

Controlabilidade local para um modelo Lotka-Volterra

Local controllability for a Lotka-Volterra model

Controlabilidad local para un modelo Lotka-Volterra

Francis Félix Córdova Puma¹

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Blumenau, SC, Brasil

 <https://orcid.org/0009-0008-5422-7258>,  <http://lattes.cnpq.br/0984985253008832>

Adriana Washington Henarejos²

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Blumenau, SC, Brasil

 <https://orcid.org/0009-0003-0763-5199>,  <http://lattes.cnpq.br/2933459548536299>

Resumo: Neste artigo, aplicamos as ferramentas da teoria de controlabilidade matemática em modelos biológicos. Utilizou-se do método de aproximação em torno de pontos de equilíbrio para estudar a controlabilidade local de sistemas do tipo Lotka-Volterra, que modelam a dinâmica populacional entre espécies de presas e predadores. Realizamos uma análise para determinar se problemas específicos do tipo Lotka-Volterra apresentam a propriedade de controlabilidade local, o que é garantido para determinados pontos de equilíbrio. Tal propriedade consiste em garantir a existência de um controle, $u \in L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R})$, de tal forma que a solução satisfaz que $x_1(\tau) = x_{1,1}$ e $x_2(\tau) = x_{2,1}$ para cada par $\{(x_{1,0}, x_{2,0}), (x_{1,1}, x_{2,1})\}$ em uma vizinhança de algum ponto de equilíbrio do sistema, em que $x_1(t), x_2(t)$ são as populações de presas e predadores, respectivamente, em um tempo $t > 0$ e $x_{1,0}, x_{2,0}$ representam as populações iniciais.

Palavras-chave: modelagem matemática; controlabilidade; modelo de Lotka-Volterra.

Abstract: In this article, we apply the tools of mathematical controllability theory in biological models. The approximation method around equilibrium solutions was used to study the local controllability of Lotka-Volterra systems, which model population dynamics between prey and predator species. We performed an analysis to determine if specific problems of the Lotka-Volterra type have the property of local controllability, which is guaranteed for certain equilibrium points. This property consists of guaranteeing the existence of a control, $u \in L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R})$, such that the solution satisfies $x_1(\tau) = x_{1,1}$ and $x_2(\tau) = x_{2,1}$ for each pair $\{(x_{1,0}, x_{2,0}), (x_{1,1}, x_{2,1})\}$ in a neighborhood of some equilibrium point of the system, where $x_1(t), x_2(t)$ denote the populations of prey

¹**Currículo sucinto:** Graduado em Matemática pela Universidad Nacional del Callao, mestre e doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Professor da Universidade Federal de Santa Catarina. **Contribuição de autoria:** administração do projeto, análise formal, conceituação, curadoria de dados, escrita — primeira redação, investigação, metodologia, supervisão, validação e visualização. **Contato:** francis.cordova@ufsc.br.

²**Currículo sucinto:** Técnica em informática pelo Centro de Educação Profissional Hermann Hering, licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina. Professora vinculada à Secretaria de Educação do Estado de Santa Catarina. **Contribuição de autoria:** análise formal, escrita — primeira redação, escrita — revisão e edição, software, supervisão, validação. **Contato:** adriana.washington07@gmail.com.



and predator species, respectively, at time $t > 0$ e $x_{1,0}, x_{2,0}$ are the initial populations.

Keywords: mathematical modeling; controllability; Lotka-Volterra model.

Resumen: En este artículo, aplicamos las herramientas de la teoría de controlabilidad matemática en modelos biológicos. Se utilizó el método de aproximación alrededor de soluciones de equilibrio para estudiar la controlabilidad local de sistemas tipo Lotka-Volterra, que modelan la dinámica de población entre especies de presas y depredadores. Realizamos un análisis para determinar si problemas específicos del tipo Lotka-Volterra tienen la propiedad de controlabilidad local, que está garantizada para ciertos puntos de equilibrio. Esta propiedad consiste en certificar la existencia de un control, $u \in L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R})$, tal que la solución satisfice que $x_1(\tau) = x_{1,1}$ y $x_2(\tau) = x_{2,1}$ para cada par $\{(x_{1,0}, x_{2,0}), (x_{1,1}, x_{2,1})\}$ en una vecindad de algún punto de equilibrio del sistema, donde $x_1(t), x_2(t)$ denotan las poblaciones de especies de presas y depredadores, respectivamente, en el tiempo $t > 0$ y $x_{1,0}, x_{2,0}$ son las poblaciones iniciales.

Palabras clave: modelaje matemático; controlabilidad; modelo de Lotka-Volterra.

Data de submissão: 28 de setembro de 2023.

Data de aprovação: 29 de outubro de 2023.

1 Introdução

A matemática mostra-se como uma ferramenta flexível, pelo fato de conseguir alcançar diversas áreas, como as engenharias, a computação, a biologia e tantas outras. Um desafio que pode ser evidenciado no estudo da matemática é o de encontrar utilidade em resultados já existentes para fins aplicáveis que precisam de solução. Nesse contexto, o presente trabalho elucidava como ferramentas matemáticas da Teoria de Controle, que surgem no contexto da engenharia de controle, podem ser aplicadas em áreas como a biologia, em especial, em modelos do tipo Lotka-Volterra. Acreditamos que a aplicação dessas ferramentas na biologia fornece novas perspectivas de intervenção nos modelos, visando resolver problemas já colocados em discussão e eventualmente com outras propostas de solução. As ferramentas da teoria de controle tornarão possível a manipulação de uma ou mais variáveis de um dado sistema biológico, encaminhando o comportamento da solução para um valor ou resultado almejado. Para esse estudo, Coron (2007), Baumaister e Leitão (2014) e Salvador e Arenales (2012) foram as principais referências utilizadas. Recomenda-se que leitores não familiarizados com equações diferenciais leiam Boyce e DiPrima (2015) ou o utilizem como recurso de pesquisa, uma vez que o estudo oculta alguns resultados considerados como conhecimentos prévios pelos autores.



Na seguinte seção, são apresentados alguns modelos biológicos do tipo Lotka-Volterra. Essa seção almeja, por meio de um processo construtivo e de modelagem, determinar as bases para o desenvolvimento de modelos matemáticos aplicados a problemas biológicos. Em especial, a Subseção 2.3 será dedicada a toda a evidenciação da teoria de controlabilidade matemática, bem como suas aplicações correlatas. Na Seção 3, é apresentado um caso especial de controlabilidade para problemas não lineares: a controlabilidade local. Por fim, os resultados, discussões e conclusões do estudo são apresentados na Seção 4 e na Seção 5. De modo geral, o objetivo do estudo se dá pela aplicação das ferramentas da teoria de controlabilidade matemática em modelos biológicos do tipo Lotka-Volterra, em especial o modelo com crescimento logístico, que mostra-se como um modelo que consegue representar a realidade com grande fidedignidade.

2 Modelagem Matemática do Problema

Os modelos matemáticos objetivam abstrair e simplificar determinado fenômeno, o que torna possível realizar previsões acerca do sistema. Diversos fenômenos biológicos podem ser modelados por sistemas de equações diferenciais, de modo que seja possível descrever, prever e controlar as variáveis do sistema. O sistema de Lotka-Volterra, modela a interação de duas espécies em uma relação de presa-predador. Visando uma melhor compreensão do modelamento matemático do problema de controle, apresentamos o exemplo clássico das lebres e dos lincês canadenses.

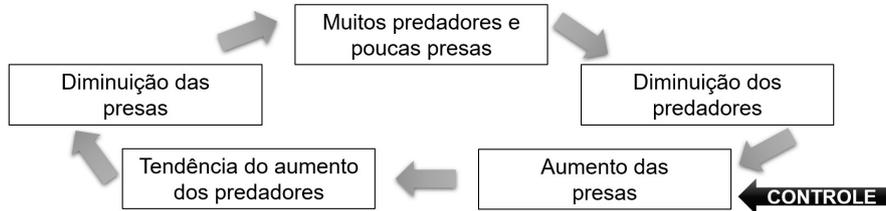
O modelo Lotka-Volterra é frequentemente associado à relação presa-predador entre lincês e lebres no Canadá, documentada pela empresa *Hudson Bay Company* de 1735 a 1935. Por meio de registros de caça e vendas de peles ao longo de várias décadas, foi possível estudar e compreender as dinâmicas populacionais entre as espécies. Como resultado das análises dos dados, observa-se a sincronia dos ciclos populacionais das espécies, de modo que os picos populacionais das espécies eram acompanhados com uma diferença de cerca dois anos (Castro; Restrepo, 2021). Ademais, os ciclos observados se estendiam por cerca de 10 anos.

Atualmente, vê-se que esse padrão cíclico é algo comum para esse tipo de interação (presa-predador), no entanto, durante o período de estudo inicial de tal temática, o reconhecimento desse padrão tornou-se um marco importante para os estudos da área da biomatemática, sendo um exemplo revisitado até os dias atuais. Essa ilustração traz à tona o comportamento cíclico que podemos melhor esclarecer na Figura 1. E será justamente por meio de uma tentativa de alcançar um es-



tado almejado nesse sistema, interferindo de certo modo na dinâmica cíclica, que será necessário abordar e definir, conceitos de controle matemático, nesse caso, para modelos do tipo Lotka-Volterra.

Figura 1 – Inserção de um controle na dinâmica cíclica do modelo de Lotka-Volterra



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

2.1 Modelos de Evolução de um Ecossistema

Uma população que cresce e se desenvolve de acordo com o *crescimento malthusiano* crescerá exponencialmente (Bürger, 2012) e seu tamanho ultrapassará qualquer limite. O modelo malthusiano não se mostra muito realista, uma vez que há à disposição na natureza uma quantidade finita de recursos. Um modelo contemplando tais limitantes é o do *crescimento logístico* considerando uma população que se reproduz rapidamente no início, porém, com o tempo, sua taxa de crescimento diminui à medida que a população se torna cada vez mais numerosa, atingindo sua capacidade máxima de crescimento, o que resulta em uma estabilização.

A equação logística de crescimento populacional, conhecida como Modelo de Verhulst é dada por:

$$x_1' = ax \left(1 - \frac{x_1}{K}\right)$$

em que $K > 0$ é a capacidade de suporte e $a > 0$ é a taxa de crescimento malthusiano da população x_1 . A capacidade de suporte é um conceito biológico que está relacionado com a capacidade máxima de um ecossistema sustentar uma determinada população.

O modelo de Lotka-Volterra trata-se de um sistema composto por um par de equações diferenciais de primeira ordem não lineares. As equações do modelo descreverão a dinâmica de um sistema biológico dado por duas espécies, entre as quais existe uma relação presa-predador num determinado ambiente. Considerando $x_1(t)$ como a quantidade de uma população de presas (que varia com o tempo) e $x_2(t)$ a quantidade de uma população de predadores (que varia com o tempo) estabeleceremos o sistema que modela a interação entre as espécies.



Para modelar o comportamento da população de presas consideramos que, na presença de predadores, a interferência na quantidade de indivíduos apresenta um decréscimo em sua taxa de crescimento específico. Sendo $a > 0$ a taxa de crescimento da presa (dada naturalmente pelo nascimento de novos indivíduos) e $c > 0$ o parâmetro de interação entre as espécies de presa e predador, temos que:

$$\text{Taxa de crescimento específico das presas : } \frac{x_1'}{x_1} = a - cx_2.$$

Já no caso do predador, podemos fazer uma construção análoga, no entanto, deve-se vislumbrar que, em um ambiente sem alimento (presa), a população de predadores tenderá a decair de modo exponencial, ou seja, com uma taxa de decaimento $-b < 0$. Porém, devemos nos lembrar que a existência de presas proporciona o crescimento do número de predadores. Logo, sendo $d > 0$ o parâmetro de interação entre as espécies, obtemos:

$$\text{Taxa de crescimento específico de predadores : } \frac{x_2'}{x_2} = -b + dx_1.$$

Assim, o modelo de Lotka-Volterra é dado por:

$$\begin{cases} x_1'(t) = ax_1 - cx_2x_1 \\ x_2'(t) = -bx_2 + dx_1x_2 \\ x_1(0) = x_{1,0} \\ x_2(0) = x_{2,0} \end{cases} \quad (1)$$

em que $x_{1,0}$ e $x_{2,0}$ são as populações iniciais das presas e predadores, correspondentemente.

Por outro lado, considerando a hipótese de que o meio no qual se desenvolve a interação das espécies condiciona a população de presas para um crescimento logístico, isto é,

$$\text{Taxa de crescimento logístico específico das presas : } \frac{x_1'}{x_1} = a \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - cx_2,$$

considerando essa nova modelagem das taxas de crescimento específico, obtemos o seguinte modelo de tipo Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x_1'(t) = ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - cx_2x_1 \\ x_2'(t) = -bx_2 + dx_1x_2 \\ x_1(0) = x_{1,0} \\ x_2(0) = x_{2,0}. \end{cases} \quad (2)$$

Ambos os modelos, (1) e (2), serão chamados de tipo Lotka-Volterra sem controle.



Se considerarmos um ecossistema de n espécies denotado por (x_1, x_2, \dots, x_n) e as taxas de variação para cada espécie dadas por:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

obtemos o seguinte sistema que generaliza o modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (3)$$

Para facilitar a escrita, denotamos por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Na Teoria de Equações Diferenciais Vetoriais, o sistema (3) é chamado de **Sistema Autônomo**.

Definição 2.1 (Equação Diferencial Autônoma). *Dizemos que uma equação diferencial $x' = f(t, x)$ é autônoma se $f(t, x)$ independe de t . Nesse caso, se escreve $f(t, x) = f(x)$, e consideramos a equação diferencial*

$$x' = f(x). \quad (4)$$

Definição 2.2 (Órbitas de uma Equação Diferencial Autônoma). *Sejam $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável verificando (4) e o gráfico de $x(\cdot)$, denotada como $\gamma_\tau(x)$,*

$$\gamma_\tau(x) = \{(t, x(t)) \mid t \in (0, \tau)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Uma órbita de (4) em $(0, \tau)$ é a projeção de $\gamma_\tau(x)$ sobre o \mathbb{R}^n , isto é,

$$\{x(t) \mid t \in (0, \tau)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

2.2 Exemplo Numérico

Pode-se modelar os gráficos¹ que representam as dinâmicas dadas pelos modelos deduzidos na Subseção 2.1; para tanto, consideraremos que $a = 0,5$; $b = 0,8$; $c = 0.02$ e $d = 0.03$ ². Consideramos também que ambas as populações iniciais de presas $x_{1,0}$ e de predadores $x_{2,0}$ será de 20 e 2, respectivamente, e $t \in [0, 30]$.

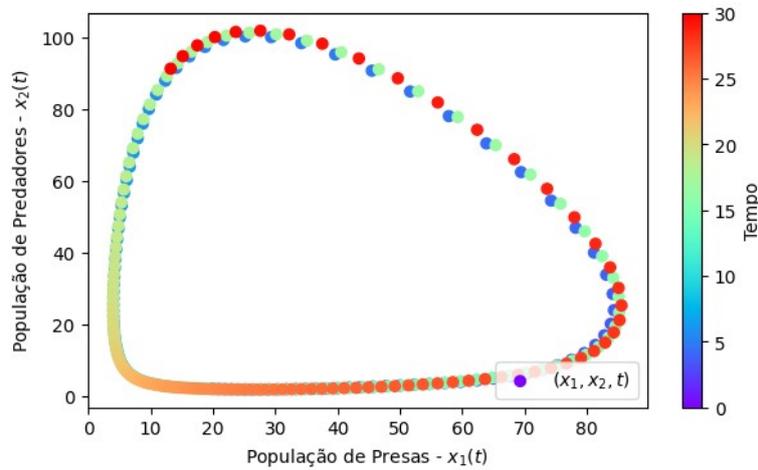
¹Os gráficos apresentados foram gerados utilizando a linguagem de programação Python 3 e o ambiente de programação interativo Google Colab. Além disso, o método numérico utilizado na resolução das Equações Diferenciais foi o método de Runge-Kutta de quarta e de quinta ordem.

²Os valores utilizados para a, b, c e d , foram obtidos a partir de alterações de valores encontrados em Boyce e DiPrima (2015), isto é, são valores genéricos, determinados a fim de melhor evidenciar o movimento cíclico nas figuras. Os valores de $x_{1,0}, x_{2,0}$, assim como o intervalo definido para t e o valor de K , que aparecerá posteriormente, também são genéricos.



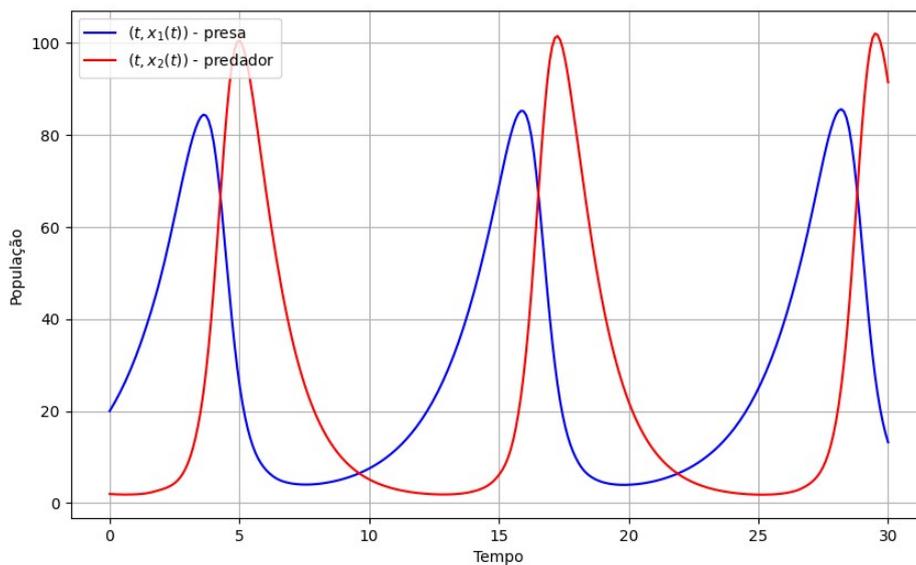
O gráfico que representará as relações entre as populações de predadores e presa, de acordo com o modelo (1) será dado pelo plano de fase elucidado na Figura 2, ao passo em que o gráfico que irá apresentar a evolução populacional das presas e dos predadores ao decorrer do tempo será representado pela figura Figura 3. A Figura 4 irá evidenciar a tripla (x_1, x_2, t) .

Figura 2 – Órbita $(x_1(t), x_2(t))$ do modelo (1)



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

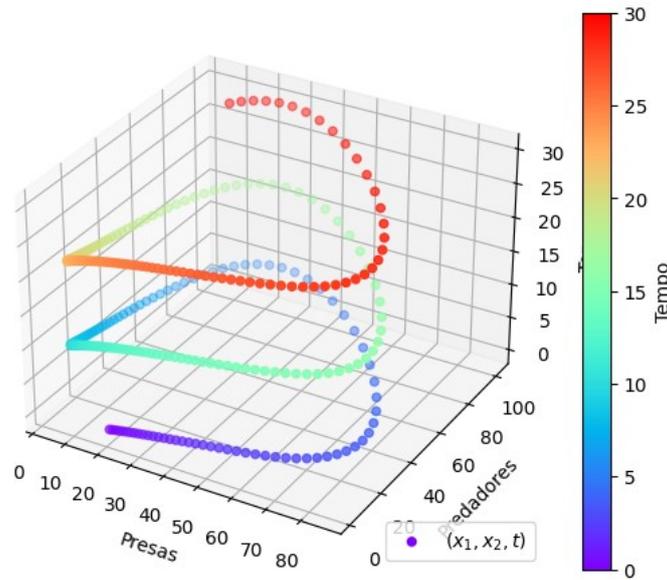
Figura 3 – Gráfico das trajetórias $(t, x_1(t))$ e $(t, x_2(t))$ do modelo (1)



Fonte: Elaboração dos autores (2023).



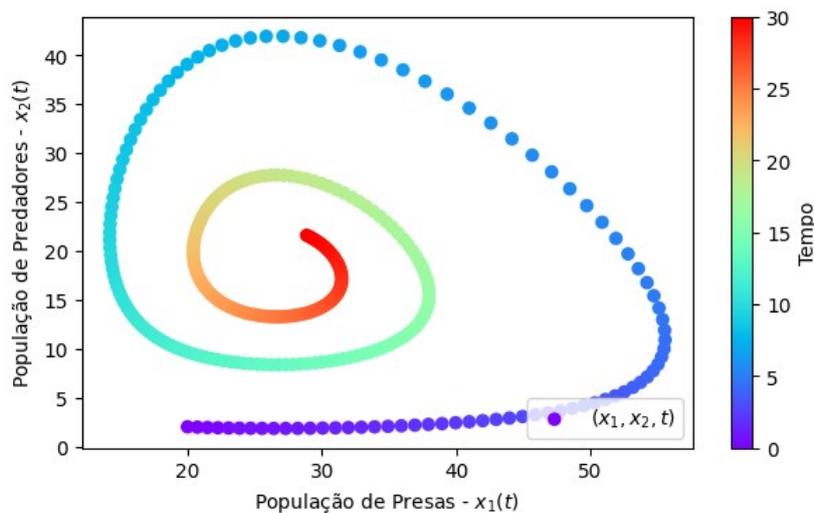
Figura 4 – Gráfico (x_1, x_2, t) do modelo (1)



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

O gráfico que representará as relações entre as populações de predadores e presa, segundo o modelo (2) será dado pelo plano de fase na Figura 5, ao passo em que o gráfico que irá apresentar a evolução populacional das presas e dos predadores ao decorrer do tempo será representado pela Figura 6. A Figura 7 representa a tripla (x_1, x_2, t) . Para a simulação foram considerados os mesmos valores utilizados anteriormente para $a, b, c, d, x_{1,0}, x_{2,0}$ e t , considerando agora $K = 100$.

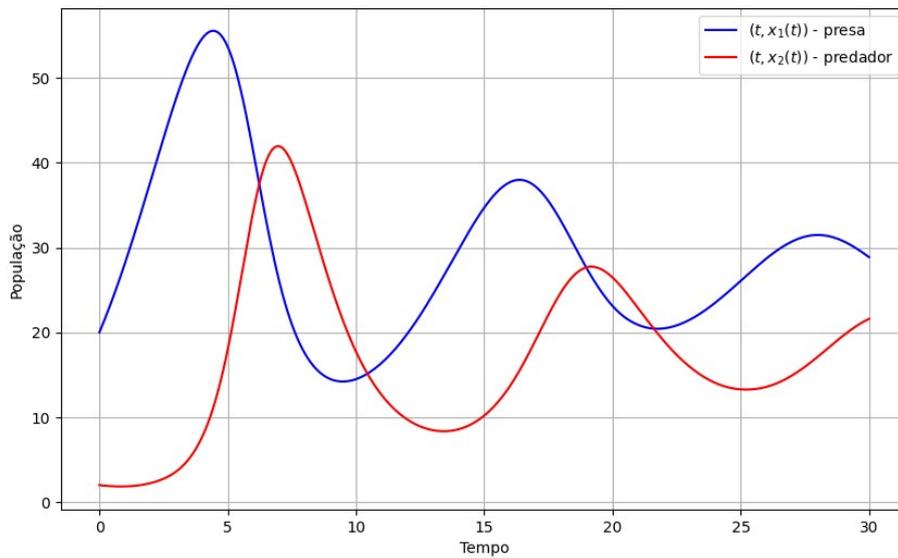
Figura 5 – Órbita $(x_1(t), x_2(t))$ do modelo (2)



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

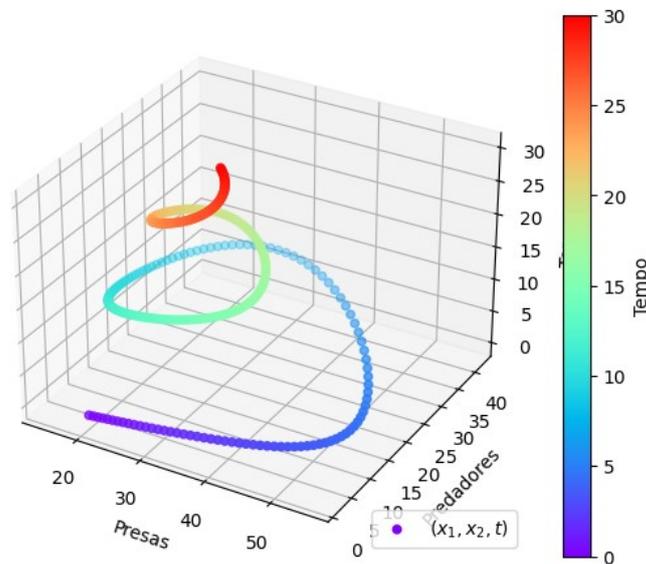


Figura 6 – Gráfico das trajetórias $(t, x_1(t))$ e $(t, x_2(t))$ do modelo (2)



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Figura 7 – Gráfico (x_1, x_2, t) do modelo (2)



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

2.3 O Problema de Controle

Sejam $f(x)$ um campo vetorial do tipo Lotka-Volterra, definido em um subconjunto aberto \mathcal{V} de \mathbb{R}^n , $n \geq m$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz de constantes e $\tau \in \mathbb{R}^+$. O Problema de Controle consiste em



determinar se uma solução do sistema

$$x' = f(x) + Bu, \quad x(0) = a \tag{5}$$

pode alcançar um resultado almejado $b = x(\tau)$, por meio da inclusão de uma perturbação $u(\cdot)$, que trata-se dos controles $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ mensuráveis e essencialmente limitados em $[0, \tau]$. Isto é,

$$u \in L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m) := \{w : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m \mid w \text{ é mensurável e essencialmente limitada}\}.$$

É conhecido que $L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m)$ é um espaço de Banach com a norma do supremo essencial:

$$\|w\|_\infty := \text{ess sup } \{|w(t)| ; t \in [0, \tau]\}. \tag{6}$$

Para estabelecer a definição de controlabilidade consideramos a notação: $f(x) + Bu = F(x, u)$. $F(\cdot, \cdot)$ é um campo vetorial definido em um subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e, a partir de agora, consideraremos o **Sistema de Controle** associado:

$$x' = F(x, u). \tag{7}$$

A controlabilidade de (7) será estudada por meio de uma **Função de Transição** \mathcal{F} , com domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m)$,

$$\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (a, u) \mapsto (a, x(\tau)). \tag{8}$$

A função \mathcal{F} retorna o estado final $x(\tau)$, dado um estado inicial $a = x(0)$ e um controle $u \in L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m)$, em que $x(\cdot)$ é um caminho diferenciável que satisfaz a equação (7). No caso em que $F(\cdot, \cdot)$ for um **campo linear de vetores**, usamos a definição que segue:

Definição 2.3 (Sistema Linear Controlável). *Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes de constantes e $Ax + Bu$ um campo linear definido em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. O Sistema $x' = Ax + Bu$ é dito **Sistema Linear Controlável**, se $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ for sobrejetiva.*

Existe um resultado que caracteriza a controlabilidade no contexto linear, conhecida como o Teorema de Kalman (Baumaister; Leitão, 2014). Tal teorema afirma que o **Teste de Kalman**,

$$\text{rank } [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n, \tag{9}$$

é uma condição necessária e suficiente para o sistema $x' = Ax + Bu$ ser controlável. Observe que tal condição independe do tempo de controle. Então, se o sistema linear for controlável, ele é controlável em qualquer tempo τ .



No caso em que $F(\cdot, \cdot)$ é não linear, teremos uma adequação da Definição 2.3, para controlabilidade local, que está baseada em uma análise do problema linearizado em torno de (x_e, u_e) (ponto de equilíbrio) que será estudado na Seção 3. Agora, apresentamos alguns conceitos e resultados prévios para a boa definição da Função de Transição \mathcal{F} , quando o campo vetorial F é não linear.

Seja \mathcal{O} um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^p . Um campo de vetores de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, é uma aplicação $G : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ k -vezes diferenciável com a k -ésima derivada contínua. $G \in C^0(\mathcal{O}; \mathbb{R}^p)$ denotará um campo contínuo em \mathcal{O} .

Teorema 2.4. ³ *Sejam $\tau \in \mathbb{R}^+$, \mathcal{V} um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $x' = F(x, u)$ um Sistema de Controle satisfazendo as hipóteses (H1)-(H2):*

H1) $F(\cdot, u)$ é de classe C^1 em \mathcal{V} , para cada $u \in \mathbb{R}^m$;

H2) $F(\cdot, \cdot)$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot, \cdot)$ são de classe C^0 em $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^m$.

Então, para toda função $w \in L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m)$ e todo $x_0 \in \mathcal{V}$, existe um subintervalo não vazio $J \subset [0, \tau]$, $0 \in J$, e existe $\xi : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução de

$$\xi'(t) = F(\xi(t), w(t)), \quad t \in J, \tag{10}$$

$$\xi(0) = x_0. \tag{11}$$

Além disso, a solução é maximal e única, isto é, se

$$\varepsilon : J' \rightarrow \mathcal{V}$$

é outra solução de (10)-(11), definida em um subintervalo $J' \subset [0, \tau]$, então necessariamente

$$J' \subset J \text{ e } \xi = \varepsilon \text{ em } J'.$$

Definição 2.5 (Trajetórias de um Sistema de Controle). *O par $(\xi(t), w(t))$, $t \in J$ é chamada de **Trajetória do Sistema de Controle** $x' = F(x, u)$ em J se ela satisfaz (10).*

Definição 2.6 (Controle Admissível). *Sejam $\tau \in \mathbb{R}^+$, w, x_0 e J nas condições do Teorema 2.4. Se $J = [0, \tau]$, então w é chamado de **controle admissível** para x_0 .*

Observe que o campo $F(x, u) = f(x) + Bu$ satisfaz as hipóteses (H1)-(H2) quando $f(\cdot)$ é de classe C^1 em \mathcal{V} e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz de constantes. Além disso, as derivadas parciais são

³Para a demonstração, ver o Lema 2.6.2 da página 44 em Sontag (1998).



dadas por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dx} := \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{ij} \text{ e } \frac{\partial F}{\partial u} = B.$$

Logo, é fácil verificar que a diferencial $dF[\cdot, \cdot]$ é definida como:

$$dF[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$$

$$(x, u) \mapsto dF[x, u]$$

em que

$$dF[x, u] \cdot (\lambda, \mu) = \left[\frac{df}{dx}(x) \right] \lambda + B\mu, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Definição 2.7 (Solução de Equilíbrio). *Sejam \mathcal{V} um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n , $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz constante. Um **Ponto de Equilíbrio** ou **Solução de Equilíbrio** do sistema*

$$x' = f(x) + Bu \tag{12}$$

é um par $(x_e, u_e) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(x_e) + Bu_e = 0.$$

Observe que, se (x_e, u_e) é um ponto de equilíbrio, então

$$(x(t), u(t)) := (x_e, u_e), \quad t \in J$$

é uma solução estacionária do sistema (12).

Definição 2.8 (Função de Transição de Estados). *Sejam \mathcal{V} um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\mathcal{V}; \mathbb{R}^n)$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz constante e $\tau \in \mathbb{R}^+$. Definimos a Função de Transição de estados $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$ do sistema (12) como:*

$$\mathcal{D} := \{(x, u) \mid x \in \mathcal{V}, u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ é um controle admissível para } x\} \tag{13}$$

$$\mathcal{F}(x, u) := (x, \xi(\tau)), \quad \forall (x, u) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m), \tag{14}$$

em que $\xi(\cdot)$ é a única solução de $\xi' = f(\xi) + Bu$, $\xi(0) = x$, em $J = [0, \tau]$.

O Teorema 2.9 que segue é uma aplicação direta do Teorema para Funções de Transição mais gerais e pode ser encontrada em Sontag (1998). Tais resultados mostram que $\mathcal{F} \in C^1$ e fornecem uma expressão matemática para o cálculo de $d\mathcal{F}[x_e, u_e]$, para qualquer solução estacionária (x_e, u_e) do sistema de controle.



Teorema 2.9 ((Sontag, 1998, p. 57) – Teorema 1). *Considere \mathcal{F} , a Função de Transição de Estados dada pela definição (2.8), bem como um ponto de equilíbrio $(x_e, u_e) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}^m$ do sistema $x' = f(x) + Bu$, e se $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m)$, considere também a solução $\lambda : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ da equação diferencial:*

$$\lambda' = \left[\frac{df}{dx}(x_e) \right] \lambda + B\mu \tag{15}$$

com condição inicial $\lambda(0) = \lambda_0$. Então, o conjunto \mathcal{D} é um subconjunto aberto de $\mathcal{V} \times L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m)$ e \mathcal{F} é de classe $C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Além disso, a derivada $d\mathcal{F}[\cdot, \cdot]$, restrita a pontos de equilíbrio, pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$d\mathcal{F}[x_e, u_e](\lambda_0, \mu) = (\lambda_0, \lambda(\tau)),$$

em que λ é dado por (15). Ou seja, $d\mathcal{F}[x_e, u_e]$ é igual a Função de Transição correspondente à linearização do sistema em torno de (x_e, u_e) .

3 Controlabilidade Local

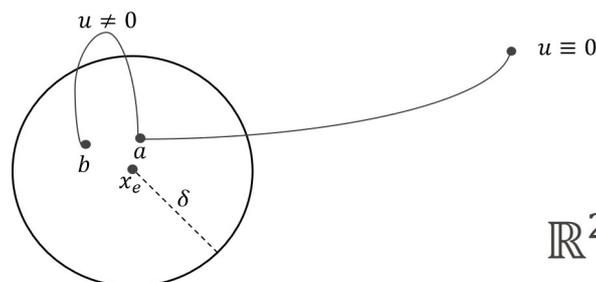
Desenvolveremos resultados de controlabilidade local considerando o sistema (12), um ponto de equilíbrio (x_e, u_e) e as notações já estabelecidas. Evidenciaremos a definição que usamos para controlabilidade local para um tempo pequeno $\tau > 0$ (deveríamos, de fato, denotar como controlabilidade local de pequeno porte com controles próximos a u_e).

Definição 3.1 (Controlabilidade Local). *Dizemos que o sistema (12) é **Localmente Controlável** em torno a (x_e, u_e) (ponto de equilíbrio) se para todo $\tau > 0$, existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade:*

$\forall a, b \in \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x_e\| < \delta\}$, *existe $u \in L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R})$ tal que $\|u(t) - u_e\| < \tau, \forall t \in [0, \tau]$ e*

$$x' = f(x) + Bu(t), x(0) = a \implies x(\tau) = b.$$

Figura 8 – Ilustração da Controlabilidade Local



Fonte: Elaboração dos autores (2023).



É importante destacar que a propriedade de controlabilidade apresentada na Definição 2.3, trata-se de uma propriedade global, no sentido de que conseguimos alcançar estados que não dependem de um determinado conjunto. De acordo com Coron (2007), a caracterização da controlabilidade local é um problema aberto para sistemas de controle gerais. No entanto, há ferramentas poderosas que garantem condições suficientes, como será visto no Teorema 3.3, conhecido como o **Teste linear para Controlabilidade**. Para tal fim, apresentaremos um resultado clássico da Análise matemática.

Teorema 3.2 (Teorema da Aplicação Inversa). *Suponha que \mathcal{O} é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^p e $\mathcal{F} \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R}^p)$. Se a derivada em $\bar{a} \in \mathcal{O}$, $d\mathcal{F}[\bar{a}]$, é invertível e $\bar{b} = \mathcal{F}(\bar{a})$, então:*

- (i) *existem conjuntos abertos \mathcal{U} e \mathcal{W} em \mathbb{R}^p tais que $\bar{a} \in \mathcal{U}$, $\bar{b} \in \mathcal{W}$, \mathcal{F} é injetiva em \mathcal{U} , e $f(\mathcal{U}) = \mathcal{W}$;*
- (ii) *se \mathcal{F}^{-1} é o inverso de \mathcal{G} (que existe, por i), definida em \mathcal{W} por:*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x)) = x, \quad x \in \mathcal{U},$$

então, $\mathcal{F}^{-1} \in C^1(\mathcal{W}; \mathcal{U})$.

O Teorema da Aplicação Inversa determina condições sob as quais existe uma inversa local (em torno de um ponto), ou seja, permite determinar a invertibilidade de uma função em uma vizinhança do ponto no qual a função é diferenciável. Para a demonstração do teorema e mais resultados correlatos, recomenda-se a leitura da seção denominada *The Inverse Function Theorem* em Rudin (1976). O Teorema 3.3 ⁴ mostra que, se um sistema de controle linearizado em (x_e, u_e) é controlável, então o sistema de controle não linear é localmente controlável neste equilíbrio (Coron, 2007; Henarejos, 2023).

Teorema 3.3 (Teorema de Controlabilidade Local em um ponto de equilíbrio). *Considere o sistema não linear (12), (x_e, u_e) um ponto de equilíbrio, $A = \left[\frac{df}{dx}(x_e) \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $m \leq n$. Se o Teste Linear de Kalman (9) é verdadeiro, então o sistema (12) é localmente controlável em torno a (x_e, u_e) .*

Demonstração. Para facilitar a escrita fixaremos o ponto de equilíbrio (x_e, u_e) e denotaremos $d\mathcal{F}[x_e, u_e]$ por \mathcal{F}' . Pelo Teorema 2.9, temos que $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Além disso, \mathcal{F}' é a Função

⁴Tal teorema trata-se de uma adaptação dos Teoremas 3.6 e 3.8 de Coron (2007).



de Transição do Sistema Linear:

$$\lambda' = A\lambda + B\mu.$$

Logo, a hipótese de Kalman (que caracteriza a controlabilidade) implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' : \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (\lambda_0, \mu) &\mapsto (\lambda_0, \lambda(\tau)) \end{aligned}$$

é uma aplicação linear sobrejetiva.

Uma vez que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ possui dimensão $2n$ (finita), garante-se a existência de um subespaço linear E de dimensão $2n$ tal que:

$$\mathcal{F}'(E) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

A construção de tal subespaço linear E será feita de modo a manter a sobrejetividade e garantindo a injetividade.

Seja $\{x_j\}_{j=1}^{2n}$ uma base de \mathbb{R}^{2n} . Sendo \mathcal{F}' sobrejetora, a imagem inversa de cada vetor x_j pode conter mais de um elemento. Fazendo uso do axioma de escolha, para cada x_j , obtemos um elemento g_j de tal forma que o conjunto

$$G = \{g_j \mid \mathcal{F}'(g_j) = x_j\}$$

é linearmente independente. De fato, observe que, supondo $\zeta_j \neq 0$ para algum j e $\sum \zeta_j g_j = 0$, então:

$$\mathcal{F}'\left(\sum \zeta_j g_j\right) = 0 \Rightarrow \sum \zeta_j \mathcal{F}'(g_j) = 0 \text{ (dada linearidade de } \mathcal{F}'\text{)}.$$

Mas, $\mathcal{F}'(g_j) = x_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Desse modo,

$$\sum \zeta_j x_j = 0.$$

O que implica que os vetores x_j são linearmente dependentes, no entanto, x_j define uma base, de acordo com a nossa construção, então não podem ser linearmente dependentes, o que caracteriza uma contradição.

Logo, o conjunto G é linearmente independente, como gostaríamos. Definamos $E = \text{Span}[G]$, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares que se obtém a partir dos vetores g_j . De forma análoga, é possível verificar que $\mathcal{F}'|_E$ é injetiva. Isto é, E e $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais isomorfos.



Agora, aplicamos o Teorema da Aplicação Inversa na restrição de \mathcal{F} para E , isto é $\mathcal{F}|_E$. Obtemos a existência de $\delta > 0$ e da aplicação $(\mathcal{F}|_E)^{-1} \in C^1(\mathcal{B}_\delta(x_e) \times \mathcal{B}_\delta(x_e); E)$, com $\mathcal{B}_\delta(x) := \{z \in \mathbb{R}^n; |z - x| \leq \delta\}$ tal que

$$(\mathcal{F}|_E)^{-1}(x_e, x_e) = (x_e, u_e) \in E \subset \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m), \tag{17}$$

$$\mathcal{F} \circ (\mathcal{F}|_E)^{-1}(a, b) = (a, b), \quad \forall (a, b) \in \mathcal{B}_\delta(x_e) \times \mathcal{B}_\delta(x_e). \tag{18}$$

Agora denotamos a inversa como:

$$(\mathcal{F}|_E)^{-1}(a, b) = (g_1(a, b), g_2(a, b)) \in \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, \tau]; \mathbb{R}^m),$$

$$(a, b) \in \mathcal{B}_\delta(x_e) \times \mathcal{B}_\delta(x_e).$$

A partir de 18, obtém-se $g_1(a, b) = a$ e que, se $x : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a solução de

$$x' = f(x) + Bg_2(a, b)(t), \quad x(0) = a,$$

então $x(\tau) = b$. Por fim, uma vez que $(\mathcal{F}|_E)^{-1}$ é de classe C^1 , $g_2 \in C^1$ em $\mathcal{B}_\delta(x_e) \times \mathcal{B}_\delta(x_e)$, então existe $C > 0$ tal que, $\forall (a, b) \in \mathcal{B}_\delta(x_e) \times \mathcal{B}_\delta(x_e)$,

$$\begin{aligned} \|g_2(a, b) - u_e\|_\infty &= \|g_2(a, b) - g_2(x_e, x_e)\|_\infty \\ &\leq C \|(a, b) - (x_e, x_e)\| \\ &\leq C (\|a - x_e\| + \|b - x_e\|) = 2C\delta \\ &\leq \tau. \end{aligned}$$

Isso garante a controlabilidade local. Isto é, para todo $\tau > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que o sistema é localmente controlável em torno de (x_e, u_e) , com controle $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ de pequeno porte ($\|u - u_e\|_\infty < \tau$). □

4 Discussões e Resolução do Problema Proposto

A partir dos modelos de tipo Lotka-Volterra vistos em seções anteriores, será apresentada uma problemática visando controlar tais sistemas, especificamente (1) e (2). Consideraremos uma situação hipotética, na qual existem duas espécies coexistindo, com suas populações se desenvolvendo com base nos modelos supracitados e será necessário controlar uma das populações. Por exemplo, é razoável imaginar que em um dado momento da dinâmica populacional as presas crescerão muito e sabe-se que tal número pode ser prejudicial, aos seres humanos, por exemplo. Logo,



supondo que essa dinâmica populacional (presa-predador) ocorre em um ambiente próximo a uma cidade, o objetivo será controlar as presas, visando que elas não cresçam demasiadamente e se tornem pragas para a espécie humana.

4.1 Controlabilidade do Sistema (1)

Matematicamente, a intenção será atingir um valor específico b_1 , que é a população de presas em um instante $t = \tau$ ($x_1(\tau) = b_1$), por meio da inserção da perturbação u na equação da presa:

$$\begin{cases} x_1' &= ax_1 - cx_2x_1 - u \\ x_2' &= -bx_2 + dx_1x_2 \end{cases} \quad (19)$$

Chamamos u de um termo de colheita ou coleta, no sentido de que em modelos de dinâmica de populações. Esse termo será adicionado à equação visando à modelagem da retirada de animais de uma população. Esse termo é abstrato, afinal pode representar atividades de caça, pesca, coleta de recursos naturais, controle de pragas, entre outros, a depender do contexto de espécies.

Para a solução de equilíbrio serão considerados $x_e = (x_1^*, x_2^*)$ e u_e constantes, isso significa que está sendo inserida uma população de alguma espécie u_e na dinâmica (controle biológico). Ademais, serão considerados a, b, c e d positivos, x_1^*, x_2^* e u_e não negativos, garantindo as hipóteses biológicas. Para calcular pontos de equilíbrio resolvemos:

$$\begin{cases} 0 &= ax_1 - cx_1x_2 - u \\ 0 &= -bx_2 + dx_1x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} u &= x_1(a - cx_2) := f_1(x_1, x_2) \\ 0 &= x_2(-b + dx_1) := f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (20)$$

Logo, os pontos de equilíbrio, $E = ((x_1^*, x_2^*), h)$, do sistema são:

$$E_1(h) = \left(\left(\frac{h}{a}, 0 \right), h \right) \quad \text{e} \quad E_2(h) = \left(\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c} - \frac{hd}{bc} \right), h \right).$$

Considerando as hipóteses biológicas, x_1^*, x_2^* e o parâmetro $u_e = h$ serão tomados não negativos. Além disso, observe que:

$$E_1 \left(\frac{ab}{d} \right) = E_2 \left(\frac{ab}{d} \right).$$

Dando sequência ao processo de linearização, usando derivadas parciais, podemos calcular a diferencial em $x = (x_1, x_2)$ do campo $f := (f_1, f_2)$,

$$A(x_1, x_2) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, x_2) \right]_{ij} = \begin{pmatrix} a - cx_2 & -cx_1 \\ dx_2 & -b + dx_1 \end{pmatrix},$$



e como o controle $u_e = h$ é inserido apenas na primeira equação e mais nenhum controle distinto é também incluído no sistema, as matrizes que definem o sistema linearizado em torno a E_1^\pm são:

$$A_1^\pm = \begin{pmatrix} a & -\frac{c}{a}h \\ 0 & -b + \frac{d}{a}h \end{pmatrix}; 0 \leq h \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, as matrizes que definem o sistema linearizado em torno a E_2 são:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{hd}{b} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{d}{c} \left(a - \frac{hd}{b} \right) & 0 \end{pmatrix}; 0 \leq h < \frac{ab}{d} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando o Teste de Kalman para Controle, temos:

$$\text{rank} (B_1 \ A_1 B_1) = \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \tag{21}$$

$$\text{rank} (B_2 \ A_2 B_2) = \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{hd}{b} \\ 0 & -\frac{d}{c} \left(a - \frac{hd}{b} \right) \end{pmatrix} = 2. \tag{22}$$

4.2 Controlabilidade do Sistema (2)

Analogamente ao processo desenvolvido para o modelo anterior, consideraremos a inserção da perturbação u na equação da presa, no modelo 2.

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{k} \right) - cx_2x_1 - u \\ x_2' = -bx_2 + dx_1x_2. \end{cases} \tag{23}$$

Para a solução de equilíbrio, serão considerados $x_e = (x_{1^*}, x_{2^*})$ e u_e constantes, o que significa que está sendo inserida uma população de alguma espécie u_e na dinâmica (controle biológico). Ademais, serão considerados a, b, c, d e k positivos, x_{1^*}, x_{2^*} e u_e não negativos, garantindo as hipóteses biológicas. Para o ponto de equilíbrio resolvemos

$$\begin{cases} 0 = ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{k} \right) - cx_2x_1 - u \\ 0 = -bx_2 + dx_1x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} u = ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{k} - \frac{cx_2}{a} \right) := f_1 \\ 0 = x_2(-b + dx_1) := f_2 \end{cases} \tag{24}$$

As soluções do sistema (24) definem os pontos de equilíbrio $E = ((x_{1^*}, x_{2^*}), h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$; tais pontos podem ser classificados nos seguintes tipos:



$$E_1^-(h) = \left(\left(\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{hk}{a}}, 0 \right), h \right); \forall h \in \left[0, \frac{ak}{4}\right],$$

$$E_1^+(h) = \left(\left(\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{hk}{a}}, 0 \right), h \right); \forall h \in \left[0, \frac{ak}{4}\right]$$

e $E_2(h) = \left(\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c} - \frac{hd}{bc} - \frac{ab}{cdk} \right), h \right); \forall h \in \left[0, \frac{ab}{d} \left(1 - \frac{b}{dk}\right)\right].$

Note que os intervalos definidos para h buscam garantir as hipóteses biológicas, afinal, para valores fora desse intervalo, podemos obter resultados negativos ou valores complexos, o que não faz sentido no contexto populacional. A obtenção dos pontos E_1^\pm reduz-se à resolução de uma equação quadrática: $ax_1^2 - ax_1k + hk = 0$. Além disso, observe que se $b = dk$ então:

$$E_1^+(0) = ((k, 0), 0) = E_2(0),$$

e é possível verificar que $E_1^-\left(\frac{ak}{4}\right) = \left(\left(\frac{k}{2}, 0\right), \frac{ak}{4}\right) = E_1^+\left(\frac{ak}{4}\right).$

Dando sequência ao processo de linearização, usando derivadas parciais, podemos calcular a diferencial em $x = (x_{1^*}, x_{2^*})$ do campo $f := (f_1, f_2)$,

$$A(x_{1^*}, x_{2^*}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_{2^*}, x_{1^*}) \right]_{ij} = \begin{pmatrix} a \left(1 - \frac{2x_{1^*}}{k}\right) - cx_{2^*} & -cx_{1^*} \\ dx_{2^*} & -b + dx_{1^*} \end{pmatrix},$$

e como o controle $u_e = h$ é inserido apenas na primeira equação e mais nenhum controle distinto é também incluído no sistema, as matrizes que definem o sistema linearizado em torno de E_1^\pm são:

$$A_1^\pm = \begin{pmatrix} a \left(1 - \frac{2x_{1^*}^\pm}{k}\right) & -cx_{1^*}^\pm \\ 0 & -b + dx_{1^*}^\pm \end{pmatrix}; 0 \leq h \leq \frac{ak}{4} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

em que $x_{1^*}^\pm = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{hk}{a}}$. Analogamente, as matrizes que definem o sistema linearizado em torno de E_2 são:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{hd}{b} - \frac{ab}{dk} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{d}{c} \left(a - \frac{hd}{b} - \frac{ab}{dk}\right) & 0 \end{pmatrix}; 0 \leq h \leq \frac{ab}{d} \left(1 - \frac{b}{dk}\right) \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Usando o Teste de Kalman para Controle, temos:

$$\text{rank} (B_1 \ A_1^\pm B_1) = \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & -a \left(1 - \frac{2x_{1^*}^\pm}{k}\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \tag{25}$$

$$\text{rank} (B_2 \ A_2 B_2) = \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{hd}{b} \\ 0 & -\frac{d}{c} \left(a - \frac{hd}{b} - \frac{ab}{dk}\right) \end{pmatrix} = 2; \ 0 \leq h < \frac{ab}{d} \left(1 - \frac{b}{dk}\right). \tag{26}$$

5 Conclusões

A partir do estudo do modelo de Lotka-Volterra e visando controlar a população de presas nos modelos (1) e (2), foi inserida uma perturbação u na equação da presa dos modelos. Uma vez que as ferramentas da Teoria de Controle Linear não podem ser utilizadas nesse problema, visto que são sistemas de equações não lineares, então foi necessário partir para a utilização das ferramentas de controle específicas para casos não lineares. Nesse contexto, inicialmente foram determinados os pontos de equilíbrio dos sistemas, para então desenvolver o processo de linearização dos sistemas em torno destes pontos. A próxima etapa caracterizou-se por aplicar a Teoria de Controle Linear, em específico o Teste de Kalman, nos sistemas linearizados. Por fim, aplicando o Teorema 3.3, da Seção 3, cujo resultado garante que se um sistema linearizado em torno de um ponto de equilíbrio (x_e, u_e) é controlável, isto é, se o Teste Linear de Kalman é verdadeiro, então o sistema original, não linear, será localmente controlável em torno de (x_e, u_e) . Chegamos, então, nas seguintes conclusões:

1. O Sistema de Lotka-Volterra (1) é localmente controlável em torno de cada ponto $(x_e, h) \in \mathcal{E}_1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \left(\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c} - \frac{hd}{bc} \right), h \right) \mid 0 \leq h < \frac{ab}{d} \right\}. \tag{27}$$

2. O Sistema de Lotka-Volterra (2) é localmente controlável em torno de cada ponto $(x_e, h) \in \mathcal{E}_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ \left(\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c} - \frac{hd}{bc} - \frac{ab}{cdk} \right), h \right) \mid 0 \leq h < \frac{ab}{d} \left(1 - \frac{b}{dk}\right) \right\}. \tag{28}$$

3. Ao introduzir o controle $u_e = h$, mesmo que somente na equação das presas, é evidente que o efeito é transferido para a coordenada de equilíbrio correspondente ao predador, isto é,

$$h \longrightarrow (x_{1^*}, x_{2^*}(h)).$$



Referências

BAUMAISTER, J.; LEITÃO, A. **Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

BÜRGER, R. **Introducción al modelamiento en biomatemática**. 133 p. Notas. Centro de Investigación en Ingeniería Matemática, Departamento de Ingeniería Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, Chile, 2012. Disponível em: https://www.ci2ma.udec.cl/pdf/apuntes_docentes/apuntes-INTRODUCCION-AL-MODELAMIENTO-EN-BIOMATEMATICA.pdf. Acesso em: 27 fev. 2024.

CASTRO, J. D. R.; RESTREPO, I. A. El modelo depredador-presa de Lotka-Volterra en las especies de linco canadiense y liebres raqueta de nieve. **Cuadernos de Ingeniería Matemática**, v. 1, n. 1, p. 1-11, 2021. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10784/29851>. Acesso em: 2 fev. 2024.

CORON, J.-M. **Control and nonlinearity**. Mathematical Surveys and Monographs. v. 136. United States of America: American Mathematical Society, 2007.

HENAREJOS, A. W. **Observabilidade e controlabilidade de modelos biológicos**. Orientador: Francis Félix Córdova Puma. 2023. 70 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/248383/TCC_ADRIANA_W_H_PDF_ASSINADO.pdf?sequence=1. Acesso em: 2 fev. 2024.

RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. International Series in Pure and Applied Mathematics. 3. ed. New York: McGraw-hill, 1976.

SALVADOR, J. A.; ARENALES, S. H. de V. **Modelagem Matemática de Problemas Ambientais**. Coleção UAB-UFSCar (Engenharia Ambiental). São Carlos, SP: EDUFSCAR, 2012.

SONTAG, E. D. **Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems**. Texts in Applied Mathematics. v. 6. 2. ed. Berlin: Springer, 1998.

