Extensão da sequência de Leonardo: Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo e Hexa-Leonardo

Leonardo sequence extension: Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo and Hexa-Leonardo

Extensión de la secuencia Leonardo: Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo y Hexa-Leonardo

Renata Passos Machado Vieira[1]
Rede Nordeste de Ensino, Polo Universidade Federal do Ceará (RENOEN, Polo UFC), Fortaleza, CE, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-1966-7097, http://lattes.cnpq.br/0166320689075492

Francisco Regis Vieira Alves[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), Fortaleza, CE, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561, http://lattes.cnpq.br/3288513376230522

Paula Maria Machado Cruz Catarino[3]
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal
https://orcid.org/0000-0001-6917-5093

Resumo: A presente pesquisa apresenta uma ampliação da sequência de Leonardo, uma recorrência associada a um polinômio característico de grau 3, abrangendo agora as sequências de recorrências associadas a um polinômio característico de grau 4 (Tetra-Leonardo), recorrência associada a um polinômio característico de grau 5 (Penta-Leonardo) e recorrência associada a um polinômio característico de grau 6 (Hexa-Leonardo). Além disso, investiga-se minuciosamente as representações matriciais e as funções geradoras desses números, o que representa uma significativa contribuição matemática para o campo das sequências de Leonardo. No contexto de trabalhos futuros, almeja-se a aplicação dessas sequências no âmbito do ensino, possibilitando discussões mais aprofundadas em cursos de formação inicial de professores de Matemática. Isso tem o potencial de enriquecer o conteúdo pedagógico e promover uma compreensão mais sólida de sequências matemáticas entre os futuros educadores.

[1]**Currículo sucinto**: Graduada em Engenharia de Telecomunicações pelo IFCE, graduada no Programa Especial de Formação Pedagógica de Docentes, Matemática pela Faculdade Integrada da Grande Fortaleza, mestra em Ensino de Ciências e Matemática pelo IFCE, doutoranda em Ensino da RENOEN, Polo UFC. Professora da Secretaria de Educação do Estado do Ceará. Bolsista da Funcap. **Contribuição de autoria**: Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato**: re.passosm@gmail.com.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática, bacharel em Matemática, mestre em Educação, mestre em Matemática e doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará. Professor titular no IFCE. Professor e coordenador no Programa de Pós-graduação em Ensino da RENOEN, Polo IFCE. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados. **Contato**: fregis@gmx.fr.

[3]**Currículo sucinto**: PhD em Matemática pela University of Essex, Department of Mathematical Sciences. Professora Associada da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD). **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Análise Formal. **Contato**: pcatarino23@gmail.com.

VIEIRA, Renata Passos Machado; ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Extensão da sequência de Leonardo: Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo e Hexa-Leonardo. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3003, 12 de agosto de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6922.

Palavras-chave: extensão; forma matricial; função geradora; sequência de Leonardo.

Abstract: This research presents an expansion of the Leonardo sequence, a recurrence associated with a characteristic polynomial of degree 3, now encompassing sequences of recurrences associated with a characteristic polynomial of degree 4 (Tetra-Leonardo), recurrence associated with a characteristic polynomial of degree 5 (Penta-Leonardo) and recurrence associated with a characteristic polynomial of degree 6 (Hexa-Leonardo). Furthermore, the matrix representations and generating functions of these numbers are thoroughly investigated, which represents a significant mathematical contribution to the field of Leonardo sequences. In the context of future work, the aim is to apply these sequences in the context of teaching, enabling more in-depth discussions in initial training courses for Mathematics teachers. This has the potential to enrich pedagogical content and promote a more solid understanding of mathematical sequences among future educators.

Keywords: extension; matrix form; generating function; Leonardo sequence.

Resumen: La presente investigación presenta como objetivo ampliar la secuencia de Leonardo, abarcando ahora las secuencias Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo y Hexa-Leonardo. Este estudio aborda de manera integral varios teoremas y propiedades asociados con estas nuevas secuencias, proporcionando una comprensión más profunda y completa. Además, se investigan a fondo las representaciones matriciales y las funciones generadoras de estos números, lo que representa una importante contribución matemática al campo de las secuencias de Leonardo. En el contexto de futuros trabajos, se busca aplicar estas secuencias en el ámbito de la enseñanza, posibilitando discusiones más profundas en los cursos de formación inicial de profesores de Matemáticas. Esto tiene el potencial de enriquecer el contenido pedagógico y promover una comprensión más sólida de las secuencias matemáticas entre los futuros educadores.

Palabras clave: extensión; forma matricial; función generadora; secuencia de Leonardo.

Data de submissão: 28 de setembro de 2023.

Data de aprovação: 5 de fevereiro de 2024.

1 Introdução

A sequência de Leonardo é uma sequência numérica e recorrente, possuindo a relação de recorrência: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2} + 1, n \geq 2$, com os valores iniciais $L_0 = L_1 = 1$, e sendo $1, 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, 67, \ldots$ os primeiros termos desta sequência, detalhes adicionais podem ser consultados em Alp e Koçer (2021a; 2021b), Shannon (2019), Vieira, Alves e Catarino (2029), Vieira *et al.* (2020; 2021).

CC BY

VIEIRA, Renata Passos Machado; ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Extensão da sequência de Leonardo: Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo e Hexa-Leonardo. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3003, 12 de agosto de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6922.

Conforme, Catarino e Borges (2020), substituindo n por $n+1$ podemos reescrever essa relação de recorrência na forma $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} + 1$. E ainda, subtraindo $L_n - L_{n+1}$ obtemos uma outra relação de recorrência equivalente para esta sequência. Observe:

$$\begin{aligned} L_n - L_{n+1} &= L_{n-1} + L_{n-2} + 1 - L_n - L_{n-1} - 1 \\ L_{n+1} &= 2L_n - L_{n-2} \end{aligned}$$

sendo $L_0 = L_1 = 1, L_2 = 3$ suas condições iniciais.

Feinberg (1963) por sua vez, realizou um estudo sobre a extensão dos números de Fibonacci, com a sequência de Tribonacci, dada por uma sequência linear de ordem 3. Desse modo, tem-se nesta pesquisa uma extensão da sequência de Leonardo, ampliando a ordem desses números e algumas propriedades aritméticas.

Em vista disso, o presente trabalho realiza uma extensão dos números de Leonardo, introduzindo as sequências de Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo e Hexa-Leonardo, tendo essas nomenclaturas devido à ordem das respectivas extensões das sequências discutidas na seção seguinte. Por fim, apresenta a conclusão do trabalho, apresentando a contribuição para pesquisas futuras.

2 As sequência de Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo e Hexa-Leonardo

Esta seção realiza o estudo das extensões da sequência de Leonardo, denominadas: Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo e Hexa-Leonardo. Com isso, serão discutidas propriedades, abordando a forma matricial e função geradora das referidas extensões (Vieira *et al.*, 2020).

Desse modo é interessante abordar o que seria uma sequência e o seu respectivo polinômio característico. Assim, seja uma sequência $(a_k)_{k \geq 1}$, para $n \geq 1$, com recorrência: $a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + u_0 a_0 = 0$. Logo, o polinômio característico associado a recorrência dessa sequência é dado por $f \in \mathbb{C}[X]$: $f(X) = X^k + u_{k-1}X^{k-1} + \ldots + u_1 X + u_0$ (Caminha, 2003).

Definição 2.1. *Para $n \geq 0$, a recorrência da sequência de Tetra-Leonardo (T_n) é dada por:*

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} + 2,$$

com os valores iniciais $T_0 = T_1 = 1, T_2 = 3$.

A sequência de Tetra-Leonardo (T_n) possui seus primeiros termos: $1, 1, 3, 7, 13, 25, 47, 87, \ldots$. Essa sequência é uma extensão da sequência de Leonardo. Pelo fato de sua recorrência necessitar

https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6922.

de três termos anteriores para o cálculo do termo seguinte, e com o seu polinômio característico de grau 4, essa sequência possui a nomenclatura de Tetra-Leonardo.

Realizando a diferença entre os termos de T_n e T_{n+1}, obtemos a seguinte expressão: $T_n = 2T_{n-1} - T_{n-4}, n \geq 4$ e com $T_0 = T_1 = 1, T_2 = 3$ e $T_3 = 7$. O polinômio característico da sequência de Tetra-Leonardo, é dada por $x^4 - 2x - 1 = 0$.

Propriedade 2.2. *Para $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial da sequência de Tetra-Leonardo é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} T_{n+3} & T_{n+2} & T_{n+1} & T_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, tem-se que para $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 25 & 13 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_5 & T_4 & T_3 & T_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, assumindo que vale para qualquer natural $k \geq 2$, ou seja, $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} T_{k+3} & T_{k+2} & T_{k+1} & T_k \end{bmatrix}.$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k + 1$:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T_{k+3} & T_{k+2} & T_{k+1} & T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2T_{k+3} - T_k & T_{k+3} & T_{k+2} & T_{k+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T_{k+4} & T_{k+3} & T_{k+2} & T_{k+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.3. *A função geradora da sequência de Tetra-Leonardo, é dada por:*

$$g(T_n, x) = \frac{1 - x + x^2 + x^3}{(1 - 2x - x^4)}.$$

Demonstração. Considere a função:

$$g(T_n, x) = T_0 + T_1 x + T_2 x^2 + \ldots + T_n x^n + \ldots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por $2x$ e x^4, resultando:

$$
\begin{aligned}
2xg(T_n, x) &= 2T_0 x + 2T_1 x^2 + 2T_2 x^3 + \ldots + 2T_{n-1} x^n + \ldots \\
x^4 g(T_n, x) &= T_0 x^4 + T_1 x^5 + T_2 x^6 + \ldots + T_{n-4} x^n + \ldots
\end{aligned}
$$

Realizando $g(T_n, x) - 2xg(T_n, x) - x^4 g(T_n, x)$, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
(1 - 2x - x^4) g(T_n, x) &= T_0 + (T_1 - 2T_0)x + (T_2 - 2T_1)x^2 + (T_3 - 2T_2)x^3 \\
(1 - 2x - x^4) g(T_n, x) &= 1 - x + x^2 + x^3 \\
g(T_n, x) &= \frac{1 - x + x^2 + x^3}{(1 - 2x - x^4)}.
\end{aligned}
$$

□

CC BY

VIEIRA, Renata Passos Machado; ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Extensão da sequência de Leonardo: Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo e Hexa-Leonardo. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3003, 12 de agosto de 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6922.

Definição 2.4. *Para $n \geq 0$, a recorrência da sequência de Penta-Leonardo (P_n) é dada por:*

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3} + P_{n-4} + 3,$$

com os valores iniciais $P_0 = P_1 = 1, P_2 = 3, P_3 = 7$.

Desse modo, tem-se os seus primeiros termos dessa sequência, dados por: $1, 1, 3, 7, 15, 29, 57, 111, \ldots$ Realizando a operação de $P_n + P_{n+1}$, obtemos a seguinte relação: $P_n = 2P_{n-1} - P_{n-5}$. O seu polinômio característico é dado por $x^5 - 2x - 1 = 0$.

Propriedade 2.5. *Para $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial da sequência de Penta-Leonardo é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 15 & 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+4} & P_{n+3} & P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. A demonstração segue análoga a Propriedade 2.2. □

Uma Função Geradora é uma representação em forma de série de potências, em que os coeficientes correspondem ao número de soluções de um problema combinatório específico. Cada coeficiente é associado aos expoentes presentes em cada termo da série (Gomes, 2021).

Definição 2.6. *Dada uma sequência numérica $(a_n)_{n\geq 0}$, definimos a função geradora (ordinária) dessa sequência como sendo a série de potências formal*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Teorema 2.7. *A função geradora da sequência de Penta-Leonardo, é dada por:*

$$g(P_n, x) = \frac{1 - x + x^2 + x^3 + x^4}{(1 - 2x - x^5)}.$$

Demonstração. Considere a função:

$$g(P_n, x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \ldots + P_n x^n + \ldots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por $2x$ e x^5, resultando:

$$2xg(P_n, x) = 2P_0x + 2P_1x^2 + 2P_2x^3 + \ldots + 2P_{n-1}x^n + \ldots$$
$$x^5g(P_n, x) = P_0x^5 + P_1x^6 + P_2x^7 + \ldots + P_{n-5}x^n + \ldots$$

Realizando $g(P_n, x) - 2xg(P_n, x) - x^5g(P_n, x)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
(1 - 2x - x^5)g(P_n, x) &= P_0 + (P_1 - 2P_0)x + (P_2 - 2P_1)x^2 + (P_3 - 2P_2)x^3 + (P_4 - 2P_3)x^4 \\
(1 - 2x - x^5)g(P_n, x) &= 1 - x + x^2 + x^3 + x^4 \\
g(P_n, x) &= \frac{1 - x + x^2 + x^3 + x^4}{(1 - 2x - x^5)}.
\end{aligned}$$

□

Definição 2.8. *Para $n \geq 0$, a recorrência da sequência de Hexa-Leonardo (H_n) é dada por:*

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2} + H_{n-3} + H_{n-4} + H_{n-5} + 4,$$

com os valores iniciais $H_0 = H_1 = 1, H_2 = 3, H_3 = 7, H_4 = 15.$

Desse modo, tem-se os seus primeiros termos dados por: $1, 1, 3, 7, 15, 31, 61, 121, \ldots$ Realizando a operação de $H_n + H_{n+1}$, obtemos a seguinte relação: $H_n = 2H_{n-1} - H_{n-6}$. O polinômio característico dessa sequência é dado por $x^6 - 2x - 1 = 0$.

Propriedade 2.9. *Para $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial da sequência de Hexa-Leonardo é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 31 & 15 & 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} H_{n+5} & H_{n+4} & H_{n+3} & H_{n+2} & H_{n+1} & H_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. A demonstração segue análoga a Propriedade 2.2. □

Teorema 2.10. *A função geradora da sequência de Hexa-Leonardo, é dada por:*

$$g(H_n, x) = \frac{1 - x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{(1 - 2x - x^6)}.$$

Demonstração. Considere a função:

$$g(H_n, x) = H_0 + H_1x + H_2x^2 + \ldots + H_nx^n + \ldots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por $2x$ e x^6, resultando:

$$2xg(H_n, x) = 2H_0x + 2H_1x^2 + 2H_2x^3 + \ldots + 2H_{n-1}x^n + \ldots$$
$$x^6g(H_n, x) = H_0x^6 + H_1x^7 + H_2x^8 + \ldots + H_{n-6}x^n + \ldots$$

Realizando $g(H_n, x) - 2xg(H_n, x) - x^6g(H_n, x)$, tem-se que:

$$(1 - 2x - x^6)g(H_n, x) = H_0 + (H_1 - 2H_0)x + (H_2 - 2H_1)x^2 + (H_3 - 2H_2)x^3 + (H_4 - 2H_3)x^4 + (H_5 - 2H_4)x^5$$
$$(1 - 2x - x^6)g(H_n, x) = 1 - x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$
$$g(H_n, x) = \frac{1 - x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{(1 - 2x - x^6)}.$$

□

3 Conclusões

Este trabalho apresenta uma discussão sobre o processo de extensão da sequência de Leonardo. Desse modo, são introduzidas as sequências de Tetra-Leonardo, Penta-Leonardo e Hexa-Leonardo, permitindo um estudo matemático em torno da extensão da sequência de Leonardo, bem como uma discussão de suas respectivas propriedades e teoremas.

Não obstante, foram apresentadas as funções geradoras e formas matriciais das sequências em estudo, potencializando propriedades e teoremas atrelados a esses números. Por fim, este artigo possibilita contribuir no âmbito matemático e oportunizar aos professores de Matemática conhecimento sobre a sequência de Leonardo e seu processo evolutivo.

Para trabalhos futuros, pode-se aplicar o presente estudo na área de ensino, permitindo uma contribuição para cursos de formação inicial de professores, o conhecimento da extensão dos números de Leonardo.

Referências

ALP, Y.; KOÇER, E. G. Hybrid Leonardo numbers. **Chaos, Solitons & Fractals**, [*s. l.*], v. 150, p. 111128, 2021a. DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111128.

ALP, Y.; KOÇER, E. G. Some Properties of Leonardo Numbers. **Konuralp Journal of Mathematics**, [*s. l.*], v. 9, n. 1, p. 183-189, 2021b. Disponível em: https://dergipark.org.tr/en/pub/konuralpjournalmath/issue/31496/848006. Acesso em: 12 ago. 2024.

CATARINO, P.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, Slovak Republic, v. 89, n. 1, p. 75-86, 2020. Disponível em: http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/amuc/article/view/1005. Acesso em: 12 ago. 2024.

CAMINHA, A. Sequências Recorrentes Lineares. **Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás**, Goiânia, n. 4, p. 84-90, 2003. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/SeqRecorrentes.pdf. Acesso em: 12 jul. 2024.

FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. **The Fibonacci Quarterly**, Califórnia, v. 1, n. 1, p. 70-74, 1963. Disponível em: https://www.fq.math.ca/Scanned/1-3/feinberg.pdf. Acesso em: 12 jul. 2024.

GOMES, C. Funções geradoras, funções que contam! Nível 3. *In*: SEMANA OLÍMPICA, 24., 7-13 nov. 2021, Teresina, PI. **Anais** [...]. [*S. l.*]: Olimpíada Brasileira de Matemática, 2021. p. 1-8. Disponível em: https://www.obm.org.br/semana/24a-semana-olimpica. Acesso em: 12 jul. 2024.

SHANNON, A. G. A note on generalized Leonardo numbers. **Note on Number Theory and Discrete Mathematics**, [*s. l.*], v. 25, n. 3, p. 97-101, 2019. DOI: https://doi.org/10.7546/nntdm.2019.25.3.97-101.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 4, n. 2, p. 156-173, 2019. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v4i2.11863.

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 42, p. 1-6, 2020. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X41839.

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Os números hiperbólicos de Leonardo. **Cadernos do IME – Série Matemática**, [*s. l.*], v. 17, p. 113-124, 2021. DOI: https://doi.org/10.12957/cadmat.2021.58185.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal foi financiada por Fundos Nacionais por meio da Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), no âmbito do projeto UID / CED / 00194 / 2020.