Solução exata para equações diferenciais parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores

Exact solution to partial differential equations based on Lie symmetries by operator exponential rule

Solución exacta de ecuaciones diferenciales parciales basadas en simetrías de Lie por regla exponencial del operador

Aquiles Almeida Ribeiro[1]
Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Pelotas, RS, Brasil
https://orcid.org/0009-0000-6715-4037, http://lattes.cnpq.br/4751008800378669
Claudio Zen Petersen[2]
Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Pelotas, RS, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-4720-6888, http://lattes.cnpq.br/6672178100422350
Jorge Luiz de Mello Caurio Junior[3]
Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Pelotas, RS, Brasil
https://orcid.org/0009-0008-1878-7354, http://lattes.cnpq.br/4795190513634843
Fernanda Tumelero[4]
Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, RS, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-8905-7860, http://lattes.cnpq.br/3738415267902511

Resumo: Neste trabalho, apresenta-se o método da exponencial de operadores, que consiste em uma técnica para resolver equações diferenciais parciais (EDPs) que envolvem operadores lineares com a característica de invariância. Partindo da ideia baseada nas simetrias de Lie, propõe-se uma representação de uma solução em termos de uma exponencial de um operador linear, que é obtida através da expansão da exponencial em uma série de potências e do uso de uma técnica de aproximação para lidar com cada termo da série. Essa

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática e mestrando em Modelagem Matemática pela Universidade Federal de Pelotas. **Contribuição de autoria**: Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Investigação, Metodologia, Software, Validação e Visualização. **Contato**: aquilesalmeida00@email.com.

[2]**Currículo sucinto**: Bacharel em Matemática Aplicada e Computacional, e mestre e doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Docente da Universidade Federal de Pelotas. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Obtenção de Financiamento, Recursos, Software, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato**: claudiopetersen@yahoo.com.br.

[3]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática e mestrando em Modelagem Matemática pela Universidade Federal de Pelotas. **Contribuição de autoria**: Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Investigação, Metodologia, Software, Validação e Visualização. **Contato**: juniorcaurio@gmail.com.

[4]**Currículo sucinto**: Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Bento Gonçalves, mestra em Modelagem Matemática pela Universidade Federal de Pelotas, doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Contribuição de autoria**: Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato**: fernanda.tumelero@ufpel.edu.br.

RIBEIRO, Aquiles Almeida; PETERSEN, Claudio Zen; CAURIO JUNIOR, Jorge Luiz Mello; TUMELERO, Fernanda. Solução exata para equações parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3001, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6913.

técnica envolve a decomposição do operador em uma soma de dois ou mais operadores simples, que podem ser resolvidos de forma exata e, portanto, sem a necessidade de se falar sobre análise de convergência, estabilidade ou erros envolvidos na aproximação dos operadores diferenciais envolvidos. Resolvem-se cinco equações diferencias parciais de primeira ordem, verificando o caráter exato das soluções encontradas, além da ilustração das mesmas em forma gráfica.

Palavras-chave: simetrias de Lie; exponencial de operadores; equação diferencial parcial; solução exata.

Abstract: In this work it is presented the exponential method of operators is presented, which consists of a technique for solving partial differential equations (PDE) that involve linear operators with the characteristic of invariance. Starting from the idea based on Lie symmetries, we propose a representation of a solution in terms of an exponential of a linear operator, which is obtained through the expansion of the exponential in a series of powers and the use of an approximation technique to deal with each term in the series. This technique involves decomposing the operator into a sum of two or more simple operators, which can be exactly solved and, therefore, without the need to talk about analysis of convergence, stability or errors involved in the approximation of the differential operators involved. Five first-order partial differential equations are solved, verifying the exact nature of the solutions found, in addition to their illustration in graphic form.

Keywords: Lie symmetries; exponential of operators; partial differential equation; exact solution.

Resumen: En este trabajo, se presenta el método de la exponencial de operadores, que consiste en una técnica para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que involucran operadores lineales con la característica de invariancia. Partiendo de la idea basada en las simetrías de Lie, se propone una representación de una solución en términos de una exponencial de un operador lineal, que se obtiene mediante la expansión de la exponencial en una serie de potencias y del uso de una técnica de aproximación para tratar con cada término de la serie. Esta técnica implica la descomposición del operador en una suma de dos o más operadores simples, que pueden resolverse de forma exacta y, por lo tanto, sin la necesidad de hablar sobre análisis de convergencia, estabilidad o errores involucrados en la aproximación de los operadores diferenciales implicados. Se resuelven cinco ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, comprobando la naturaleza exacta de las soluciones encontradas, además de ilustrarlas en forma gráfica.

Palabras clave: simetrías de Lie; exponencial de operadores; ecuación diferencial parcial; solución exacta.

Data de submissão: 29 de setembro de 2023.

Data de aprovação: 26 de fevereiro de 2024.

1 Introdução

A obtenção de soluções exatas para equações diferenciais parciais (EDPs) desempenham um papel crucial em várias áreas da matemática, física e engenharia, permitindo validar modelos teóricos. Quando se tem uma solução exata para uma EDP, é possível comparar os resultados teóricos com os resultados numéricos ou experimentais. Isso ajuda a garantir que os modelos estejam corretos e que as previsões teóricas se alinhem com a realidade observada. Soluções exatas frequentemente fornecem uma compreensão profunda dos fenômenos físicos ou matemáticos subjacentes. Elas revelam características importantes das equações, como simetrias, comportamento assintótico e propriedades de estabilidade.

Ao longo dos anos diversos pesquisadores se debruçaram na busca de métodos capazes de gerar soluções exatas para equações diferenciais parciais (Ibragimov, 1999; Olver, 1987). Diversas dessas propostas de soluções serviram como ponto de partida para a generalização e extensão das equações para casos mais complexos ou situações especiais. Isso permite estudar uma variedade de cenários e condições diferentes. Além disso, em muitos campos da engenharia e ciência, como a dinâmica de fluidos, a transferência de calor e a propagação de ondas, soluções exatas são fundamentais para projetar sistemas eficientes e seguros, otimizar processos industriais e tomar decisões importantes.

Nesse sentido, o método das simetrias de Lie é amplamente utilizado na física teórica para resolver equações diferenciais em diversas áreas, como a teoria da relatividade, a mecânica quântica e a mecânica dos fluidos. Além disso, esse método tem aplicações na matemática pura, incluindo a classificação de equações diferenciais e a teoria de grupos de Lie (Georgi, 2000; Gilmore, 2008; Zee, 2016).

Com intuito de obter uma estrutura de solução que possa ser estendida para serem resolvidas de maneira exata, propõe-se neste trabalho uma representação de uma solução em termos de uma exponencial de um operador linear. Essa representação é obtida através da expansão da exponencial em uma série de potências e do uso de uma técnica de aproximação para lidar com cada termo da série. Essa técnica envolve a decomposição do operador em uma soma de dois ou mais operadores simples, que podem ser resolvidos de forma exata. Essa técnica está fundamentada nas chamadas simetrias de Lie, que são mudanças de variáveis capazes de transformar uma solução exata em outra solução exata para a mesma equação. Essas simetrias estão implicitamente determinadas através de grupos de operadores responsáveis pelas transformações.

RIBEIRO, Aquiles Almeida; PETERSEN, Claudio Zen; CAURIO JUNIOR, Jorge Luiz Mello; TUMELERO, Fernanda. Solução exata para equações parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3001, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6913.

Nesse sentido, para mostrar a viabilidade da metodologia proposta, propõe-se a resolução de cinco equações diferenciais parciais, mostrando o caráter exato da solução, apresentando gráficos ilustrativos das mesmas. Devido ao caráter exato da solução, dispensa-se o estudo da análise de convergência, estabilidade ou erros gerados e propagados como em métodos numéricos e híbridos.

2 Metodologia

De forma resumida, grupos de Lie são conjuntos de operadores diferenciais de primeira ordem, denotados por v_i, e chamados operadores infinitesimais do grupo de simetria admitido pela equação diferencial (Ibragimov, 1999), que possuem a seguinte propriedade:

$$e^{v_i} f(x, y, ...) = g(x, y, ...). \tag{1}$$

Essa propriedade pode ser interpretada como a aplicação da exponencial de um gerador sobre uma solução exata f de forma a produzir uma nova solução exata, dada por g.

A obtenção do grupo de simetria de Lie que gera simetrias de soluções exatas de determinada equação diferencial, se baseia na resolução do problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} = & [V] f \\ f(\epsilon) = & f_0 \end{cases} \tag{2}$$

para $\epsilon = 0$. Aqui, V corresponde a um operador linear de primeira ordem. O operador V é definido no espaço das funções diferenciáveis de ϵ para a função f, a qual aparece na equação (1). Cabe ressaltar que nem sempre é fácil identificar as simetrias adequadas para um determinado conjunto de equações diferenciais. Nesse sentido, encontrar o grupo de transformações que preservam as equações é uma tarefa que pode ser complexa e envolver tentativa e erro. Além disso, nem todas as equações diferenciais possuem simetrias significativas que possam levar a simplificações ou soluções exatas. Em muitos casos, as simetrias podem não ser óbvias ou simplesmente não existir para as equações dadas.

A solução da equação (2) é conhecida (Boyce; DiPrima; Meade, 2010) e é dada por

$$f = \left[e^{\epsilon V}\right] f_0, \tag{3}$$

onde f_0 é a condição inicial para $\epsilon = 0$ e V é um operador linear de primeira ordem. Isso implica na aplicação da exponencial do operador V sobre f_0. Esse operador V é uma combinação linear dos próprios geradores do grupo de simetria v_i, os quais formam o grupo de Lie propriamente dito.

RIBEIRO, Aquiles Almeida; PETERSEN, Claudio Zen; CAURIO JUNIOR, Jorge Luiz Mello; TUMELERO, Fernanda. Solução exata para equações parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3001, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6913.

O processo da aplicação de $\left[e^{\epsilon V}\right]$ se dá via expansão em série de Taylor da forma

$$\left[e^{\epsilon V}\right] f_0 = f_0 + [\epsilon V] f_0 + \frac{\epsilon^2 V^2}{2!} f_0 + \cdots + \frac{\epsilon^k V^k}{k!} f_0 + \cdots , \tag{4}$$

onde V^k representa a k-ésima potência do operador V aplicado em f_0. Para várias classes de equações diferencias já se conhece os geradores infinitesimais e eles podem, em geral, ser escritos como

$$\left[e^{\epsilon V_1 + \epsilon V_2 + \cdots + \epsilon V_k}\right] f_0 , \tag{5}$$

onde obtém-se uma nova solução exata a partir da aplicação do grupo de simetria sobre a solução prévia f_0. Fica claro que para a aplicação da equação (5) existe a necessidade de manipulação da exponencial do grupo, representado como combinação linear de todos os geradores infinitesimais. Admitindo que esses geradores comutem entre si, isso possibilita aplicar a exponencial em cada gerador individualmente, da forma

$$\left[e^{\epsilon V_1}\left[e^{\epsilon V_2} ... \left[e^{\epsilon V_k} f_0\right]\right]\right] = h. \tag{6}$$

A comutatividade dos geradores significa que eles podem ser permutados sem alterar o resultado das operações. Essa suposição é crucial para a aplicação das regras de manipulação da exponencial de forma direta e eficaz. No contexto das equações diferenciais, a comutatividade dos geradores permite que a exponencial do grupo seja expressa como uma combinação linear dos geradores, como mostrado na equação (5). Isso simplifica o processo de aplicação da exponencial sobre uma solução prévia, resultando em uma nova solução exata. Caso não seja possível aplicar alguma regra de manipulação de exponenciais de operadores, disponíveis na literatura (Dattoli *et al.*, 2001), a expansão em série de Taylor acarretará em grande dificuldade de manipular o grande número de termos da série, impossibilitando sua aplicação em casos realísticos nos problemas de física-matemática.

Na próxima seção vamos apresentar as regras de manipulação de exponencial de operadores para equações diferenciais parciais de primeira ordem com coeficiente constante e variável e apresentar exemplos de aplicações da metodologia proposta.

2.1 Regra para manipulação de exponencial de operadores de primeira ordem com coeficiente constantes

Considere a equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = AF\,, \tag{7}$$

cuja solução formal é da forma

$$F = \left[e^{\int_0^t A\,ds}\right]\,F_0\,, \tag{8}$$

onde F_0 é qualquer função arbitrária que satisfaça a condição inicial do problema (Boyce; DiPrima; Meade, 2010).

Sendo A o operador diferencial $A = -\omega\frac{\partial}{\partial x}$, com ω constante, então a equação $\frac{\partial F}{\partial t} = -\omega\frac{\partial F}{\partial x}$ tem solução dada por

$$F(x,t) = \left[e^{-\omega t\frac{\partial}{\partial x}}\right]\,F_0. \tag{9}$$

Uma vez que $e^{-\omega t\frac{\partial}{\partial x}}$ tenha expansão em série de Taylor, aplica-se sobre a função $F_0(x)$ e escreve-se a equação (9) como

$$F(x,t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\omega t\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\right]F_0\,. \tag{10}$$

Além disso, sendo F_0 uma função analítica, sabe-se que

$$F_0(x+\Delta x) = F_0 + \Delta x\frac{\partial F_0}{\partial x}\bigg|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}\bigg|_x + \cdots + \frac{(\Delta x)^k}{k!}\frac{\partial^k F_0}{\partial x^k}\bigg|_x + \cdots\,, \tag{11}$$

se $\Delta x = -\omega t$, é fácil ver que

$$F(x,t) = F_0(x-\omega t)\,. \tag{12}$$

Portanto, de forma geral, a regra da exponencial de operadores de primeira ordem com coeficientes constantes pode ser obtida por

$$\left[e^{c\frac{\partial}{\partial x}}\right]F_0 = F_0(x+c). \tag{13}$$

2.2 Regra para manipulação de exponencial de operadores de primeira ordem com coeficiente variável

Considere a equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = G(x)\frac{\partial F}{\partial x}\,, \tag{14}$$

com $A = G(x)\frac{\partial}{\partial x}$ e $G(x)$ uma função contínua diferente de zero no domínio de interesse, que tem solução formal dada por

$$F(x,t) = \left[e^{G(x)\,t\,\frac{\partial}{\partial x}}\right] F_0\,, \tag{15}$$

com F_0 uma função analítica arbitrária satisfazendo a condição inicial do problema. Para desenvolver a técnica de manipulação de exponencial de operadores com coeficiente variável, basta fazer uma mudança de variável, a fim de recair na mesma estrutura conhecida da regra anteriormente desenvolvida para coeficientes constantes. Então, fazendo um mapeamento $(x \to u)$ de tal forma que

$$G(x)\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}, \tag{16}$$

podemos reescrever (14) como

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u}\,, \tag{17}$$

cuja solução formal, conforme desenvolvida anteriormente, para $c = 1$, é da forma

$$F = F_0\,(u + t)\ , \tag{18}$$

sendo F_0 qualquer função arbitrária que satisfaça a condição inicial do problema. Pela regra da cadeia sabemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\,, \tag{19}$$

ou seja,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial F}{\partial u}\,. \tag{20}$$

Comparando com a equação alvo original (16) depreende-se que

$$G(x) = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}\,, \tag{21}$$

tem solução dada por

$$u = \int \frac{1}{G(x)}dx + C_1\,. \tag{22}$$

Substituindo (22) na solução formal (18), chega-se que

$$F = F_0\left(\int \frac{1}{G(x)}dx + C_1 + t\right). \tag{23}$$

Portanto, a regra de manipulação de exponencial de operadores para equações diferencias parciais com coeficientes variáveis é dada por

$$F(x,t) = \left[e^{G(x)\frac{\partial}{\partial x}}\right] F_0(x) = F_0\left(\int \frac{1}{G(x)}dx + C_1 + t\right). \tag{24}$$

2.3 Exemplos de solução

Com intuito de exemplificar a metodologia proposta, apresentam-se a seguir cinco exemplos de soluções de equações diferenciais parciais com condições iniciais resolvidas de forma exata.

Exemplo 1: Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial y} \\ F(1,y) = \ln y \end{cases} \tag{25}$$

Reescrevendo a equação (25) como

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{26}$$

identifica-se que $G(x) = x$. Assim, a equação (26) tem solução geral dada por

$$F = F_0(\ln x + C_1 + y), \tag{27}$$

e considerando $C_1 = 0$, chega-se que

$$F = F_0(\ln x + y). \tag{28}$$

Aplicando a condição inicial dada em (25) na equação (28) tem-se

$$F(1,y) = F_0(\ln 1 + y) = \ln y. \tag{29}$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial (PVI) é dada por

$$F(x,y) = \ln(\ln x + y). \tag{30}$$

Verificando a solução, nota-se que

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{\ln x+y}\frac{1}{x}=\frac{1}{x(\ln x+y)}\Longrightarrow\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x(\ln x+y)} \tag{31}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{\ln x+y}1\Longrightarrow\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{\ln x+y}. \tag{32}$$

Substituindo as equações (31) e (32) em (30), nota-se que

$$x\left(\frac{1}{x(\ln x+y)}\right)=\frac{1}{\ln x+y}\Longrightarrow\frac{1}{\ln x+y}=\frac{1}{\ln x+y}. \tag{33}$$

Além disso, aplicando a condição inicial percebe-se que

$$F(1,y)=\ln\left(\ln 1+y\right)=\ln 0+y=\ln y, \tag{34}$$

portanto,

$$F(1,y)=\ln y. \tag{35}$$

Exemplo 2: Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial t}=x^2\,\frac{\partial F}{\partial x}+y\,\frac{\partial F}{\partial y}\\ F(x,y,0)=\left(-\frac{1}{x}\right)^5(\ln y)^5\end{cases} \tag{36}$$

Considerando os operadores $A=x^2\,\frac{\partial}{\partial x}$ e $B=y\,\frac{\partial}{\partial y}$, verifica-se primeriamente se $[A,B]=AB-BA=0$. É fácil ver que:

i) $AB=x^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)=x^2y\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$;

ii) $BA=y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\,\frac{\partial}{\partial x}\right)=yx^2\,\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$.

Logo, por i) e ii), temos $[A,B]=AB-BA=0$, ou seja, os operadores comutam.

Como os operadores A e B comutam, podemos aplicar as regras de manipulação de exponencial de operadores.

Através de uma mapeamento $(x,y)\Rightarrow(u,v)$, podemos reescrever

$$x^2\,\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u} \tag{37}$$

e

$$y\,\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial v}\,. \tag{38}$$

RIBEIRO, Aquiles Almeida; PETERSEN, Claudio Zen; CAURIO JUNIOR, Jorge Luiz Mello; TUMELERO, Fernanda. Solução exata para equações parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3001, 26 jul. 2024. `https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6913`.

Substituindo (37) e (38) em (36) temos

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\,, \tag{39}$$

cuja solução formal é da forma

$$F(x, y, t) = \left[e^{\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)t}\right] F_0\,. \tag{40}$$

Pela comutatividade dos operadores, temos que

$$F(x, y, t) = \left[e^{\frac{\partial}{\partial u}t}\right]\left[e^{\frac{\partial}{\partial v}t}\right] F_0\,, \tag{41}$$

que tem solução conforme regra da manipulação constante de exponencial de operadores para v da forma

$$F(x, y, t) = \left[e^{\frac{\partial}{\partial u}t}\right] F_0(u, v + t), \tag{42}$$

e para u

$$F(x, y, t) = F_0(u + t, v + t)\,. \tag{43}$$

Pela regra da cadeia sabemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{44}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{45}$$

Pelas equações (44) e (45) temos, respectivamente,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial F}{\partial x} \tag{46}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial y}}\frac{\partial F}{\partial y}\,. \tag{47}$$

Além disso, pelas equações (37) e (46) temos

$$x^2\,\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial F}{\partial x} \tag{48}$$

e pelas equações (38) e (47) temos

$$y\,\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial y}}\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{49}$$

Percebe-se que, com a equação (48), encontramos u da forma

$$x^2 = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \overset{\int}{\Longrightarrow} u = -\frac{1}{x} + C_1 \,. \tag{50}$$

Da mesma forma, pela equação (49) encontramos v da forma

$$y = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial y}} \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y} \overset{\int}{\Longrightarrow} v = \ln y + C_2 \,. \tag{51}$$

Substituindo (50) e (51) em (43), encontra-se a solução geral exata de (36) como

$$F(x,y,t) = F_0 \left(-\frac{1}{x} + C_1 + t \,, \ln y + C_2 + t \right) \,. \tag{52}$$

Aqui, a solução encontrada na equação (52) é válida para qualquer função arbitrária F_0 que satisfaça a condição inicial. Para aplicar a condição inicial, basta fazer uma mudança de variável da forma

$$s = -\frac{1}{x} + C_1 + t \tag{53}$$

e

$$w = \ln y + C_2 + t, \tag{54}$$

de tal forma que (52) possa ser escrita como

$$F(x,y,t) = F_0(s,w) \,. \tag{55}$$

Isolando s e w, respectivamente, em (53) e (54), temos que

$$x = \frac{-1}{s - C_1 - t} \tag{56}$$

e

$$y = e^{(w - C_2 - t)} \,. \tag{57}$$

Aplicando a condição inicial (36) já escrita em termos das mudanças de variáveis, temos

$$F_0(s,w) = \left(-\frac{1}{\frac{-1}{s - C_1}} \right)^5 \left(\ln e^{(w - C_2)} \right)^5 , \tag{58}$$

que pode ser reescrita como

$$F_0(s,w) = (s - C_1)^5 \; (w - C_2)^5 \,. \tag{59}$$

Voltando para as variáveis originais através de (53) e (54), respectivamente, temos a solução particular do problema (36) como

$$F(x,y,t) = \left(-\frac{1}{x} + t \right)^5 (\ln y + t)^5 \,. \tag{60}$$

RIBEIRO, Aquiles Almeida; PETERSEN, Claudio Zen; CAURIO JUNIOR, Jorge Luiz Mello; TUMELERO, Fernanda. Solução exata para equações parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3001, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6913.

Exemplo 3: Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial x} \\ F(x,0) = \sin x \end{cases} \tag{61}$$

Partindo da estrutura de solução já encontrada na Eq. (24), nota-se que

$$G(x) = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \frac{1}{G(x)} = x^2 \overset{\int}{\Longrightarrow} \int \frac{dx}{G(x)} = \int x^2 dx \Longrightarrow \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1\,. \tag{62}$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$F = F_0\left(\frac{x^3}{3} + t + C_1\right). \tag{63}$$

Considerando $C_1 = 0$, fica-se com

$$F = F_0\left(\frac{x^3}{3} + t\right). \tag{64}$$

Aplicando a condição inicial

$$F(x,0) = F_0\left(\frac{x^3}{3} + 0\right) = F_0\left(\frac{x^3}{3}\right) = \sin x \tag{65}$$

e fazendo $z = \frac{x^3}{3} \Longrightarrow x = \sqrt[3]{3z} \Longrightarrow F_0(z) = \sin(\sqrt[3]{3z})$, chega-se que

$$F(x,t) = \sin\left(\sqrt[3]{3\left(\frac{x^3}{3} + t\right)}\right) \Longrightarrow F(x,t) = \sin\left(\sqrt[3]{x^3 + 3t}\right). \tag{66}$$

Logo, a solução particular do PVI é dada por

$$F(x,t) = \sin\left(\sqrt[3]{x^3 + 3t}\right). \tag{67}$$

Exemplo 4: Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = t\frac{\partial F}{\partial x} \\ F(x,0) = x^2 \sin x \end{cases} \tag{68}$$

Reescrevendo a equação (68) como

$$\frac{\partial F}{\partial t} = t\frac{\partial F}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{69}$$

podemos partir da estrutura de solução já encontrada na equação (24), na qual nota-se que

$$G(t) = \frac{1}{t} \Longrightarrow \frac{1}{G(t)} = t \overset{\int}{\Longrightarrow} \int \frac{dt}{G(t)} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C_1. \tag{70}$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$F = F_0\left(\frac{t^2}{2} + x + C_1\right). \tag{71}$$

Tomando $C_1 = 0$ tem-se

$$F = F_0\left(\frac{t^2}{2} + x\right). \tag{72}$$

Aplicando a condição inicial

$$F(x,0) = F_0\left(\frac{0^2}{2} + x\right) = F_0(x) = x^2 \sin x \Longrightarrow F(x,t) = \left(\frac{t^2}{2} + x\right)^2 \sin\left(\frac{t^2}{2} + x\right). \tag{73}$$

Logo, a solução particular do PVI é dada por

$$F(x,t) = \left(\frac{t^2}{2} + x\right)^2 \sin\left(\frac{t^2}{2} + x\right). \tag{74}$$

Exemplo 5: Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ F(x,y,0) = x^5 y^5 \end{cases} \tag{75}$$

Considerando os operadores diferenciais $A = a\frac{\partial}{\partial x}$ e $B = b\frac{\partial}{\partial y}$, verifica-se que $[A,B] = AB - BA = 0$, uma vez que:

i) $AB = a\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial}{\partial y}\right) = ab\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$;

ii) $BA = b\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\right) = ab\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$.

Logo, $[A,B] = ab\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - ab\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = 0$. Como os operadores comutam, podemos aplicar o método da exponencial de operadores. Considerando $k = A + B$, reescreve-se a equação (75) como

$$\frac{\partial F}{\partial t} = kF. \tag{76}$$

A solução de (76) é dada por $F = F_0\, e^{kt}$, ou seja,

$$F = F_0\, e^{\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)t} \Longrightarrow F = F_0\, e^{t\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)} \Longrightarrow F = e^{at\frac{\partial}{\partial x}}\, e^{bt\frac{\partial}{\partial y}}\, F_0(x,y). \tag{77}$$

Aplicando a regra da exponencial de operadores na variável y tem-se

$$F = e^{at\frac{\partial}{\partial x}}\, \underbrace{e^{bt\frac{\partial}{\partial y}} F_0(x,y)} \Longrightarrow F = e^{at\frac{\partial}{\partial x}} F_0(x, y+bt). \tag{78}$$

RIBEIRO, Aquiles Almeida; PETERSEN, Claudio Zen; CAURIO JUNIOR, Jorge Luiz Mello; TUMELERO, Fernanda. Solução exata para equações parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3001, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6913.

Analogamente, aplicando a regra da exponencial de operadores na variável x tem-se

$$F = \underbrace{e^{at\frac{\partial}{\partial x}} F_0(x, y + bt)}. \tag{79}$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$F = F_0(x + at, y + bt). \tag{80}$$

Aplicando a condição inicial tem-se que

$$F(x, y, 0) = x^5 y^5 \Longrightarrow F(x, y, 0) = F_0(x, y) = x^5 y^5. \tag{81}$$

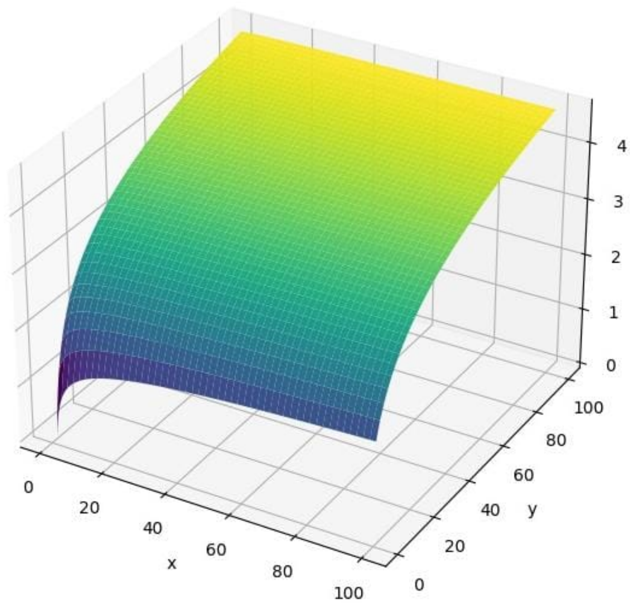
Logo, a solução do PVI é dada por

$$F(x, y, t) = (x + at)^5 (y + bt)^5. \tag{82}$$

3 Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados gráficos das soluções exatas encontradas para as EDPs dos exemplos 1 a 5. Na Figura 1, apresenta-se a solução do Exemplo 1, para o qual consideramos $x, y \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 100$ e $1 \leq y \leq 100$.

Figura 1 – Gráfico ilustrativo da solução exata do Exemplo 1



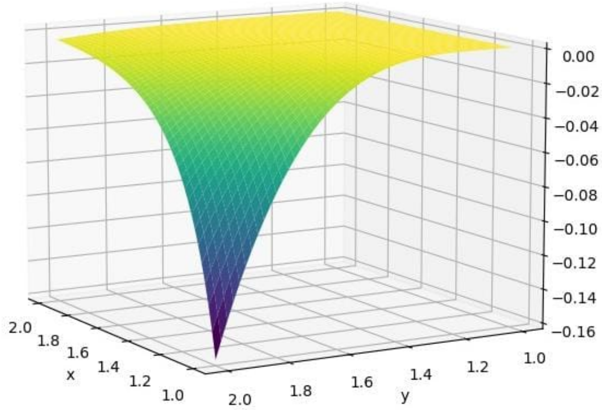
Fonte: Elaboração dos autores.

RIBEIRO, Aquiles Almeida; PETERSEN, Claudio Zen; CAURIO JUNIOR, Jorge Luiz Mello; TUMELERO, Fernanda. Solução exata para equações parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3001, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6913.

Analisando o gráfico nota-se o crescimento lento da superfície no sentido positivo dos eixos x e y no intervalo considerado.

Na Figura 2, apresenta-se a solução do Exemplo 2, para o qual consideramos $x, y, t \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2$ e $1 \leq y \leq 2$ para $t = 0$.

Figura 2 – Gráfico ilustrativo da solução exata do Exemplo 2

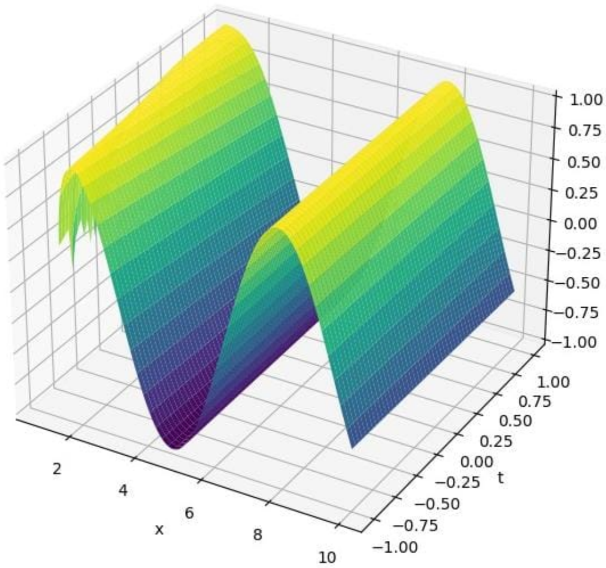


Fonte: Elaboração dos autores.

Analisando o gráfico nota-se o crescimento da superfície no sentido positivo do eixo x e decrescimento da superfície no sentido do eixo y no intervalo considerado.

Na Figura 3, apresenta-se a solução do Exemplo 3, para o qual consideramos $x, t \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 10$ e $-1 \leq t \leq 1$.

Figura 3 – Gráfico ilustrativo da solução exata do Exemplo 3



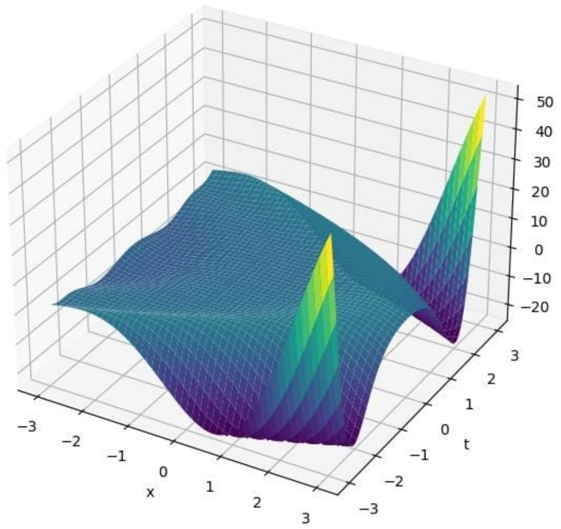
Fonte: Elaboração dos autores.

RIBEIRO, Aquiles Almeida; PETERSEN, Claudio Zen; CAURIO JUNIOR, Jorge Luiz Mello; TUMELERO, Fernanda. Solução exata para equações parciais baseado em simetrias de Lie pela regra de exponencial de operadores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 2, p. e3001, 26 jul. 2024. https://doi.org/10.35819/remat2024v10i2id6913.

Analisando o gráfico observa-se o comportamento senoidal da superfície no sentido do eixo x, em contrapartida pode-se observar um comportamento constante da superfície no sentido do eixo t no intervalo considerado.

Na Figura 4, apresenta-se a solução do Exemplo 4, para o qual consideramos $x, t \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq t \leq 3$. Analisando o gráfico observa-se a simetria da superfície em relação ao eixo t no intervalo considerado.

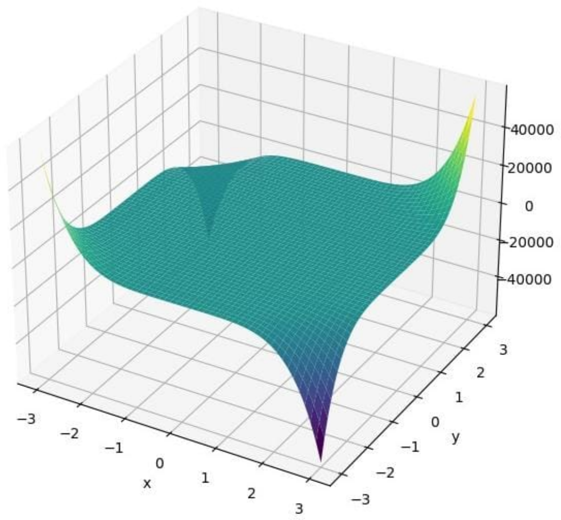
Figura 4 – Gráfico ilustrativo da solução exata do Exemplo 4



Fonte: Elaboração dos autores.

Na Figura 5, apresenta-se a solução do Exemplo 5, para o qual consideramos $x, y, t \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$ e $t = 0$.

Figura 5 – Gráfico ilustrativo da solução exata do Exemplo 5



Fonte: Elaboração dos autores.

Analisando o gráfico, observa-se o um crescimento da superfície quando x e y assumem valores de mesmo sinal, comportamento inverso ocorre quando x e y assumem valores de sinais opostos. Esse comportamento crescente e decrescente da superfície ocorre de maneira acelerada nos extremos do intervalo considerado.

4 Conclusões

Neste trabalho, apresentou-se uma metodologia para obtenção de soluções exatas de equações diferenciais parciais baseada nas simetrias de Lie, onde a solução é determinada em termos de uma exponencial de um operador linear. Esta é obtida através da expansão da exponencial em uma série de potências e do uso de uma técnica de aproximação para lidar com cada termo da série.

A importância de se obter soluções exatas para equações diferenciais parciais é crucial, uma vez que essas soluções tem uma aptidão relevante para gerar soluções *benchmark*, para validar resultados de métodos numéricos computacionais. Além disso, as soluções de caráter exato não possuem nenhum tipo de erro associado, proveniente das aproximações dos operadores diferencias ou integro-diferencias, característica dos métodos numéricos. Logo, não há de se tratar aqui sobre análise de convergência, estabilidade, problemas de condicionamento *etc*. Além disso, as soluções exatas não carregam em sua formulação aproximação por séries de potências infinitas, característica das soluções em representação analítica, que necessitam, de certo modo, de uma análise de convergência das soluções em série, além da garantia dos problemas de inversão, muito comuns nas referidas soluções por transformadas integrais.

A principal vantagem do método da exponencial de operadores aqui apresentado é que ele pode lidar com equações diferenciais parciais complexas com muitos termos e variáveis. Além disso, esse método permite que as soluções sejam calculadas com alta precisão com baixo custo computacional, tornando-o uma técnica computacionalmente eficiente. Ainda, essa ideia pode ser estendida para geradores de ordem mais alta que um, desde que obedeçam a comutatividade entre si.

O grande desafio da solução exata por exponencial de operadores é que ele requer conhecimento prévio dos operadores envolvidos na equação diferencial, uma vez que precisamos garantir comutatividade dos mesmos. Isso significa que a técnica pode não ser adequada para resolver equações diferenciais parciais com operadores complexos, desconhecidos e, principalmente, não comutativos. Além disso, para a satisfação das condições iniciais e condições de contorno requer-se uma escolha adequada de funções arbitrárias que satisfaçam as mesmas. Nesse sentido, como perspectiva futura, pretende-se estender a ideia proposta para equações diferenciais lineares e não-lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e variáveis, a fim de verificar a validade e restrições da solução proposta. Portanto, a metodologia empregada para os problemas abordados pode ser estendida e aplicada para diversas áreas da ciência, como a engenharia, com a vantagem de se obter soluções de baixo custo computacional e sem erros de aproximação, devido ao caráter exato da solução formulado.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) pelo suporte financeiro concedido.

Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, Douglas B. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

DATTOLI, G.; MANCHO, A. M.; QUATTROMINI, M.; TORRE, A. Exponential operators, generalized polynomials and evolution problems. **Radiation Physics and Chemistry**, [*s. l.*], v. 61, n. 2, p. 99-108, 2001. DOI: https://doi.org/10.1016/S0969-806X(00)00426-6.

IBRAGIMOV, N. H. **Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.

GEORGI, H. **Lie Algebras In Particle Physics**: from Isospin To Unified Theories. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. DOI: https://doi.org/10.1201/9780429499210.

GILMORE, R. **Lie Groups, Physics, and Geometry**: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

OLVER, P. J. **Applications of Lie Groups to Differential Equations**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1987.

ZEE, A. **Group theory in a nutshell for physicists**. New Jersey: Princeton University Press, 2016.