^t)^{\frac{1}{2t}} = M_x.$$

Aqui, T_x^{t*} denota a matriz adjunta de T_x^t .

3 O modelo metapopulacional

Considerando uma metapopulação homogênea formada por n sítios enumerados de 1 até n e que em cada sítio existe uma população de uma única espécie, chamada população local ou subpopulação, denota-se por $x_t^i \in \mathbb{R}$ o número de indivíduos do sítio i no instante de tempo t . Supondo que uma função suave f (Hassel, 1975; Hassel; Lawton; May, 1976; Murray, 1996) descreve o processo de dinâmica local, então:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

representa a evolução de cada população, na ausência de migração entre os sítios.

Encerrado o processo de dinâmica local em cada sítio, ocorre o processo de migração. A cada passo de tempo, uma fração μ de indivíduos, $\mu \in [0, 1]$, deixa um dado sítio e migra para outros sítios mais próximos. Dos indivíduos que migram dos sítios vizinhos j , uma fração c_{ij} chegará ao sítio i . Como essa movimentação é um processo de curta duração, supõe-se que não há perdas, ou seja, $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$ e ainda que $c_{ii} = 0$. Os elementos c_{ij} formam a matriz de conexão $C = [c_{ij}], i, j = 1, 2, \dots, n$. Note que quem é independente da densidade é a taxa de migração μ e não o processo migratório.



Dessa forma, o sistema de equações que descreve a dinâmica populacional, é dado por

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{f(x_t^j)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} f(x_t^k)} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

O primeiro termo no lado direito da equação (4) representa os indivíduos que permanecem no sítio i no instante de tempo t , enquanto o segundo termo descreve os indivíduos que partem dos sítios vizinhos e chegam no sítio i , levando em consideração a densidade do sítio de destino e uma média ponderada das densidades dos sítios, com pesos iguais as frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho. Esse modelo é um modelo de agregação, pois para baixas densidades tem-se poucos indivíduos chegando no sítio i e para altas densidades muitos indivíduos chegando neste sítio, caracterizando assim uma agregação.

Além disso, esse modelo inclui o quociente da densidade do sítio de destino pela média ponderada das densidades dos sítios no modelo apresentado por Silva, Barrionuevo e Giordani (2010) e Silva (2016), a saber,

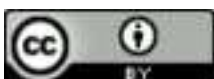
$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Uma vez que existe a dispersão, é necessário definir a topologia da rede. Considerando uma matriz C gerada por uma combinação convexa de duas matrizes circulantes, uma representando um anel cíclico de conexão local e outra, representando um anel cíclico de conexão global, definidas por

$$C_l = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

e

$$C_g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$



respectivamente, ou seja,

$$C = (1 - \alpha_t)C_l + \alpha_t C_g, \tag{8}$$

onde α_t é o coeficiente de combinação convexa, dado por $\alpha_{t+1} = v(\alpha_t)$, sendo v a função logística e $\alpha_o \in [0, 1]$.

4 Sincronização e estabilidade do estado síncrono

Quando todos os sítios apresentam a mesma densidade populacional em cada passo de tempo t ocorre a sincronização do sistema (4). Isso significa que $x_t^i = x_t, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Logo, substituindo isso em (4), segue que

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t) + \mu \frac{f(x_t) \sum_{j=1}^n c_{ij}}{f(x_t) \sum_{k=1}^n c_{kj}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

Já sabe-se que $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$. Por sua vez, supondo que

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{10}$$

implica que a matriz C é duplamente estocástica, e por consequência a expressão (9) torna-se $x_{t+1}^i = f(x_t), i = 1, 2, \dots, n$, que é exatamente a dinâmica de um sítio isolado dada em (3). Portanto, a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz a dinâmica de um sítio isolado.

Considere a órbita sincronizada $s_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^n$ do sistema (4) e Δ_t uma pequena perturbação. A linearização do sistema (4) em torno da órbita sincronizada é dada por

$$\Delta_{t+1} = J(s_t)\Delta_t, \tag{11}$$

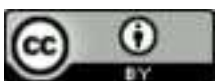
sendo $J(s_t)$ dado por

$$J(s_t) = \Omega_t f'(x_t), \tag{12}$$

onde $\Omega_t = I_n - \mu B_t, I_n$ é a matriz identidade de ordem n e $B_t = circ(b_0^t, b_1^t, \dots, b_{n-1}^t)$ é uma matriz circulante com $b_3^t = b_4^t = \dots = b_{n-3}^t, b_{n-2}^t = b_2^t, b_{n-1}^t = b_1^t,$

$$b_0^t = \left[2\varrho^2 + (n - 3) \left(\frac{\alpha_t}{n - 1} \right)^2 \right], \tag{13}$$

$$b_1^t = \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n - 1} + (n - 4) \left(\frac{\alpha_t}{n - 1} \right)^2 \right] - \varrho_t, \tag{14}$$



$$b_2^t = \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1}, \tag{15}$$

$$b_3^t = \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1}, \tag{16}$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$. Visto que a matriz B_t é circulante, existe uma matriz F que diagonaliza a matriz B_t (Davis, 1979). Mais precisamente, $B_t = F D_t F^{-1}$, onde $F = [f_{ij}]$ é a matriz de Fourier, definida por $f_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} (\exp(-\frac{2\pi}{n} \sqrt{-1}))^{(i-1)(j-1)}$, $i, j = 1, \dots, n$, e $D_t = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1^t, \dots, \lambda_{n-1}^t)$, sendo $\lambda_0, \lambda_1^t, \dots, \lambda_{n-1}^t$, os autovalores da matriz B_t .

Uma vez que $\sum_{j=0}^{n-1} b_j^t = 0$, segue que $\lambda_0 = 0$ é um autovalor simples da matriz B_t associado ao autovetor $v = (1, 1, \dots, 1)^T$, pois

$$B_t v = \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j^t, \sum_{j=0}^{n-1} b_j^t, \dots, \sum_{j=0}^{n-1} b_j^t \right)^T, \tag{17}$$

e por consequência $B_t v = 0v$. Portanto, a matriz Ω_t toma a forma

$$\Omega_t = F \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} - \mu \bar{D}_t & \\ 0 & & & \end{bmatrix} F^{-1}, \tag{18}$$

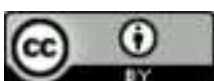
onde $\bar{D}_t = \text{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_{n-1}^t)$.

Observe que $\zeta = 1$ é um autovalor simples de Ω_t e seu correspondente autoespaço é exatamente a diagonal do espaço de fase que é precisamente o estado sincronizado. Em outras palavras, as perturbações nesse espaço podem ocorrer livremente. Já no espaço gerado pelos autovalores de $(I_{n-1} - \mu \bar{D}_t)$ as perturbações são transversais ao estado sincronizado e deverão tender a zero para obter estabilidade assintótica. Dessa forma, como o objetivo é verificar o crescimento destas últimas perturbações, é necessário e suficiente considerar apenas

$$J(s_t) = F[(I_{n-1} - \mu \bar{D}_t) f'(x_t)] F^{-1}, \tag{19}$$

e analisar a evolução da equação de perturbação, dada por

$$\Delta_{t+1} = (I_{n-1} - \mu \bar{D}_t) f'(x_t) \Delta_t. \tag{20}$$



Escolhendo Δ_0 como uma perturbação inicial qualquer, segue que

$$\Delta_t = (I_{n-1} - \mu\bar{D}_{t-1})f'(x_{t-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu\bar{D}_1)f'(x_1)(I_{n-1} - \mu\bar{D}_0)f'(x_0)\Delta_0. \tag{21}$$

Desta forma a perturbação tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \| P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0 \|^{1/\tau} < 1, \tag{22}$$

onde $P_t = (I_{n-1} - \mu\bar{D}_t)f'(x_t)$, com $t = 0, 1, 2, \dots$

Utilizando a igualdade

$$\| P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0 \| = \|(I_{n-1} - \mu\bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu\bar{D}_0)\| \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)|, \tag{23}$$

segue que

$$L_{\perp}(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0 \|^{1/\tau} = L(x_0)\Lambda(x_0), \tag{24}$$

onde

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right)^{1/\tau}, \tag{25}$$

é o número de Lyapunov com órbita iniciando em x_0 , e

$$\Lambda(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu\bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu\bar{D}_0)\|^{1/\tau}. \tag{26}$$

Denominar-se-á $L_{\perp}(x_0)$ de número de Lyapunov transversal, com órbita iniciando em x_0 .

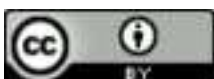
Supondo que a função f preserva a medida natural ρ , e também que $\ln^+ |f'(x)| \in L^1(\rho)$ segue pelo Teorema de Birkoff (Proposição 2.1) que (25) existe para todo x_0 (com relação à medida ρ), e é independente de x_0 .

Adicionalmente, assumindo que $\ln^+ \|(I_{n-1} - \mu\bar{D}_t)\| \in L^1(\rho)$, decorre do Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec (Proposição 2.2) que o limite (26), a menos de um conjunto de medida ρ nula, existe para todo x_0 , independe de x_0 e

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu\bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu\bar{D}_0)\|^{1/\tau} = \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |1 - \mu\lambda_i^t| \right)^{1/\tau}. \tag{27}$$

É possível determinar os autovalores de uma matriz circulante (Davis, 1979), e assim uma forma para (27). Tem-se que

$$\lambda_k^t = b_0^t + b_1^t(\xi_k + \xi_k^{n-1}) + b_2^t(\xi_k^2 + \xi_k^{n-2}) + b_3^t \sum_{j=3}^{n-3} \xi_k^j, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \tag{28}$$



Mas,

$$\begin{aligned} \xi_k + \xi_k^{n-1} &= 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \\ \xi_k^2 + \xi_k^{n-2} &= 4 \cos^2\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 2, \\ \sum_{j=3}^{n-3} \xi_k^j &= \frac{8 \cos^3\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 6 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + 2}{2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Logo, de (28) e (29) segue que

$$\begin{aligned} \lambda_k^t = \lambda_k &= \left\{ 2\rho_t^2 + (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right\} + \\ &\left\{ 2\rho_t \frac{\alpha_t}{n-1} - \rho_t + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right\} (2 \cos \theta) + \\ &\left\{ \rho_t^2 + 2c_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ &\left\{ 4\rho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \tag{30}$$

onde $\rho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n}\right)$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu \bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{D}_0)\|^{1/\tau} &= \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |1 - \mu \lambda_i^t| \right)^{1/\tau} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} ((|1 - \mu \lambda_i|)^\tau)^{1/\tau} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n-1} \{|1 - \mu \lambda_i|\}. \end{aligned}$$

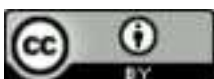
Sendo assim, segue que Λ é o raio espectral de $(I_{n-1} - \mu \bar{D})$, ou seja,

$$\Lambda = \max_{1 \leq i \leq n-1} \{|1 - \mu \lambda_i|\}, \tag{31}$$

onde $\bar{D} = \bar{D}_t = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$.

Portanto, o número de Lyapunov transversal $L_\perp(x_0) = L(x_0)\Lambda$ tem número de Lyapunov dado por (25) e o quantificador Λ dado por (31).

Baseado no exposto, é possível estabelecer um critério para a estabilidade assintótica do atrator sincronizado.



Teorema. *Considere o sistema (4), com a matriz C dada por (8), f uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$ invariante com relação a medida natural ρ . Então o número de Lyapunov transversal L_{\perp} do atrator sincronizado é dado pelo produto $L\Lambda$, onde L é dado por (25) e Λ por (31). Além disso, se $L_{\perp} < 1$ o atrator sincronizado é assintoticamente estável.*

5 Simulações numéricas

Nas simulações, utiliza-se como função responsável pela dinâmica local a função exponencial logística (a saber, $f(x) = xe^{r(1-x)}$, onde r é a taxa de reprodução intrínseca da população). Optou-se por essa função para a dinâmica local devido aos seus comportamentos diversificados, conforme r varia. Quando $r = 2,5$ a função exponencial logística possui oscilações periódicas, enquanto que para $r = 2,8$ ela comporta-se de forma caótica. São apresentados os resultados para a matriz de conexão C dada por (8). Para a combinação convexa, usa-se para determinar α_t , a função logística num comportamento caótico (porém ainda dentro do intervalo $[0, 1]$), isto é, $\alpha_{t+1} = 4\alpha_t(1 - \alpha_t)$, com $\alpha_0 = 0,5$. Para todas as simulações, utilizou-se o *software* MATLAB.

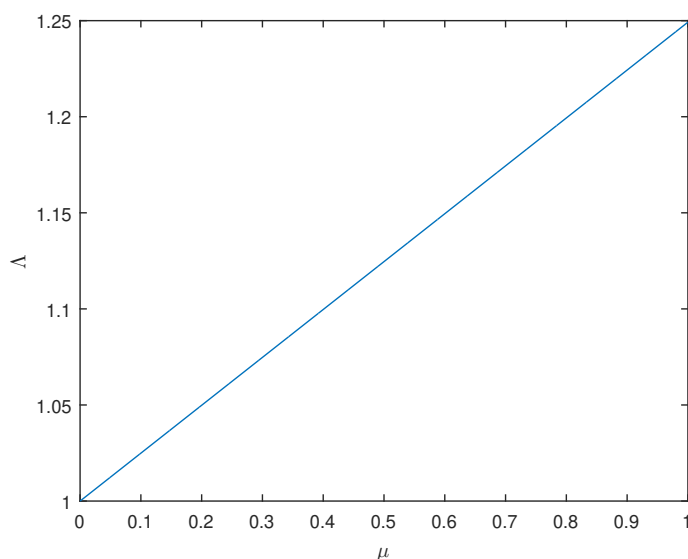
5.1 Número de Lyapunov transversal

Neste espaço é estudada a variação do número de Lyapunov transversal em função da taxa de migração μ e do parâmetro r . Será examinado o comportamento de L_{\perp} para $r = 2,5$ (quando f possui oscilações periódicas) e $r = 2,8$ (onde f comporta-se de forma caótica). Já a taxa de migração assumirá os valores $\mu = 0,1$, $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$, ou seja, uma taxa de migração baixa, uma intermediária e uma alta, respectivamente. O número de Lyapunov transversal é calculado utilizando-se 1.000 iterações, após descarte de 10.000 iterações transientes na órbita.

Inicialmente, na Figura 1, pode-se observar o comportamento de Λ conforme μ varia.



Figura 1 – Λ em função de μ , com $\alpha_0 = 0,5$ e $n = 30$

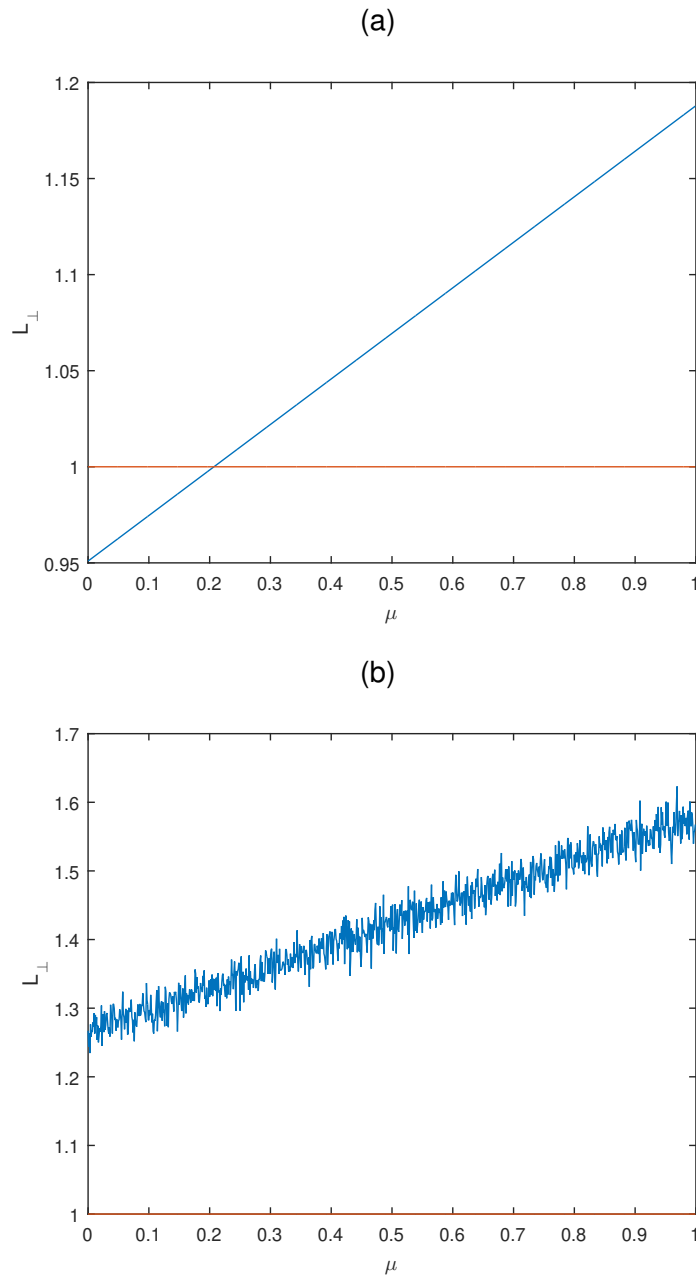


Fonte: Dias (2018, p. 29).

Analisando a Figura 2, nota-se que quando $r = 2,5$ vale $L_{\perp} < 1$ para $\mu \in [0; 0,2064)$ e $L_{\perp} \geq 1$ para $\mu \geq 0,2064$. No caso de $r = 2,8$ tem-se $L_{\perp} > 1$ para qualquer valor de μ . Portanto, a região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ é maior que a região de possível sincronia com relação à taxa de migração μ . Neste trabalho, quando fala-se sobre a região de possível sincronia com relação à taxa de migração μ , está referindo-se à região formada pelo intervalo ou união de intervalos (com relação à taxa de migração μ) onde o número de Lyapunov transversal é menor que 1. Por sua vez, a região de impossível sincronia com relação à taxa de migração μ , reporta-se a região formada pelo intervalo ou união de intervalos (com relação à taxa de migração μ) onde $L_{\perp} > 1$.

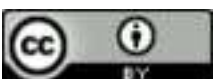


Figura 2 – $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo $n = 30$ e $\alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$; (b) $r = 2,8$



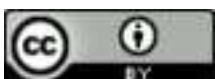
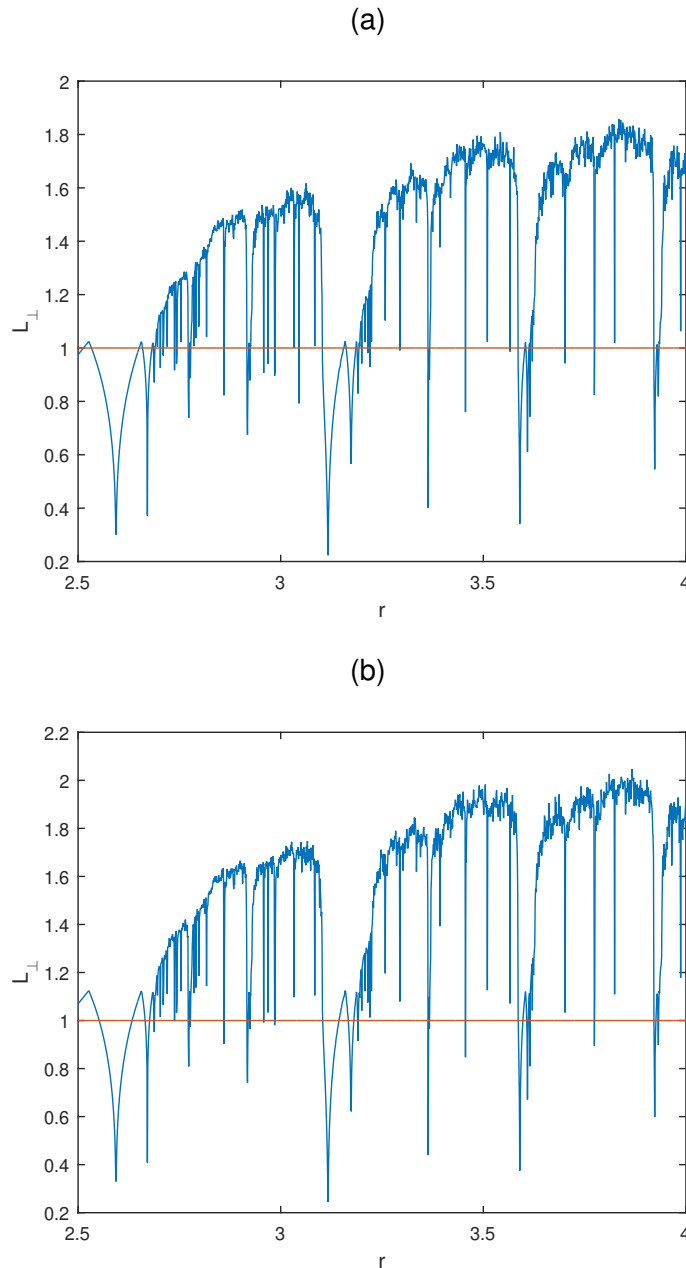
Fonte: Dias (2018, p. 30).

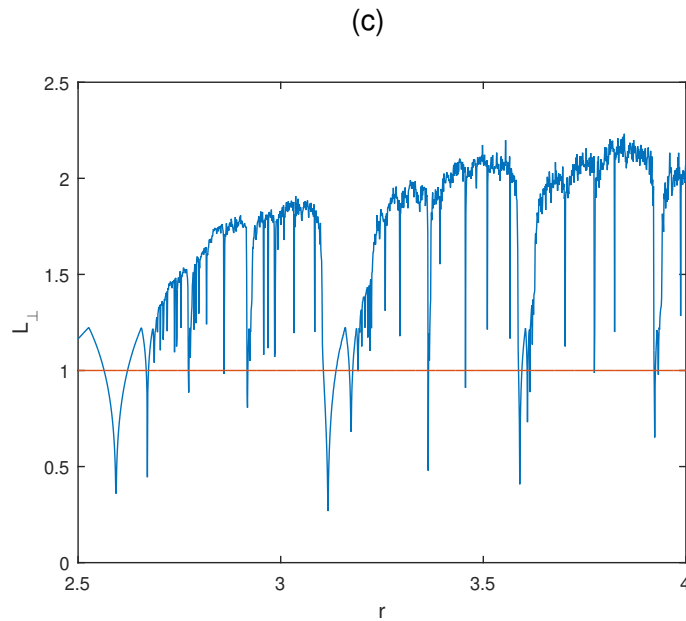
No caso da Figura 3, para a maioria dos valores de r o número de Lyapunov transversal é superior a 1, ou seja, a região de impossível sincronia com relação ao parâmetro r é maior que a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r . Neste trabalho, refere-se à região de possível sincronia com relação ao parâmetro r , como a região formada pelo intervalo ou união de intervalos (com relação ao parâmetro r) onde o número de Lyapunov transversal é menor que 1. Por



outro lado, região de impossível sincronia com relação ao parâmetro r , reporta-se a região formada pelo intervalo ou união de intervalos (com relação ao parâmetro r) onde $L_{\perp} > 1$.

Figura 3 – $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha_0 = 0,5$: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$





Fonte: Dias (2018, p. 31).

5.2 Espaço × tempo

Apresenta-se aqui os gráficos do tipo espaço × tempo, com o intuito de analisar a sensibilidade da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações. Sabe-se que a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz a dinâmica de um sítio isolado. Estando preocupado com a extinção da metapopulação, que está relacionada com a sincronização de órbitas caóticas, e como a migração interfere no comportamento da dinâmica local, serão utilizados os valores $r = 2,5$ e $r = 2,8$.

Nos gráficos espaço × tempo serão colocados no eixo vertical os sítios numerados de 1 até 30 e no eixo horizontal os últimos 40 passos de tempo, após um descarte de 9.960 transientes. Cada célula (t, i) representa a densidade de um sítio i no tempo t . As células serão pintadas em tons de branco, amarelo, vermelho e preto conforme a densidade aumenta. As condições iniciais são tomadas próximo ao estado sincronizado, isto é, $X_0 = (x_0 + \epsilon_1, x_0 + \epsilon_2, \dots, x_0 + \epsilon_n)$, sendo $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ uma pequena perturbação da órbita sincronizada, com $\epsilon_i \in (0; 0,01), i = 1, \dots, n$, escolhidos aleatoriamente.

Analisando o caso em que $r = 2,5$ como na Figura 4, tem-se para $\mu = 0,1$ sincronização. Para $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$ não ocorre sincronização.

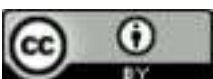
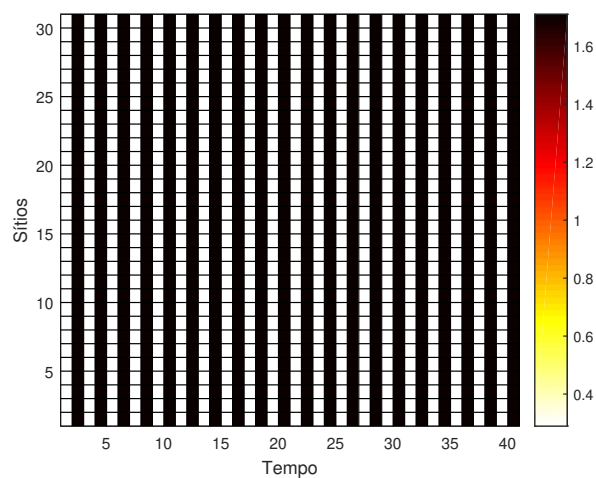
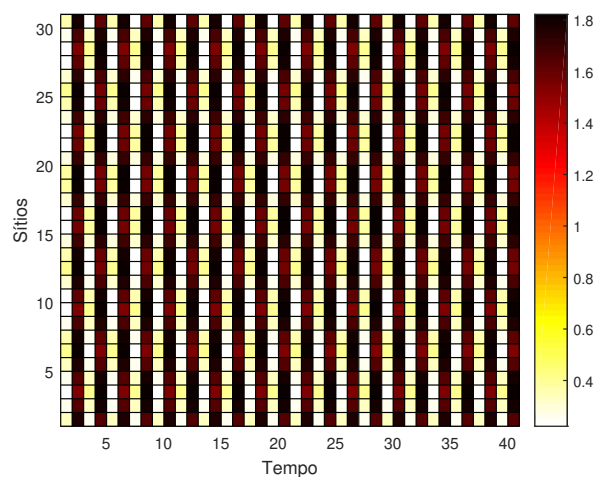


Figura 4 – Espaço \times tempo, $r = 2,5$ e rede convexa: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$

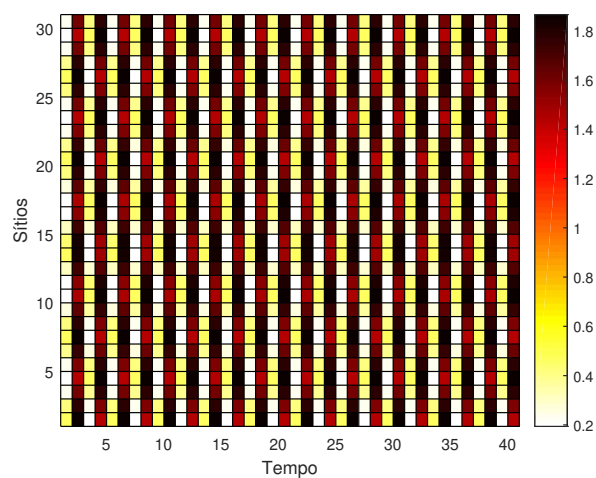
(a)



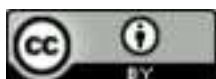
(b)



(c)

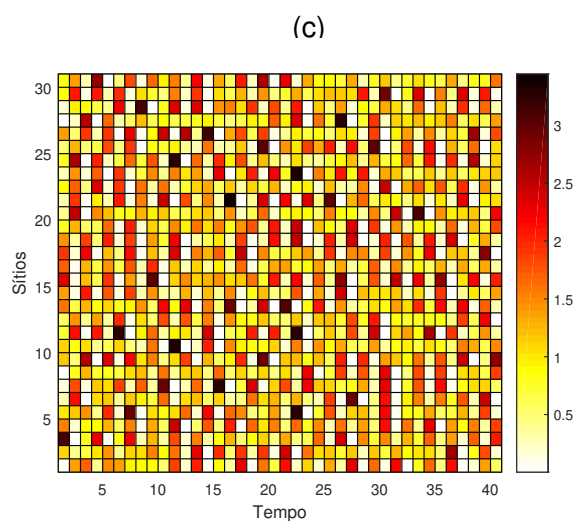
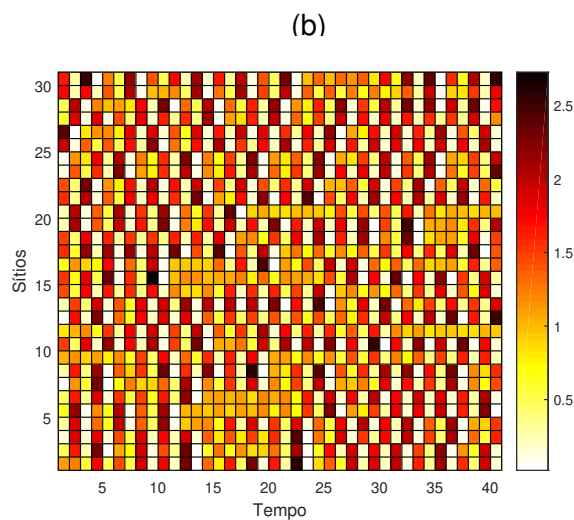
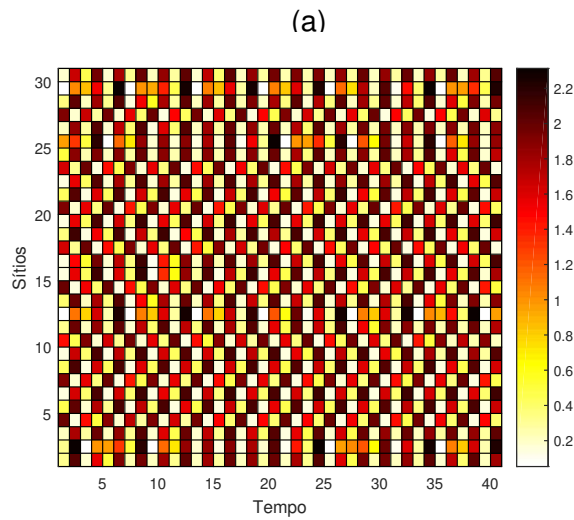


Fonte: Dias (2018, p. 34).



Para $r = 2, 8$, analisando a Figura 5 percebe-se que para todas as conexões e valores da taxa de migração não ocorre sincronia.

Figura 5 – Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e rede convexa: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$



Fonte: Dias (2018, p. 37).



6 Discussões e resultados

Neste trabalho, constituído por parte dos resultados de Dias (2018), foi abordado um modelo metapopulacional com taxa de migração independente da densidade e que inclui na sua formação o quociente entre a densidade do sítio de destino e uma média ponderada das densidades dos sítios, com pesos iguais às frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho. Com isso, tem-se um modelo que permite a escolha do sítio de destino de acordo com a sua densidade.

Este modelo foi apresentado pioneiramente por Dias e Silva (2018). Diferente deles, apresentou-se aqui um acoplamento não linear, através de uma matriz de conexão gerada por uma combinação convexa de duas matrizes, uma de conexão local e outra, de conexão global. Essa topologia de rede, possibilita que os indivíduos tenham uma movimentação por vezes permitida para qualquer sítio e outras vezes, mais restrita aos sítios mais próximos.

Além disso, o resultado aqui obtido (Teorema) é mais geral que o do trabalho de Dias e Silva (2018). Esse resultado garante a estabilidade assintótica do atrator sincronizado e diz que o número de Lyapunov transversal L_{\perp} do atrator sincronizado é dado pelo produto do número de Lyapunov da órbita por um quantificador que depende da taxa de migração e dos autovalores de uma matriz derivada da matriz de conexão. Além disso, se $L_{\perp} < 1$ o atrator sincronizado é assintoticamente estável.

O presente artigo também faz simulações numéricas da variação do número de Lyapunov transversal em relação à taxa de migração e à taxa de reprodução intrínseca da função que descreve a dinâmica local. Constatou-se, por meio destas, que a região de impossível sincronia com relação a μ ou com relação a r é maior que a região de possível sincronia destes mesmos parâmetros.

Com as simulações numéricas da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações (gráficos espaço \times tempo) concluiu-se que os valores da taxa de reprodução intrínseca e da taxa de migração para os quais mais ocorreu sincronização foram, respectivamente, $r = 2,5$ e $\mu = 0,1$ e que não ocorre sincronização de órbitas caóticas.

Para terminar, espera-se com este trabalho contribuir para os estudos em modelos metapopulacionais existentes e motivar outras pesquisas na área de dinâmica populacional.



Referências

ALLEN, J. C.; SCHAFFER, W. M.; ROSKO, D. Chaos reduces species extinction by amplifying local population noise. **Nature**, [s. l.], v. 364, p. 229-232, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1038/364229a0>.

BARRIONUEVO, J. A.; SILVA, J. A. L. Stability and synchronism of certain coupled dynamical systems. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, [s. l.], v. 40, n. 3, p. 939-951, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1137/060658436>.

DAVIS, P. J. **Circulant Matrices**. New Jersey: John Wiley & Sons, 1979. Disponível em: https://archive.org/details/isbn_9780471057710. Acesso em: 10 jul. 2024.

DIAS, F. H. S. **Estudo da sincronização de novos modelos metapopulacionais com acoplamento não linear**. Orientador: Jacques Aveline Loureiro da Silva. 2018. 141 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018. DOI: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/189363>.

DIAS, F. H. S.; SILVA, J. A. L. Sincronismo em um novo modelo metapopulacional com migração independente da densidade. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, São Carlos, v. 6, n. 1, 2018. DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2018.006.01.0432>.

DÍAZ, L. J.; JORGE, D. R. **Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via funções Contínuas**. Rio de Janeiro, RJ: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/26CBM_17.pdf. Acesso em: 10 jul. 2024.

EARN, D. J. D.; LEVIN, S. A.; ROHANI, P. Coherence and conservation. **Science**, [s. l.], v. 290, n. 5495, p. 1360-1364, 2000. DOI: <https://www.science.org/doi/10.1126/science.290.5495.1360>.

ECKMANN, J. -P.; RUELLE, D. Ergodic Theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, [s. l.], v. 57, n. 3, p. 617-656, 1985. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.57.617>.

HANSKI, I. Metapopulation dynamics. **Nature**, [s. l.], v. 396, p. 41-49, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1038/23876>.

HANSKI, I.; ZHANG, D.-Y. Migration, metapopulation dynamics and fugitive co-existence. **Journal of Theoretical Biology**, [s. l.], v. 163, n. 4, p. 491-504, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1006/jtbi.1993.1134>.

HASSEL, M. P. Density-dependence in single-species populations. **Journal of Animal Ecology**, [s. l.], v. 44, n. 1, p. 283-295, 1975. DOI: <https://doi.org/10.2307/3863>.

HASSEL, M. P.; LAWTON, J. H.; MAY, R. M. Patterns of dynamical behaviour in single-species populations. **Journal of Animal Ecology**, [s. l.], v. 45, n. 2, p. 471-486, 1976. DOI: <https://doi.org/10.2307/3886>.



HASSEL, M. P.; MIRAMONTES, O.; ROHANI, P.; MAY, R. M. Appropriate Formulations for Dispersal in Spatially Structured Models: Comments on Bascompte & Sole. **Journal of Animal Ecology**, [s. l.], v. 64, n. 5, p. 662-664, 1995. DOI: <https://doi.org/10.2307/5808>.

KAHILAINEN, A.; VAN NOUHUYS, S.; SCHULZ, T.; SAASTAMOINEN, M. Metapopulation dynamics in a changing climate: Increasing spatial synchrony in weather conditions drives metapopulation synchrony of a butterfly inhabiting a fragmented landscape. **Global Change Biology**, [s. l.], v. 24, n. 9, p. 4316-4329, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1111/gcb.14280>.

LEVINS, R. Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control. **Bulletin of Entomological Society of America**, [s. l.], v. 15, n. 3, p. 237-240, 1969. DOI: <https://doi.org/10.1093/besa/15.3.237>.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology**. 2. ed. Berlin: Springer, 1996. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-08542-4>. Acesso em: 16 jul. 2024.

OLIVEIRA, K. **Um primeiro curso sobre teoria ergódica com aplicações**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2005. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/25CBM_14.pdf. Acesso em: 16 jul. 2024.

PIKOVSKY A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. Disponível em: www.cambridge.org/9780521592857. Acesso em: 12 ago. 2024.

ROHANI, P.; RUXTON, G. D. Dispersal-induced instabilities in host-parasitoid metapopulations. **Theoretical Population Biology**, [s. l.], v. 55, n. 1, p. 23-36, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1006/tpbi.1998.1389>.

SILVA, J. A. L. Cluster formation in a heterogeneous metapopulation model. **Journal of Mathematical Biology**, [s. l.], v. 72, n. 6, p. 1531-1553, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00285-015-0916-x>.

SILVA, J. A. L.; BARRIONUEVO, J. A.; GIORDANI, F. T. Synchronism in population networks with nonlinear coupling. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, [s. l.], v. 11, n. 2, p. 1005-1016, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.01.036>.

UCHMAŃSKI, J. Individual variability and metapopulation dynamics: An individual-based model. **Ecological Modelling**, [s. l.], v. 334, n. 1, p. 8-18, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2016.04.019>.

