Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler

Continued fraction applied to obtain good approximations of the square root and Euler number

Fracción continua aplicada para obtener buenas aproximaciones de la raíz cuadrada y el número de Euler

Carlos Bocker Neto[1]
Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, PB, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-4190-3025, http://lattes.cnpq.br/8829898424320537

Rafael Tavares Silva Bezerra[2]
Secretaria de Educação e Esporte de Pernambuco (SEE-PE), Recife, PE, Brasil
https://orcid.org/0009-0005-3464-8109, http://lattes.cnpq.br/3204671208324134

Resumo: Este é um trabalho de revisão bibliográfica que traz um breve vislumbre da beleza das frações contínuas e como elas podem ser muito úteis, tanto na obtenção de boas aproximações racionais de um determinado número real como na sua representação em forma de fração contínua. Além disso, apresenta propriedades importantes, como a relação entre irracionais quadráticos e frações contínuas periódicas. Por outro lado, visando uma potencial introdução deste tema no ensino fundamental, é apresentado um método para obtenção de aproximações de raízes quadradas através de frações contínuas. Finalmente, utilizando ferramentas mais avançadas, apresentamos uma representação em fração contínua infinita do número Euler, o que consequentemente implica a irracionalidade de e.

Palavras-chave: frações contínuas; boa aproximação; irracionais quadráticos; fração contínua periódica; número de Euler.

Abstract: This is a bibliographical review that provides a brief glimpse into the beauty of continued fractions and how they can be very useful, both in obtaining good rational approximations of a given real number and in their representation as a continued fraction. Furthermore, it presents important properties, such as the relationship between quadratic irrationals and periodic continued fractions. On the other hand, with a view to a potential introduction of this topic in elementary education, a method for obtaining square root approximations

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará, mestre e doutor em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Professor no Departamento de Matemática e no PROFMAT da Universidade Federal da Paraíba. **Contribuição de autoria**: Análise formal, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: carlos.bocker@academico.ufpb.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática e especialista em Ensino de Matemática pelo Centro Universitário da Vitória de Santo Antão, mestre em Matemática pelo PROFMAT da Universidade Federal da Paraíba. Professor da Rede Estadual do Estado de Pernambuco e da Rede de Ensino da cidade de Jaboatão dos Guararapes, Pernambuco. **Contribuição de autoria**: Análise Formal, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: tavares.232@hotmail.com.

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

through continued fractions is presented. Finally, using more advanced tools, we present an infinite continued fraction representation of the Euler number, which consequently implies the irrationality of e.

Keywords: continued fractions; good approximation; quadratic irrationals; periodic continued fraction; Euler number.

Resumen: Esta es una revisión bibliográfica que ofrece un breve vistazo a la belleza de las fracciones continuas y cómo pueden ser muy útiles, tanto para obtener buenas aproximaciones racionales de un número real dado como para su representación en forma de fracción continua. Además, presenta propiedades importantes, como la relación entre irracionales cuadráticos y fracciones continuas periódicas. Por otro lado, con miras a una posible introducción de este tema en la educación primaria y secundaria, se presenta un método para obtener aproximaciones de la raíz cuadrada a través de fracciones continuas. Finalmente, utilizando herramientas más avanzadas, exponemos una representación infinita en forma de fracción continua del número de Euler, lo que conlleva consecuentemente a la irracionalidad de e.

Palabras clave: fracciones continuas; buena aproximación; irracionales cuadráticos; fracción continua periódica; número de Euler.

Data de submissão: 25 de setembro de 2023.

Data de aprovação: 20 de fevereiro de 2024.

Introdução

A origem exata da primeira utilização de frações contínuas é imprecisa, mas é possível afirmar que a sua utilização não é recente, uma vez que foram encontrados relatos de sua utilização há pelo menos 2000 anos. Esta afirmação e os fatos históricos que descrevemos abaixo foram baseados principalmente em Collins (2001) e Brezinski (1991). Nestas referências, eles afirmam, dentre muitas outras coisas, que Matemáticos, como o indiano Aryabhata (476–550), utilizaram esse conhecimento para resolver equações diofantinas, porém sem utilizar de métodos gerais para resolvê-las, apenas utilizando-se delas em situações específicas. Assim como, Rafael Bombelli (1526–1572), que embora não tenha se dedicado ao estudo aprofundado do tema, em seu ano de morte mostrou uma aproximação de $\sqrt{13}$, dada por:

$$\sqrt{13} \cong 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = \frac{18}{5}.$$

Observe que $\sqrt{13} \cong 3,60555$ e $\dfrac{18}{5} = 3,60$ que, para a época, era uma aproximação bastante razoável.

Outro matemático que obteve aproximações de raízes por meio de frações contínuas foi Cataldi (1548–1626) que, em 1613, obteve uma fração contínua para $\sqrt{18}$ e foi considerado o descobridor das frações contínuas. Porém, infelizmente, assim como Bombelli não prosseguiu com seus estudos. Temos

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}}}$$

que é um caso especial da fórmula

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}.$$

Observe que esta forma de escrever é apenas uma das utilizadas em diversos trabalhos, como outros exemplos, no caso infinito temos: $\sqrt{a^2+b} = a + \dfrac{b}{2a+}\dfrac{b}{2a+}\dfrac{b}{2a+\ldots}$, também temos $\sqrt{a^2+b} = a + K_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{2a}\right)$. No caso de frações contínuas simples ainda podemos escrever $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$.

Historicamente, o nome "*fração contínua*" foi introduzido pela primeira vez por John Wallis (1616–1703), em seu livro "*Opera Mathematica*" (1695), onde também explicou como calcular o n-ésimo convergente e descobriu algumas de suas propriedades. Foi através de seu livro "*Arithmetica Infinitorium*" (1655), que as frações contínuas se transformaram em um campo de estudo, quando ele apresentou a seguinte identidade

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \cdots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \cdots}$$

Uma descoberta importante para o número $\pi = 3,14159\cdots$ foi feita por Lord Brouncker (1620–1684), o presidente da *Royal Society of London*, transformando a identidade de Wallis em

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{4^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}}} = 1 + \frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{4^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\,\ldots .$$

Só a partir dos estudos de Leonard Euler (1707–1783), Johan Heinrich Lambert (1728–1777) e Joseph Louis Lagrange (1736–1813) com frações contínuas que esse campo começou a ganhar o devido destaque.

O trabalho "*De Fractionlous Continious*" (1737), escrito por Euler, mostrou que todo número racional pode ser expresso como fração contínua simples e mostrou uma expansão em frações contínuas do número e, a saber, ele mostrou que:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}},$$

o que prova, em particular, a irracionalidade do número e. O trabalho de Euler, sobre o número e, foi generalizado em 1766, por J. H. Lambert, que mostrou que

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{10}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{14}{x} + \ddots}}}}.$$

Ele também desenvolveu, no ano de 1768, frações contínuas para as funções $\log(1 + x)$, $\arctan(x)$ e $\tan(x)$, usando essas expressões para mostrar que e^x e $\tan(x)$ são irracionais, quando x for racional.

É importante notar que a teoria de frações contínuas está intimamente ligada, dentre outras coisas, à representação de números reais, que possibilita facilmente identificar se um determinado número é racional ou irracional e também à obtenção de boas aproximações racionais de um número real qualquer.

É possível, dentro da matemática brasileira, encontrar diversas dissertações de mestrado, livros e artigos falando sobre o tema frações contínuas. Citamos como exemplos Martinez *et al.* (2013) e Moreira (2011), com enfoque mais avançado, e Mollin (1999), um pouco mais voltadas para o ensino básico, segundo nosso ponto de vista.

Este trabalho traz, portanto, uma abordagem desse tema visando tanto a compressão como a divulgação dessa bela matemática, com a proposta de tentar um meio termo entre a parte avançada e a voltada para o ensino básico (especialmente a seção 5).

O trabalho foi dividido em seis seções. Na primeira seção, apresentamos definições, exemplos e alguns resultados iniciais. Na segunda seção, apresentamos estimativas e relações importantes que permitem uma melhor compreensão das frações contínuas. Na terceira seção, apresentamos a relação entre boas aproximações e frações contínuas. A quarta e a quinta seções são dedicadas ao estudo da relação entre frações contínuas periódicas e irracionais quadráticos, com foco principal na obtenção de boas aproximações para raiz quadrada de números naturais. Por último, na seção seis, apresentamos uma forma de se obter a fração contínua do número de Euler e.

1 Definições e resultados preliminares

Apresentamos nesta seção os principais ingredientes para o estudo de boas aproximações racionais, baseado principalmente em Moreira (2011). Inicialmente, vamos esclarecer o termo "boa aproximação". Ao escrever um número real $x = k + 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ na sua forma decimal, onde k é a parte inteira de x e $a_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ são dígitos, podemos observar que se $b_n = a_n + a_{n-1} \cdot 10 + \cdot + a_1 \cdot 10^{n-1}$ então o número racional $\frac{k \cdot 10^n + b_n}{10^n}$ é uma boa aproximação no sentido de que $|x - \frac{k \cdot 10^n + b_n}{10^n}|$ é menor do que $\frac{1}{10^n}$, que é bem pequeno, se n for grande. Note que a representação decimal fornece aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10. Mais geralmente, dado $x \in \mathbb{R}$ e q natural, existe um único p inteiro tal que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q}$ e $|x - \frac{p+1}{q}| \leq \frac{1}{q}$. Isso implica que para qualquer q natural existem frações $\frac{p}{q}$ com p inteiro que aproxima x com erro menor que $\frac{1}{q}$. A representação decimal fornece uma sequência dessas aproximações com os denominadores q iguais a potências de 10. Por outro lado, a escolha da base 10 ocultam, muitas vezes, aproximações racionais de x

muito mais eficientes. Por exemplo,

$$|\pi - \frac{22}{7}| < \frac{1}{700} < |\pi - \frac{314}{100}| \quad \text{e} \quad |\pi - \frac{355}{113}| < \frac{1}{3000000} < |\pi - \frac{31415592}{1000000}|$$

mostram que $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são aproximações de π muito melhores que aproximações decimais com denominadores muito maiores.

Isso motiva a busca por aproximações racionais de x, da forma $\frac{p}{q}$, com p inteiro e q natural de forma otimizada no sentido de que $|x - \frac{p}{q}| \leq |x - \frac{r}{s}|$ para qualquer fração $\frac{r}{s}$, com denominador natural $s \leq q$. De fato, exigimos um pouco mais para que uma fração seja uma boa aproximação de x, de acordo com a definição a seguir.

Definição 1.1. *Dado um número real x, dizemos que a fração $\frac{p}{q}$ (p inteiro e q natural) é uma boa aproximação racional de x, se $|qx - p| < |sx - r|$ para toda fração $\frac{r}{s}$ (r inteiro e s natural) com $q \leq s$ e $\frac{p}{q} \neq \frac{r}{s}$.*

A principal ferramenta para se obter boas aproximações racionais de um número real x é a sua representação em frações contínuas que, a partir de agora, passamos a descrevê-la. Dado um número real x, denotaremos por $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x, que é definida como o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 4,3 \rfloor = 4$; $\lfloor -5,3 \rfloor = -6$; $\lfloor 3 \rfloor = 3$; $\lfloor e \rfloor = 2$.

Definição 1.2. *Dado um número real x, a fração contínua (simples) de x é definida, de forma recursiva, da seguinte maneira*

$$\alpha_0 = x, \quad a_m = \lfloor \alpha_m \rfloor$$

$$\textit{e, se } \alpha_m \notin \mathbb{Z}, \quad \alpha_{m+1} = \frac{1}{\alpha_m - a_m} \textit{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

Se, para algum $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_m = a_m$, temos

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m] \stackrel{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_m}}}}.$$

Nesse caso, dizemos que a fração contínua é finita.

Se para todo número m natural, $\alpha_m \neq a_m$, então sua representação em fração contínua é infinita e denotada por

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots] \stackrel{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Observação 1.3. *Segue da definição que se $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$ tem fração contínua infinita, então:*

1. *Para todo $m \geq 1$, $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, \alpha_m]$;*
2. *Mais geralmente, $\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{k+l-1}, \alpha_{k+l}]$, para todo $l \geq 1$.*

Observação 1.4. *As frações contínuas apresentadas anteriormente, de fato, são chamadas de* **frações contínuas simples** *e utilizam sempre numerador unitário. Alertamos ao leitor que outras representações em frações contínuas, como na introdução deste trabalho, também aparecem na literatura e têm sua importância.*

Vejamos dois exemplos.

Exemplo 1.5. *Vamos obter a fração contínua do número racional $x = \frac{113}{47}$.*

$$a_0 = \lfloor x \rfloor = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{\frac{113}{47} - 2} = \frac{47}{19}.$$

Em seguida, obtemos

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{19}{9};$$

$$a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{9}{1} = a_3.$$

Assim, $x = [2; 2, 2, 9]$.

Exemplo 1.6. *Agora vamos computar a fração contínua do número irracional $x = \sqrt{2}$. Note primeiramente que $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ e, portanto, $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Agora, substituindo sucessivamente $\sqrt{2}$ do lado direito da última equação, obtemos:*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Em termos dos elementos da definição, temos:

$$a_0 = \lfloor x \rfloor = 1; \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \sqrt{2}.$$

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

Em seguida, obtemos

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 2; \quad \alpha_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}-2} = \alpha_1.$$

Portanto, a fração contínua é infinita, com $a_0 = 1$ *e* $a_j = 2$ *para todo* $j \geq 1$*. Isto é,* $x = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

No primeiro exemplo x é racional e sua fração contínua é finita, já no segundo exemplo x é irracional e sua fração contínua é infinita. O seguinte resultado mostra que isto é um fato geral.

Proposição 1.7. *O número real* x *é racional se, e somente se, sua fração contínua é finita.*

Prova. *Se a fração contínua de* x *é finita, é imediato, da definição de fração contínua, que* x *é racional, pois operações de soma, subtração, produto e divisão com números racionais resulta em um número racional.*

Por outro lado, se x *é racional,* $x = a_0 + \frac{p}{q}$*, com* $a_0 = \lfloor x \rfloor$ *e* $0 \leq p < q$ *naturais. Aplicando sucessivamente o algoritmo da divisão de Euclides, obtemos inteiros positivos* $a_1, a_2, \cdots, a_m$ *e restos* $0 = r_m < r_{m-1} < \cdots < r_2 < r_1 < p$*, tais que*

$$\frac{q}{p} = a_1 + \frac{r_1}{p}, \quad \frac{p}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad \cdots, \quad \frac{r_{m-2}}{r_{m-1}} = a_m.$$

Consequentemente,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m}}}}$$

ou, equivalentemente, $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_m]$. ■

Observação 1.8. *Segue da definição de fração contínua que*

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, \cdots, \alpha_n] \overset{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}$$

para todo $n \leq m$ *no primeiro caso e para todo* $n \geq 0$ *no segundo caso.*

1.1 Reduzidas de uma fração contínua infinita

Uma vez que as frações contínuas finitas são números racionais, dado qualquer número irracional x, sua fração contínua é infinita. Então, escrevendo $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$, podemos pensar no

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

n-ésimo truncamento finito de x, que é o número racional $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$. Cada truncamento é chamado de **reduzida** da fração contínua de x. Vejamos os alguns exemplos.

Exemplo 1.9. *As quatro primeiras reduzidas de $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \cdots]$ são:*

$$\frac{p_1}{q_1} = [1;2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5, \qquad \frac{p_2}{q_2} = [1;2,2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4, \qquad \frac{p_3}{q_3} =$$

$$[1;2,2,2] = \frac{17}{12} = 1.41666\ldots \quad e \quad \frac{p_4}{q_4} = [1;2,2,2,2] = \frac{41}{29} = 1.\overline{4137931034482758620689655172}.$$

Observe que, aparentemente, as reduzidas de $\sqrt{2}$ estão se aproximando de sua expansão decimal. De fato, veremos mais adiante que elas são boas aproximações, no sentido da Definição 1.1. O leitor pode facilmente mostrar por indução que as reduzidas de $\sqrt{2}$ satisfaz a relação de recorrência $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} = \frac{2p_{n+1} + p_n}{2q_{n+1} + q_n}$, o que é um caso particular da Proposição 2.1.

Exemplo 1.10 (Número de ouro)**.** *O número de ouro é conhecido por várias propriedades matemáticas e geométricas interessantes e tem uma longa história na matemática, na arte, na arquitetura e em várias outras áreas. Ele pode ser definido pela solução positiva da equação $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, ou seja, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Consequentemente, sua fração contínua é dada por*

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [1; 1, 1, 1, 1, \cdots].$$

Suas reduzidas $\frac{p_n}{q_n}$ são obtidas por $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, onde $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$, ou seja,

$$\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \geq 0} = (1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \cdots).$$

2 Entendendo as reduzidas de uma fração contínua

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados gerais, presentes na literatura (veja, por exemplo, Beskin (1986) e Moreira (2011)), que irão nos permitir uma maior compreensão das reduzidas de um dado número real.

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

O primeiro deles é essencial para os resultados seguintes. Embora sua prova seja bastante técnica, esse resultado permite a obtenção da sequência das reduzidas de forma recorrente, sem que tenhamos que calcular diversas operações com frações.

Proposição 2.1. *Dada uma sequência (finita ou infinita)* $t_0, t_1, t_2, \cdots \in \mathbb{R}$ *tal que* $t_k > 0$*, para todo* $k \geq 1$*, definimos as sequências* (x_m) *e* (y_m) *por* $x_0 = t_0$*,* $y_0 = 1$*,* $x_1 = t_0t_1 + 1$*,* $y_1 = t_1$*,* $x_{m+2} = t_{m+2}x_{m+1} + x_m$ *,* $y_{m+2} = t_{m+2}y_{m+1} + y_m$ *para todo* $m \geq 0$*.*

Temos então, para todo $m \geq 0$*,*

$$[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_m] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \ddots + \cfrac{1}{t_m}}} = \frac{x_m}{y_m} \tag{1}$$

e

$$x_{m+1}y_m - x_my_{m+1} = (-1)^m. \tag{2}$$

Prova. *Vamos provar por indução sobre* m*. Comecemos pela prova de* (14)*; para o caso* $m = 0$*,* $m = 1$ *e* $m = 2$ *temos:*

$$[t_0] = \frac{t_0}{1} = \frac{x_0}{y_0}; \tag{3}$$

$$[t_0; t_1] = t_0 + \frac{1}{t_1} = \frac{t_0t_1 + 1}{t_1} = \frac{x_1}{y_1}; \tag{4}$$

$$[t_0; t_1, t_2] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2}} = \frac{t_2x_1 + t_0}{t_1t_2 + 1} = \frac{x_2}{y_2}. \tag{5}$$

Suponha agora que para algum $m \geq 2$*, o resultado valha para todo* $k \leq m$*. Provemos que, nessas condições, o resultado também vale para* $m + 1$*.*

Observe que $[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_m, t_{m+1}] = [t_0; t_1, t_2, \cdots, t_m + \frac{1}{t_{m+1}}]$*, pois podemos considerar o último termo da igualdade, do lado esquerdo, sendo a soma do seu penúltimo elemento ao inverso do último do lado direito, dessa forma o lado direito da igualdade possui o mesmo número de elementos de* $[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_m]$*.*

Então, por hipótese de indução, $[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_m + \frac{1}{t_{m+1}}]$ *será dada por*

$$\begin{aligned} \frac{(t_m + \frac{1}{t_{m+1}})x_{m-1} + x_{m-2}}{(t_m + \frac{1}{t_{m+1}})y_{m-1} + y_{m-2}} &= \frac{t_{m+1}(t_mx_{m-1} + x_{m-2}) + x_{m-1}}{t_{m+1}(t_my_{m-1} + y_{m-2}) + y_{m-1}} \\ &= \frac{t_{m+1}x_m + x_{m-1}}{t_{m+1}y_m + y_{m-1}} = \frac{x_{m+1}}{y_{m+1}}. \end{aligned} \tag{6}$$

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

Isso conclui a prova de (14)*.*

Agora, provemos (15)*. Para o caso* $m = 0$*, temos que*

$$x_1 y_0 - x_0 y_1 = (t_0 t_1 + 1) - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0.$$

Suponhamos que valha para algum valor de $m \geq 0$*, isto é, suponha que*

$$x_{m+1} y_m - x_m y_{m+1} = (-1)^m.$$

Então, usando as relações $x_{m+2} = t_{m+2} x_{m+1} + x_m$ *e* $y_{m+2} = t_{m+2} y_{m+1} + y_m$*, temos*

$$\begin{aligned} x_{m+2} y_{m+1} - x_{m+1} y_{m+2} &= (t_{m+2} x_{m+1} + x_m) y_{m+1} - (t_{m+2} y_{m+1} + y_m) x_{m+1} \\ &= t_{m+2} x_{m+1} y_{m+1} + x_m y_{m+1} - t_{m+2} x_{m+1} y_{m+1} - y_m x_{m+1} \\ &= -(x_{m+1} y_m - x_m y_{m+1}) = -(-1)^m \\ &= (-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

Isso mostra (15) *e a prova está completa.* ∎

Em posse do resultado anterior, conhecendo-se a fração contínua de um dado número real x, podemos sem grandes dificuldades encontrar a sequência de suas reduzidas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.2. *É fácil ver que* $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \cdots]$*. Assim, usando as recorrências da proposição anterior, obtemos que a sequência de numeradores das reduzidas são* $p_0 = 2$*,* $p_1 = 4 \times 2 + 1 = 9$*,* $p_2 = 4 \times p_1 + p_0 = 4 \times 9 + 2 = 38$ *e, de maneira geral,* $p_{n+2} = 4 \times p_{n+1} + p_n$*, e dos denominadores são* $q_0 = 1$*,* $q_1 = 4$*,* $q_2 = 4 \times q_1 + q_0 = 4 \times 4 + 1 = 17$ *e, de maneira geral,* $q_{n+2} = 4 \times q_{n+1} + q_n$*. Logo, as primeiras reduzidas de* $\sqrt{5}$ *são* $2, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}$ *(o leitor poderá, com o auxílio de uma calculadora, verificar que* $\sqrt{5}$ *e* $\frac{38}{17}$ *concordam em duas casas decimais).*

Consideremos nos próximos resultados o número real $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$, com a_0 número inteiro e a_j inteiro positivo para todo $j \geq 1$, e seja $\left(\frac{p_m}{q_m}\right)_{m \in \mathbb{N}}$, dada por $\frac{p_m}{q_m} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m]$, a sequência de reduzidas da fração contínua de x.

Corolário 2.3. *As sequências* (p_m) *e* (q_m) *satisfazem as recorrências*

$$p_{m+2} = a_{m+2} p_{m+1} + p_m \quad \text{e} \quad q_{m+2} = a_{m+2} q_{m+1} + q_m$$

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. `https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916`.

para todo $m \geq 0$ *com condições iniciais* $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$. *Além disso,*

$$p_{m+1}q_m - p_m q_{m+1} = (-1)^m$$

para todo $m \geq 0$.

Prova. *As sequências* (p_m) *e* (q_m) *definidas pelas recorrências acima satisfazem, pela Proposição 2.1, as igualdades*

$$\frac{p_m}{q_m} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_m] \text{ e } p_{m+1}q_m - p_m q_{m+1} = (-1)^m, \forall\, m \geq 0.$$

Como $p_{m+1}q_m - p_m q_{m+1} = (-1)^m$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$, *temos que* (p_m) *e* (q_m) *dados pela recorrência acima são primos entre si. Além disso, também segue da recorrência que* $q_m > 0$, *para todo* $m \geq 0$. ∎

O seguinte corolário mostra como x se relaciona com suas reduzidas $\frac{p_m}{q_m}$ e com os α_m da definição de frações contínuas.

Corolário 2.4. *Temos, para todo m* $\in \mathbb{N}$,

$$x = \frac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}} \text{ e } \alpha_m = \frac{p_{m-2} - q_{m-2}x}{q_{m-1}x - p_{m-1}}.$$

Prova. *Primeiramente observe que, pela definição de fração contínua e pela Observação 1.3,* x *pode ser escrito como* $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, \alpha_m]$ *e, pela Proposição 2.1, podemos escrever* $x = \frac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}$. *A segunda igualdade é, claramente, equivalente a primeira.* ∎

A seguinte proposição dá precisamente a distância da reduzida da fração contínua de x para x.

Proposição 2.5. *Para todo* $m \geq 1$, *vale a relação*

$$x - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(-1)^m}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m}. \tag{7}$$

Em particular,

$$\frac{1}{(q_{m+1} + q_m)q_m} < \left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| = \frac{1}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m} < \frac{1}{q_{m+1}q_m}. \tag{8}$$

Prova. *Note que, pelo Corolário 2.4,* $x = \frac{\alpha_{m+1}p_m + p_{m-1}}{\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1}}$. *E, portanto, usando o Corolário 2.3, obtemos*

$$x - \frac{p_m}{q_m} = \frac{-(p_m q_{m-1} - p_{m-1}q_m)}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m} = \frac{(-1)^m}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m}.$$

Como $1 \leq a_{m+1} < \alpha_{m+1} + 1 < a_{m+1}$ *e* $q_{m+1} = a_{m+1}q_m + q_{m-1}$*, segue que*

$$\frac{1}{(q_{m+1}+q_m)q_m} < \left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| = \frac{1}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m} < \frac{1}{q_{m+1}q_m}.$$

■

Como consequência das estimativas da Proposição 2.5, vamos mostrar que as reduzidas se aproximam de x de modo que suas subsequências de índices pares cresce para x, as de índices ímpares decrescem para x. Além disso, a sequência de distâncias de x até as reduzidas decrescem.

Corolário 2.6. *Dado* x *um número irracional e* $\left(\frac{p_m}{q_m}\right)$ *a sequência de suas reduzidas. Valem as seguintes propriedades:*

1. *Para todo* $m \in \mathbb{N}$, $|q_m x - p_m| < |q_{m-1}x - p_{m-1}|$*;*
2. *A sequência de distâncias* $\left(|x - \frac{p_m}{q_m}|\right)$ *é decrescente;*
3. *A subsequência de índices pares* $\left(\frac{p_{2m}}{q_{2m}}\right)$ *é crescente e a subsequência de índices ímpares* $\left(\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}\right)$ *é decrescente.*

Prova. *Pela relação* (8) *da Proposição 2.5, temos:*

$$\frac{1}{(q_{m+1}+q_m)} < |q_m x - p_m| < \frac{1}{q_{m+1}}. \tag{9}$$

E pela relação de recorrência $q_{m+2} = a_{m+2}q_{m+1} + q_m$*, temos* $q_{m+2} \geq q_{m+1} + q_m$*. Assim,*

$$|q_{m+1}x - p_{m+1}| < \frac{1}{q_{m+2}} \leq \frac{1}{q_{m+1}+q_m} < |q_m x - p_m| \tag{10}$$

o que demonstra o item 1.

Agora, o item 2 segue imediatamente do item 1, pois como $q_m > q_{m-1}$*, temos* $\frac{|q_m x - p_m|}{q_m} < \frac{|q_{m-1}x - p_{m-1}|}{q_{m-1}}$.

Por fim, a relação (7) *da Proposição 2.5 garante que* $x - \frac{p_m}{q_m}$ *é positivo, se* m *é par, e negativo, se* m *é ímpar, e o item 2 garante a aproximação monótona. Portanto, vale a seguinte ordem:*

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_{2m}}{q_{2m}} < \cdots < x < \cdots < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

E o corolário está demonstrado. ■

O corolário a seguir traz que a sequência (q_n) dos denominadores das frações contínuas de qualquer número irracional x cresce rapidamente para infinito. Este fato é essencial para garantir a convergência das reduzidas para o número x, de acordo com a proposição anterior.

Corolário 2.7. *Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$ com fração contínua infinita e $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ sua sequência de reduzidas. Então $q_n \geq F_n \geq \varphi^{n-2}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onde (F_n) é a sequência de Fibonacci dada por $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 0$ e φ é o número de ouro definido no Exemplo 1.10. Em particular, a sequência (q_n) tende para infinito exponencialmente.*

Prova. *Pelo Corolário 2.3, $q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$ e, portanto, $q_0 = F_0 = 1 > \varphi^{-2}$ e $q_1 \geq 1 = F_1 \geq \varphi^{-1}$.*

Agora suponha, por hipótese de indução, que $q_k \geq F_k \geq \varphi^{k-2}$ para todo $k \leq n$, para algum $n \geq 1$. Provemos que $q_{n+1} \geq F_{n+1} \geq \varphi^{n-1}$.

Pelo Corolário 2.3, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ e então, usando o fato de que $a_{n+1} \geq 1$ e a hipótese de indução, obtemos:

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1} \geq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}. \tag{11}$$

Além disso, das relações $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$, $\varphi^2 = \varphi + 1$ e da hipótese de indução, temos:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} = (\varphi + 1)\varphi^{n-3} = \varphi^{n-1}. \tag{12}$$

Isso completa a indução e o resultado está provado. ■

3 Relação entre reduzidas e boas aproximações

Nesta seção trazemos alguns resultados, que podem também ser encontrados em Beskin (1986) e Moreira (2011), que conectam o conceito de boa aproximação, de acordo com a Definição 1.1, com as reduzidas das frações contínuas. O próximo resultado é consequência da Proposição 2.5, porém dá uma estimativa um pouco melhor em alguns casos.

Teorema 3.1. *Seja x um número irracional e $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ a sequência de suas reduzidas. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| \leq \frac{1}{q_m q_{m+1}} < \frac{1}{q_m^2}.$$

Além disso,

$$\left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{2q_m^2} \quad \text{ou} \quad \left|x - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right| < \frac{1}{2q_{m+1}^2}.$$

Prova. *Observe que, pela primeira equação da Proposição 2.5, $x < \frac{p_n}{q_n}$ se n é ímpar e $x > \frac{p_n}{q_n}$ se n é par. Logo, x sempre pertence ao intervalo de extremos $\frac{p_m}{q_m}$ e $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ cujo comprimento é*

$$\left|\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m}\right| = \left|\frac{(-1)^m}{q_m q_{m+1}}\right| = \frac{1}{q_m q_{m+1}} \Rightarrow \left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| \leq \frac{1}{q_m q_{m+1}} < \frac{1}{q_m^2}.$$

Para provar a parte final, suponha que a afirmativa seja falsa, ou seja,

$$\left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| \geq \frac{1}{2q_m^2} \text{ e } \left|x - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_{m+1}^2},$$

então

$$\frac{1}{q_m q_{m+1}} = \left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| + \left|x - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_m^2} + \frac{1}{2q_{m+1}^2} \Rightarrow q_{m+1} = q_m.$$

No entanto, a última igualdade nunca acontece, pois $q_{m+1} = a_{m+1}q_m + q_{m-1} > q_m$ para todo $m \geq 1$. Essa contradição mostra que

$$\left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{2q_m^2} \quad \text{ou} \quad \left|x - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right| < \frac{1}{2q_{m+1}^2}$$

e o resultado está provado. ■

O Teorema 3.1 mostra, em particular, que a inequação $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$ tem infinitas soluções $\frac{p}{q}$, no universo das reduzidas da fração contínua de x, se x é irracional. Já o seguinte teorema e seus corolários mostram que uma fração $\frac{p}{q}$ é uma boa aproximação racional de x se, e somente se, $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.

Teorema 3.2. *Seja x um número irracional e $\left(\frac{p_m}{q_m}\right)$ a sequência de suas reduzidas. Então, para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, com $0 < q < q_{m+1}$, temos*

$$|q_m x - p_m| \leq |qx - p|.$$

Além disso, se $0 < q < q_m$ a desigualdade acima é estrita. Portanto, reduzidas são boas aproximações.

Prova. *Observe que, como o $mdc(p_m, q_m) = 1$ e se $\frac{p}{q} = \frac{p_m}{q_m}$, então $p = kp_m$ e $q = kq_m$ para algum inteiro $k > 0$ e, neste caso, temos que $|q_m x - p_m| \leq |kq_m x - kp_m|$, o que implica diretamente a desigualdade, onde a igualdade ocorre quando $k = 1$.*

Agora, vamos supor que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_m}{q_m}$, com $0 < q < q_{m+1}$. Então,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_m}{q_m}\right| \geq \frac{1}{qq_m} > \frac{1}{q_m q_{m+1}}.$$

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. `https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916`.

Observe que $\frac{p}{q}$ *está fora do intervalo fechado de extremos* $\frac{p_m}{q_m}$ *e* $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ *e, portanto,*

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| > \min\left\{\left|\frac{p}{q}-\frac{p_m}{q_m}\right|,\left|\frac{p}{q}-\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right|\right\} \geq \min\left\{\frac{1}{qq_m},\frac{1}{qq_{m+1}}\right\} = \frac{1}{qq_{m+1}}.$$

Logo, concluímos que

$$|qx-p| > \frac{1}{q_{m+1}} \geq |q_m x - p_m|\,.$$

■

Corolário 3.3. *Para todo* $q < q_m$,

$$\left|x-\frac{p_m}{q_m}\right| < \left|x-\frac{p}{q}\right|.$$

Prova. *A demonstração segue imediatamente do teorema anterior.* ■

O próximo resultado mostra que as boas aproximações de x são reduzidas da fração contínua de x.

Corolário 3.4. *Se* $|qx-p| < |q'x-p'|$, *para todo* p' *e* $q' \leq q$ *tais que* $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, *então* $\frac{p}{q}$ *é uma reduzida da fração contínua de* x.

Prova. *Basta tomar* m *tal que* $q_m \leq q < q_{m+1}$. *Pelo teorema 2.3, temos que* $|q_m x - p_m| \leq |qx-p|$ *e, portanto, vale a igualdade* $|q_m x - p_m| = |qx-p|$. *Consequentemente, obtemos* $\frac{p}{q} = \frac{p_m}{q_m}$. ■

4 Frações contínuas periódicas e irracionais quadráticos

No que segue, através de um teorema devido a Lagrange em 1770 (pode ser encontrado em Beskin (1986) ou Moreira (2011)), vamos relacionar frações contínuas periódicas com os irracionais quadráticos. Primeiramente vamos definir cada um desses objetos.

Definição 4.1. *Seja* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$ *uma fração contínua infinita. A fração contínua de* α *é dita periódica se existe um inteiro* $k \geq 0$ *e* l *um número natural, tais que* $a_m = a_{m+l}$ *para todo inteiro* $m \geq k$. *O menor número natural* l, *tal que* $a_m = a_{m+l}$ *para todo inteiro* $m \geq k$, *será denotado por* $l(\alpha)$ *e dito o comprimento do período de* α.

Definição 4.2. *Um número* $\alpha \in \mathbb{R}$ *é denominado irracional quadrático quando é uma raiz irracional de uma equação quadrática da forma* $ax^2+bx+c=0$, *onde* a, b *e* $c \in \mathbb{Z}$ *e* $a \neq 0$, *ou seja,*

$\alpha = \dfrac{P+\sqrt{D}}{Q}$, *onde* $P, Q, D \in \mathbb{Z}$, $Q \neq 0$, $Q|(P^2 - D)$ *e* $D > 0$ *não é um quadrado perfeito. Definimos também* $\alpha' = \dfrac{P-\sqrt{D}}{Q}$, *que é denominado o conjugado de* α.

Teorema 4.3 (Teorema de Lagrange - 1770)**.** *Seja x um número irracional. A expansão em frações contínuas de x é periódica se, e somente se, x é solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros.*

A prova deste teorema pode ser encontrada nas referências citadas no início desta seção. Aqui, vamos dar apenas as ideias principais da prova.

Ideia da prova. Supondo que a fração contínua de x é periódica e usando o Corolário 2.4, temos

$$\frac{p_{m-2} - q_{m-2}x}{q_{m-1}x - p_{m-1}} = \alpha_m = \alpha_{m+k} = \frac{p_{m+k-2} - q_{m+k-2}x}{q_{m+k-1}x - p_{m+k-1}}$$

para algum $m \in \mathbb{N},\ k \geq 1$. Dessa relação, obtemos x como uma raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros.

Reciprocamente, se x é raiz de uma equação da forma $at^2 + bt + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ($a \neq 0$), usamos o Corolário 2.4 novamente, escrevemos $x = \dfrac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}$ e substituímos esta expressão no lugar de t, ficando com

$$a\left(\frac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}\right)^2 + b\left(\frac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}\right) + c = 0,$$

o que implica em uma equação da forma $A_m\alpha_m^2 + B_m\alpha_m + C_m = 0$, com $A_m, B_m, C_m \in \mathbb{Z}$. Por fim, mostra-se que A_m, B_m e C_m são limitadas como função de m e, portanto, há apenas um número finito de possíveis equações e, consequentemente, há apenas um número finito de valores possíveis para α_m.

O Teorema de Lagrange 4.3 nos dá em particular uma forma de se obter boas aproximações para a raiz quadrada (não exatas) de números inteiros positivos, uma vez que sabemos que sua fração contínua é periódica e isso facilita a obtenção das reduzidas. No entanto, pode acontecer que o período da fração contínua correspondente seja grande e isso pode tornar o cálculo extremamente demorado. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.4. *A fração contínua (simples) do número $\sqrt{47}$ é $[6; \overline{1, 5, 1, 12}]$, pois*

$$\sqrt{47} = 6 + \frac{11}{6+\sqrt{47}}, \quad \frac{6+\sqrt{47}}{11} = 1 + \frac{-5+\sqrt{47}}{11},$$

$$\frac{11}{-5+\sqrt{47}} = \frac{5+\sqrt{47}}{2} = 5 + \frac{-5+\sqrt{47}}{2}, \quad \frac{2}{-5+\sqrt{47}} = \frac{5+\sqrt{47}}{11} = 1 + \frac{-6+\sqrt{47}}{11}$$

e, por fim, $\dfrac{6+\sqrt{47}}{11} = 6+\sqrt{47}$.

Suas seis primeiras reduzidas são, respectivamente, 6*,* 7*,* $41/6$*,* $48/7$*,* $617/90$ *e* $665/97$*.*

Na próxima seção vamos abrir mão de obter a fração contínua simples da raiz quadrada em troca de obtermos um cálculo mais simples de aproximações racionais da raiz quadrada por reduzidas de frações contínuas não necessariamente simples.

5 Aproximações da raiz quadrada de um número natural

Dado um número natural N, que não é um quadrado perfeito, sabemos que sua raiz quadrada é um número irracional. Assim, é interessante, do ponto de vista prático, conhecer boas aproximações racionais de $\sqrt{N}$. O Teorema de Lagrange 4.3 diz que a fração contínua simples desse número é periódica, o que nos permite, através dela, obter excelentes aproximações. Porém, muitas vezes, o cálculo da própria fração contínua pode ser bastante demorado até se obter o período. No entanto, se abrirmos mão de considerarmos apenas frações contínuas simples e fizermos a seguinte observação de que dado $N \in \mathbb{N}$, que não é um quadrado perfeito, existem $a, b \in \mathbb{N}$, com $1 \leq b \leq 2a$ tais que $N = a^2 + b$ (note que $a^2 < N < (a+1)^2$), temos a seguinte relação

$$\sqrt{N} = a + \frac{b}{a+\sqrt{N}}$$

e, assim, podemos considerar a representação de $\sqrt{N}$ em frações contínuas não simples por

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{\ddots}}}}$$

Note que se considerarmos a função $f(x) = a + \dfrac{b}{a+x}$, $x \geq 0$, então a sequência $c_0 = a$, $c_1 = f(a) = f(c_0)$, $c_2 = f \circ f(a) = f(c_1)$, $\cdots$, $c_m = f \circ f \circ \cdots \circ f(a) = f(c_{m-1})$ ($m-1$ é a quantidade de composições) formam a sequência de reduzidas de $\sqrt{N}$ nesse contexto. Na próxima proposição, vamos estudar a convergência de (c_m) e o erro cometido ao aproximar $\sqrt{N}$ por c_m.

Proposição 5.1. *A sequência* (c_m) *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *A subsequência dos índices pares* (c_{2m}) *é crescente e a subsequência dos índices ímpares* (c_{2m+1}) *é decrescente;*

2. *Para todo* k, $c_{2k} < \sqrt{N} < c_{2k+1}$;

3. *Para todo* $m \geq 1$,

$$|c_m - \sqrt{N}| \leq \frac{1}{2a}|c_{m-1} - \sqrt{N}| \quad \text{e} \quad |c_m - \sqrt{N}| \leq \left(\frac{1}{2a}\right)^m.$$

Prova. *Primeiramente note que* $c_m \geq a$, *para todo* m, *pois* $c_0 = a$ *e* $f(x) > a$, *para todo* $x \geq 0$. *Outra propriedade importante de* f *é que*

$$f(x) - f(y) = \frac{b}{(a+x)(a+y)}(y - x). \tag{13}$$

Assim, se $x < y$ *então* $f(x) > f(y)$, *isto é,* f *é decrescente.*

Note que $c_0 = a < c_1 = a + \dfrac{b}{2a} = f(c_0)$ *e por* f *ser decrescente,* $c_2 = f(c_1) < f(c_0) = c_1$. *Portanto, temos* $c_0 < c_2 < c_1$. *Supondo, por hipótese de indução, que já provamos que* $c_0 < c_2 < \cdots < c_{2k} < c_{2k-1} < \cdots < c_1$, *para algum* $k \geq 1$, *provemos que* $c_{2k} < c_{2k+2} < c_{2k+1} < c_{2k-1}$.

De fato, como f *é decrescente e* $f(c_m) = c_{m+1}$ *para todo* m, *aplicando* f *a desigualdade* $c_{2k-2} < c_{2k} < c_{2k-1}$ *temos que* $c_{2k} < c_{2k+1} < c_{2k-1}$ *e, aplicando* f *novamente, obtemos* $c_{2k} < c_{2k+2} < c_{2k+1}$. *Isso mostra que* $c_{2k} < c_{2k+2} < c_{2k+1} < c_{2k-1}$. *Isso completa a prova de que* (c_{2m}) *é crescente e que* (c_{2m+1}) *é decrescente.*

Agora, observando que $f(\sqrt{N}) = \sqrt{N}$ *e usando* (13) *com* $x = c_{2k}$ *e* $y = \sqrt{N}$, *temos*

$$c_{2k+1} - \sqrt{N} = \frac{b}{(a+\sqrt{N})(a+c_{2k})}(\sqrt{N} - c_{2k}),$$

e, portanto, $c_{2k+1} - \sqrt{N}$ *e* $\sqrt{N} - c_{2k}$ *têm o mesmo sinal, o que implica que* $c_{2k} < \sqrt{N} < c_{2k+1}$. *Além disso, tomando o valor absoluto em* (13), *com* $x = c_{m-1}$ *e* $y = \sqrt{N}$, *temos:*

$$|c_m - \sqrt{N}| = \frac{b}{(a+\sqrt{N})(a+c_m)}|c_{m-1} - \sqrt{N}| \leq \frac{b}{(2a)(2a)}|c_{m-1} - \sqrt{N}| \leq \frac{1}{2a}|c_{m-1} - \sqrt{N}|.$$

Aplicando sucessivamente a relação anterior, obtemos

$$|c_m - \sqrt{N}| \leq \left(\frac{1}{2a}\right)^m |a - \sqrt{N}| \leq \left(\frac{1}{2a}\right)^m.$$

Isso completa a prova da proposição. ∎

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

Uma outra forma de demonstrar a proposição anterior é usar o seguinte resultado geral, análogo à Proposição 2.1, que dá uma fórmula para se calcular as reduzidas de uma fração contínua desse tipo. Vamos apenas enunciá-lo e usá-lo em seguida para se obter uma forma prática de obter a sequência das aproximações de $\sqrt{N}$.

Proposição 5.2. *Dada duas sequências* $a_0, a_1, a_2, \cdots$ *e* $b_1, b_2, \cdots$ *de números reais tais que* $a_k, b_k > 0$*, para todo* $k \geq 1$*, definimos as sequências* (p_m) *e* (q_m) *por* $p_0 = a_0$*,* $q_0 = 1$*,* $p_1 = a_1 a_0 + b_1$*,* $q_1 = a_1$*,* $p_{m+2} = a_{m+2} p_{m+1} + b_{m+2} p_m$ *,* $q_{m+2} = a_{m+2} q_{m+1} + b_{m+2} q_m$ *para todo* $m \geq 0$*.*

Temos então, para todo $m \geq 0$*,*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_m}{a_m}}} = \frac{p_m}{q_m} \tag{14}$$

e

$$x_{m+1} y_m - x_m y_{m+1} = (-1)^m b_{m+1} b_m \cdots b_1. \tag{15}$$

A prova dessa proposição é inteiramente análoga à prova da Proposição 2.1 e será deixada como exercício para o leitor.

Observamos que a aplicação da Proposição 5.2 para obter a sequência de aproximações de $\sqrt{N}$, onde $N = a^2 + b$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $1 \leq b \leq 2a$, toma a forma:

$$c_m = \frac{p_m}{q_m} \quad \text{com} \quad p_{m+2} = 2a p_{m+1} + b p_m \quad \text{e} \quad q_{m+2} = 2a q_{m+1} + b q_m,$$

com condições iniciais $p_0 = a, p_1 = a^2 + N, q_0 = 1$ e $q_1 = 2a$, pois aplicamos a proposição acima com $a_0 = a$, $a_k = 2a$ e $b_k = b$ para todo $k \geq 1$.

Exemplo 5.3. *As primeiras 4 aproximações de* $\sqrt{47}$ *podem ser visualizadas na Tabela 1. Note que* $47 = 6^2 + 11$ *(*$a = 6$ *e* $b = 11$*).*

Tabela 1 – Aproximações de $\sqrt{47}$

m	0	1	2	3
p_m	6	83	1062	13657
q_m	1	12	155	1992
$c_m = p_m/q_m$	6	83/12	1062/155	13657/1992

Fonte: Elaboração dos autores.

Observamos que $p_2 = 1062 = 12 \times 83 + 11 \times 6$, $p_3 = 13657 = 12 \times 1062 + 11 \times 83$, $q_2 = 155 = 12 \times 12 + 11 \times 1$ *e* $p_3 = 1992 = 12 \times 155 + 11 \times 11$.

Comparando este último exemplo com o Exemplo 4.4, podemos ver que as reduzidas deste último não coincidem com as da fração contínua simples de $\sqrt{47}$ (que são as boas aproximações, no sentido da seção 1), porém têm numeradores e denominadores que crescem mais rápido e isso, de certa forma, compensa a velocidade de convergência.

5.1 Casos especiais

Na sequência vamos ver, através de exemplos, alguns casos especiais nos quais é possível, de maneira fácil, obter a fração contínua simples, partindo da representação não simples.

Exemplo 5.4. *A fração contínua simples de* $\sqrt{a^2+1}$ *é* $[a;\overline{2a}], \forall a \in \mathbb{Z}_+$. *Esse é exatamente o caso em que* $b = 1$ *na representação de* $\sqrt{N}$ *quando* $N = a^2 + b$, *com* $1 \leq b \leq 2a$. *Isto é,*

$$\sqrt{a^2+1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \ddots}}}}$$

■

Exemplo 5.5. *A fração contínua simples de* $\sqrt{a^2+2a}$ *é* $[a;\overline{1,2a}]$. *Equivalentemente,* $\sqrt{a^2-1} = [a-1;\overline{1,2a-2}]$,$\forall a \in \mathbb{Z}_+$.

De fato, ao dividir, sucessivamente, por $2a$ *o numerador e denominador das frações de posições ímpares de*

$$\sqrt{a^2+2a} = a + \cfrac{2a}{2a + \cfrac{2a}{2a + \cfrac{2a}{2a + \cfrac{2a}{2a + \ddots}}}}$$

obtemos

$$\sqrt{a^2+2a} = a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2a + \ddots}}}}$$

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

Agora, observando que $a^2 - 1 = (a-1)^2 + 2(a-1)$*, obtemos também que* $\sqrt{a^2-1} = [a-1; \overline{1, 2a-2}]$. ■

Mais geralmente vale o seguinte:

Exemplo 5.6. *Se* b *divide* $2a$*, isto é,* $2a = b \cdot k$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$*, então* $\sqrt{a^2+b} = [a; \overline{k, 2a}]$*.*

De fato, ao dividir, sucessivamente, por b *o numerador e o denominador das frações de posições ímpares de*

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}}$$

obtemos

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{2a + \ddots}}}}$$

■

Exemplo 5.7. *Existe uma fórmula bastante conhecida de aproximação de raiz quadrada não exata que, inclusive, é frequentemente divulgada por professores em vídeos na internet. A fórmula é a seguinte: Se* $N \neq k^2$ *para todo* $N, k \in \mathbb{N}$*, então*

$$\sqrt{N} \cong \frac{N+B}{2\sqrt{B}},$$

onde $B = \lfloor \sqrt{N} \rfloor^2$*.*

Esse fórmula coincide exatamente com a segunda reduzida da fração contínua

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}},$$

onde $N = a^2 + b$*, com* $a, b \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq b \leq 2a$ *(note que* $a = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ *e* $a^2 = B$*).*

Consequentemente,

$$c_1 = a + \frac{b}{2a} = \frac{2a^2+b}{2a} = \frac{(a^2+b)+a^2}{2a} = \frac{N+B}{2\sqrt{B}}.$$

Isso resulta, de acordo com os resultados apresentados anteriormente, uma aproximação de $\sqrt{N}$ *com erro inferior a* $\dfrac{1}{\sqrt{B}}$*.* ■

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

6 A fração contínua do número e

Obter a fração contínua de uma dado número irracional não é uma tarefa trivial, porém, é possível deduzir, por métodos diversos, frações contínuas de alguns irracionais conhecidos. Como exemplo, vamos apresentar a fração contínua do número e. Este é um exercício retirado do livro de Moreira (2013) [6] e utiliza ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. A obtenção dessa fração contínua será dividida em três etapas.

Etapa 1. Dadas as sequências A_m, B_m e C_m definidas por

$$A_m = \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^m}{m!} e^x dx, \quad B_m = \int_0^1 \frac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!} e^x dx, \quad C_m = \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^{m+1}}{m!} e^x dx,$$

mostrar que, para todo $m \geq 1$, se cumprem as relações

$$A_m + B_{m-1} + C_{m-1} = 0, \quad B_m + 2mA_m - C_{m-1} = 0 \quad \text{e} \quad A_m - B_m + C_m = 0.$$

Etapa 2. Dadas as sequências (p_m) e (q_m) definidas recursivamente como $p_0 = q_0 = p_1 = 1$, $q_1 = 0$ e

$$p_{3m} = p_{3m-1} + p_{3m-2}, \quad p_{3m+1} = 2mp_{3m} + p_{3m-1}, \quad p_{3m+2} = p_{3m+1} + p_{3m},$$

$$q_{3m} = q_{3m-1} + q_{3m-2}, \quad q_{3m+1} = 2mq_{3m} + q_{3m-1}, \quad q_{3m+2} = q_{3m+1} + q_{3m},$$

mostrar por indução que, para todo $m \geq 0$, se cumprem as relações

$$A_m = q_{3m}e - p_{3m}, \quad B_m = p_{3m+1} - q_{3m+1}e \quad \text{e} \quad C_m = p_{3m+2} - q_{3m+2}e.$$

Etapa 3. Usando as etapas 1 e 2, mostrar que

$$e = \lim_{m\to\infty} \frac{p_m}{q_m} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \cdots, 1, 1, 2m, \cdots].$$

Prova da Etapa 1: Primeiramente note que $p(x)e^x$ é uma primitiva para $(p(x) + p'(x))e^x$, para toda função polinomial. Denote $P_m(x) := \dfrac{x^m(x-1)^m}{m!}$, $Q_m(x) := \dfrac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!}$ e $R_m(x) := \dfrac{x^m(x-1)^{m+1}}{m!}$. Então, derivando P_m encontramos a relação $P_m'(x) = Q_{m-1} + R_{m-1}$ e, portanto,

$$A_m + B_{m-1} + C_{m-1} = \int_0^1 (P_m(x) + P_m'(x))e^x\, dx = P_m(1)e - P(0) = 0 \text{ , para todo } m \geq 1.$$

Agora, vamos derivar R_m.

$$\begin{aligned} R_m'(x) &= \frac{mx^{m-1}(x-1)^m(x-1)}{m!} + \frac{(m+1)x^m(x-1)^m}{m!} \\ &= \frac{mx^m(x-1)^m}{m!} - \frac{mx^{m-1}(x-1)^m}{m!} + \frac{(m+1)x^m(x-1)^m}{m!} \\ &= 2mP_m(x) + P_m - R_{m-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916.

Como $R_m = \dfrac{x^m(x-1)^m(x-1)}{m!} = Q_m(x) - P_m(x)$, usando (16), obtemos

$$R_m(x) + R'_m(x) = Q_m(x) + 2mP_m(x) - R_{m-1}(x).$$

Consequentemente,

$$B_m + 2mA_m - C_{m-1} = \int (R_m(x) + R'_m(x))e^x\,dx = R_m(x)e^x\Big|_0^1 = 0. \tag{17}$$

Por fim, a própria relação $R_m = Q_m(x) - P_m(x)$ obtida acima, implica que $P_m(x) - Q_m(x) + R_m(x) = 0$ e imediatamente temos $A_m - B_m + C_m = 0$.

Prova da Etapa 2: Primeiramente observe que $p_2 = p_0 + p_1 = 1 + 1 = 2$ e $q_2 = q_0 + q_1 = 1 + 0 = 1$. Calculando A_0, B_0 e C_0, obtemos

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^1 e^x\,dx = e - 1 = p_0 e - q_0\\
B_0 &= \int_0^1 xe^x\,dx = (x-1)e^x\Big|_0^1 = 1 = p_1 - q_1 e\\
C_0 &= \int_0^1 (x-1)e^x\,dx = (x-2)e^x\Big|_0^1 = 2 - e = p_2 - q_2 e
\end{aligned} \tag{18}$$

Suponhamos que valha para m, vamos provar que as relações valem para $m+1$. Pela **Etapa 1**, temos que

$$\begin{aligned}
A_{m+1} &= -B_m - C_m\\
&= -(p_{3m+1} - q_{3m+1}e) - (p_{3m+2} - q_{3m+2}e)\\
&= -(p_{3m+1} + p_{3m+2}) + (q_{3m+1} + q_{3m+2})e\\
&= q_{3m+3}e - p_{3m+3}\\
&= q_{3(m+1)}e - p_{3(m+1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m+1} &= -2(m+1)A_{m+1} + C_m\\
&= -2(m+1)[q_{3(m+1)}e - p_{3(m+1)}] + p_{3m+2} - q_{3m+2}e\\
&= 2(m+1)p_{3(m+1)} + p_{3m+2} - [2(m+1)q_{3(m+1)} + q_{3m+2}]e\\
&= p_{3(m+1)+1} - q_{3(m+1)+1}e
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C_{m+1} &= B_{m+1} - A_{m+1}\\
&= p_{3(m+1)+1} - q_{3(m+1)+1}e - (q_{3(m+1)}e - p_{3(m+1)})\\
&= p_{3(m+1)+1} + p_{3(m+1)} - (q_{3(m+1)+1} + q_{3(m+1)})e\\
&= p_{3(m+1)+2} - q_{3(m+1)+2}e.
\end{aligned}$$

BOCKER NETO, Carlos; BEZERRA, Rafael Tavares Silva. Fração contínua aplicada à obtenção de boas aproximações da raiz quadrada e do número de Euler. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3002, 26 jul. 2024. `https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6916`.

Prova da Etapa 3: Pelo Corolário 2.3, a sequência $(\frac{p_m}{q_m})$ converge para a fração contínua

$$[1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots, 2(m-1), 1, 1, 2m, \cdots]$$

que coincide com

$$[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots, 2(m-1), 1, 1, 2m, \cdots],$$

onde, na última representação, $a_0 = 2$, $a_{3m-1} = 2m$ para $m \geq 1$ e $a_k = 1$ para todos os outros índices k.

Por outro lado, as relações

$$A_m = q_{3m}e - p_{3m}, \quad B_m = p_{3m+1} - q_{3m+1}e \quad \text{e} \quad C_m = p_{3m+2} - q_{3m+2}e$$

implicam que

$$\frac{A_m}{q_{3m}} = e - \frac{p_{3m}}{q_{3m}}, \quad \frac{B_m}{q_{3m+1}} = e - \frac{p_{3m+1}}{q_{3m+1}} \quad \text{e} \quad \frac{C_m}{q_{3m+2}} = e - \frac{p_{3m+2}}{q_{3m+2}}.$$

Como claramente $|P_m(x)|$, $|Q_m(x)|$ e $|R_m(x)|$ são limitados por $\frac{1}{m!}$ e, consequentemente, $|A_m|$, $|B_m|$ e $|C_m|$ são limitados por e, para todo m, concluímos que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A_m}{q_{3m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{B_m}{q_{3m+1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{C_m}{q_{3m+2}} = 0.$$

Portanto $e = \lim_{m\to\infty} \frac{p_m}{q_m}$ e isso conclui a prova da **Etapa 3** e consequentemente a prova de que

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots, 2(m-1), 1, 1, 2m, \cdots].$$

Com esse resultado, temos uma demonstração formal da irracionalidade do número e, pois possui uma fração contínua infinita.

7 Considerações finais

Este foi um trabalho de revisão bibliográfica em que os autores estudaram um tema que, aparentemente, é pouco estudado no ensino básico. A ideia foi de realizar um estudo aprofundado do tema, mas também trazer algo que fosse mais palpável e que professores do ensino básico pudessem apreciar esse tema e, até levá-lo aos seus alunos, em situações mais simples, como por exemplo na obtenção de aproximações da raiz quadrada (não exata) de números naturais.

Dessa forma, acreditamos que este trabalho possa servir como um primeiro contato com o tema de frações contínuas, como também, servir de motivação e inspiração para as pessoas que pretendam realizar um estudo mais profundo do assunto.

Referências

BESKIN, N. M. **Fascinating Fraction**. Translated from the Russian by V. I. Kisin. Moscow: Mir Publishers, 1986.

BREZINSKI, Claude. **History of Continued Fractions and Pade Approximants**. [*S. l.*]: Springer, 1991. Springer Series in Computational Mathematics, v. 12.

COLLINS, Darren C. **Continued Fractions**. MIT Undergraduate Journal of Mathematics, 2001. Disponível em: https://web.archive.org/web/20011120064343/http://www-math.mit.edu/phase2/UJM/vol1/COLLIN~1.PDF. Acesso em: 26 jul. 2024.

MARTINEZ, Fabio Brochero; MOREIRA, Carlos Gustavo; SALDANHA, Nicolau; TENGAN, Eduardo. **Teoria dos Números**: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

MOLLIN, Richard A. Frações Contínuas e Palindromia. **Matemática Universitária**, [*s. l.*], n. 26-27, p. 29-47, jun.-dez. 1999. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n26_n27_Artigo02.pdf. Acesso em: 11 jul. 2024.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. Frações contínuas, representações de números e aproximações diofantinas. *In*: COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUDESTE, 1., abr. 2011, São João del Rey. **Anais** [...]. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. p. 1-39. Disponível em: http://emis.icm.edu.pl/journals/em/docs/coloquios/SE-1.06.pdf. Acesso em: 24 set. 2023.