Uma solução definitiva para o problema do ponto mais visitado no plano e no espaço

A definitive solution to the most visited point problem in both the plane and space

Una solución definitiva al problema del punto más visitado tanto en el plano como en el espacio

Antônio Luiz de Melo[1]
Universidade de Brasília (UNB), Brasília, DF, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-1809-9937, http://lattes.cnpq.br/7916809389452643
Rogério César dos Santos[2]
Universidade de Brasília (UNB), Brasília, DF, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-1362-2234, http://lattes.cnpq.br/0041767607288381

Resumo: Neste artigo, iremos resolver o problema do ponto mais visitado nos retângulos e nos paralelepípedos, sendo que, nos quadrados, o problema já se encontra resolvido em Santos e Castilho (2013). O problema consiste no seguinte: delimitado um retângulo no primeiro quadrante do plano cartesiano e com vértice inferior esquerdo na origem $(0,0)$, procuramos o ponto de coordenadas inteiras pelo qual passam mais caminhos, cujas trajetórias são determinadas por passos de tamanho inteiro que são dados para cima ou para a direita, partindo da origem do sistema cartesiano e chegando no vértice superior direito (M,N) do retângulo. As conclusões que chegamos foram que o ponto mais visitado no retângulo M por N, com $M > N$, é o ponto $(1,0)$; nos paralelepípedos M por N por P, com $M > N \geq P$, o ponto mais visitado é o ponto $(1,0,0)$; nos paralelepípedos regulares M por M por M, será o ponto $(1,1,1)$ para $M = 2$, e para $M > 2$ serão os pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Utilizamos, para os cálculos, as ferramentas básicas da Análise Combinatória e o Princípio de Indução.

Palavras-chave: ponto mais visitado; reticulados no plano; retângulo; paralelepípedo; análise combinatória.

Abstract: In this article, we will solve the problem of the most visited point within rectangles and parallelepipeds, with the problem already solved for squares in Santos and Castilho (2013). The problem is as follows: considering a rectangle in the first quadrant of the Cartesian plane with the lower-left vertex at the origin $(0,0)$, we seek the integer coordinates through which the most paths pass. These paths are determined by integer steps either upwards or to the right, starting from the origin of the Cartesian system and reaching the upper-right vertex (M,N) of the rectangle. The conclusions we have reached are that the most visited point within the M by N rectangle, with $M > N$, is the point $(1,0)$; in parallelepipeds of dimensions M by N by P, with $M > N \geq P$, the most visited point is the point $(1,0,0)$; in regular parallelepipeds of dimensions M by M by M, the most visited point is $(1,1,1)$ for $M = 2$, for $M > 2$ the points will be $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, and $(0,0,1)$. We used basic tools of Combinatorial Analysis and the Principle of Induction for the calculations.

Keywords: most visited point; lattices in the plane; rectangle; parallelepiped; combinatorial analysis.

Resumen: En este artículo, resolveremos el problema del punto más visitado en rectángulos y paralelepípedos, siendo que, en el caso de cuadrados, el problema ya está resuelto en Santos y Castilho (2013). El problema es el siguiente: considerando un rectángulo en el primer cuadrante del plano cartesiano con el vértice inferior izquierdo en el origen $(0,0)$, buscamos las coordenadas enteras por las que pasan la mayoría de

[1]**Currículo sucinto**: Bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba, mestre e doutor em Matemática pela Universidade de Brasília. Atualmente é professor adjunto da Universidade de Brasília, *Campus* FUP. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Investigação, Metodologia. **Contato**: aluizm@gmail.com.

[2]**Currículo sucinto**: Graduado e mestre em Matemática, e doutor em Educação pela Universidade de Brasília. É professor da Universidade de Brasília, *Campus* Planaltina, e professor e orientador do Programa de Mestrado Profissional em Matemática. **Contribuição de autoria**: Escrita – Revisão e Edição, Investigação. **Contato**: rogerc@unb.br.

los caminos. Estos caminos están determinados por pasos enteros hacia arriba o hacia la derecha, partiendo desde el origen del sistema cartesiano y llegando al vértice superior derecho (M, N) del rectángulo. Las conclusiones a las que hemos llegado muestran que el punto más visitado dentro del rectángulo de dimensiones M por N, con $M > N$, es el punto $(1, 0)$; en paralelepípedos de dimensiones M por N por P, con $M > N \geq P$, el punto más visitado es el punto $(1, 0, 0)$; en paralelepípedos regulares de dimensiones M por M por M, el punto más visitado es $(1, 1, 1)$ para $M = 2$, y para $M > 2$ serán los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Usamos herramientas básicas del Análisis Combinatorio y el Principio de Inducción para los cálculos.

Palabras clave: punto más visitado; reticulados en el plano; rectángulo; paralelepípedo; análisis combinatorio.

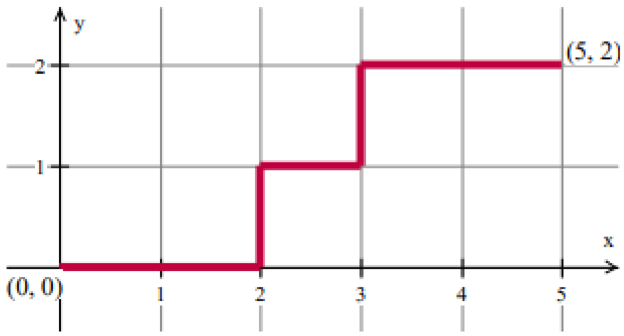
Data de submissão: 14 de agosto de 2023.

Data de aprovação: 20 de novembro de 2023.

1 Introdução

O problema do Ponto Mais Visitado (PMV) consiste no seguinte. Considere um retângulo cujos vértices inferior esquerdo e superior direito sejam, respectivamente, $(0, 0)$ e (M, N), com $M \geq N > 0$. Considere caminhos saindo da origem $(0, 0)$ e chegando no ponto final (M, N), cujos passos unitários são dados sempre para a direita ou para cima, conforme ilustra a Figura 1, na qual $M = 5$ e $N = 2$, como exemplo. Então, perguntamos: por qual ponto (x, y), de coordenadas inteiras, passam mais caminhos, excetuando os pontos obrigatórios $(0, 0)$ e (M, N)?

Figura 1: Exemplo de um caminho no retângulo 5 por 2



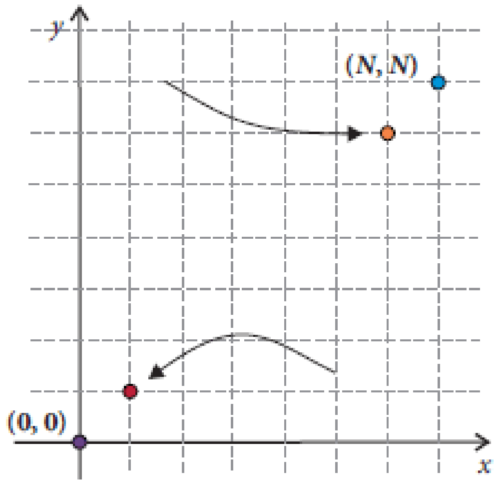
Fonte: Santos e Melo (2017, p. 90).

No caso do quadrado N por N, foi mostrado em Santos e Castilho (2013) que a resposta é o ponto $(1, 1)$, bem como o seu simétrico $(N - 1, N - 1)$, conforme ilustra a Figura 2.

No retângulo M por N, com $M > N$, o trabalho de Santos e Melo (2017) conjecturou que o ponto $(1, 0)$ é o mais visitado por caminhos, por meio de testes computacionais em retângulos até a ordem 150 por 149.

Para o paralelepípedo, realizou testes numéricos até a ordem 15 por 15 por 15 (Santos; Melo, 2017). Concluiu-se que no cubo 2 por 2 por 2, a solução é o ponto $(1, 1, 1)$. Já nos cubos de lado

Figura 2: No quadrado, o problema já está resolvido: são os pontos $(1, 1)$ e $(N - 1, N - 1)$



Fonte: Santos e Castilho (2013, p. 3).

$M > 2$, os testes permitiram conjecturar que estão empatados os pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, enquanto que nos paralelepípedos não regulares M por N por P, $M > N \geq P > 0$, os testes permitiram conjecturar que o ponto $(1, 0, 0)$ seria a solução.

O presente artigo pretende dar uma solução definitiva para o problema do Ponto Mais Visitado no plano e no espaço, isto é, resolver o problema nos retângulos e paralelepípedos, confirmando, assim, as conjecturas levantadas na referida citação.

2 Problema do Ponto Mais Visitado nos Retângulos

Nesta seção, iremos abordar o problema nos retângulos.

Como se pode ver em Hazzan (2013) ou em Santos, Mello e Murari (2007), onde se utilizou permutação com elementos repetidos, a quantidade $Q(x, y)$ de caminhos que passam por um ponto genérico (x, y) é a quantidade de caminhos que chegam até (x, y) multiplicada pela quantidade de caminhos que saem de (x, y) e chegam em (M, N). Ou seja,

$$Q(x, y) = \frac{(x + y)!}{x!y!} \cdot \frac{(M - x + N - y)!}{(M - x)!(N - y)!}. \tag{1}$$

O nosso objetivo é provar que, em retângulos do tipo da Figura 1, o ponto $(1, 0)$ é o mais visitado por caminhos, ou seja, a função $Q(x, y)$ atinge o seu máximo no ponto $(1, 0)$, desconsiderando os pontos obrigatórios de saída e chegada, $(0, 0)$ e (M, N), respectivamente. Logo, vamos provar o seguinte Teorema:

Teorema 2.1. *Considere M e N naturais com $M \geq N+1$. Então, para todo $0 \leq x \leq M$, $0 \leq y \leq N$, naturais tais que $(x,y) \neq (0,0)$ e $(x,y) \neq (M,N)$, vale a desigualdade:*

$$Q(x,y) = \frac{(x+y)!}{x!y!} \cdot \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!(N-y)!} \leq \frac{[(M-1)+N]!}{(M-1)!N!} = Q(1,0).$$

Demonstração. Observamos que provar o Teorema 2.1 é o mesmo que provar que o ponto $(1,0)$ é o mais visitado por caminhos, no retângulo.

A tese que queremos provar é que, dado um ponto (x,y), que não seja a origem $(0,0)$ e nem o ponto de chegada (M,N), então:

$$Q(x,y) \leq Q(1,0). \tag{2}$$

Iniciemos a prova com duas observações relacionadas à simetria do problema.

Observação 2.1. *Vale a igualdade*

$$Q(M-x, N-y) = Q(x,y). \tag{3}$$

De fato, da identidade (1), temos:

$$Q(M-x, N-y) = \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!(N-y)!} \frac{(x+y)!}{x!y!} = Q(x,y). \tag{4}$$

Observação 2.2. *Se provarmos a desigualdade (2) para todos os pontos tais que $y < \frac{N}{M}x$, então teremos provado para todos os pontos tais que $y > \frac{N}{M}x$. Isto é, se provarmos para os pontos abaixo da diagonal do retângulo, teremos provado para os pontos acima da mesma.*

De fato, suponha provado que $Q(x,y) \leq Q(1,0)$ para todo ponto (x,y) tal que $y < \frac{N}{M}x$, e seja (x_0, y_0) tal que $y_0 > \frac{N}{M}x_0$. Então, definindo $(x_1, y_1) = (M - x_0, N - y_0)$, temos:

$$y_0 > \frac{N}{M}x_0 \iff$$

$$N - y_0 < N - \frac{N}{M}x_0 \iff$$

$$y_1 < \frac{N}{M}(M - x_0) \iff$$

$$y_1 < \frac{N}{M}x_1.$$

Portanto, para o ponto (x_1, y_1), vale $Q(x_1, y_1) \leq Q(1, 0)$. Mas, pela observação (2.1), $Q(x_1, y_1) = Q(x_0, y_0)$. Então, $Q(x_0, y_0) \leq Q(1, 0)$. Ou seja, vale (2) também para todo ponto tal que $y > \dfrac{N}{M}x$.

Logo, precisamos provar o Teorema (2.1) apenas para os casos $y \leq \dfrac{N}{M}x$.

Observação 2.3. *É suficiente provar (2) para $x \neq 0$ e $y \neq N$.*

Provemos essa afirmação. Pela observação (2.2), podemos nos restringir aos pontos tais que $y \leq \dfrac{N}{M}x$.

Se $x = 0$, então $y \leq \dfrac{N}{M}x = 0$ e portanto $y = 0$. Logo, $(x, y) = (0, 0)$, ponto que está fora do conjunto dos pontos a serem testados.

Se $y = N$, então $y \leq \dfrac{N}{M}x \iff N \leq \dfrac{N}{M}x \iff x \geq M \iff x = M$. Logo, $(x, y) = (M, N)$, ponto que também está fora do conjunto de pontos a serem testados.

Logo, concluímos que podemos supor $x \neq 0$ e $y \neq N$, lembrando que $y \leq \dfrac{N}{M}x$.

Vamos fazer a prova por indução na soma $x + y$. Como $x \geq 1$, então, $x + y \geq 1$.

Se $x + y = 1$, então o único ponto a ser testado é $(1, 0)$. Logo, $Q(x, y) = Q(1, 0) \leq Q(1, 0)$, e o Teorema está provado nesse caso.

Se $x + y = 2$, então, se $x = y = 1$, temos de $y \leq \dfrac{N}{M}x$ que $1 \leq \dfrac{N}{M}$, absurdo pois $M > N$. Já sabemos que x não é nulo. Logo, nos resta o ponto $(2, 0)$ a ser avaliado.

Nesse caso,

$$Q(2, 0) = \frac{2!(M - 2 + N)!}{2!(M - 2)!N!} =$$

$$\frac{(M - 2 + N)!}{(M - 2)!N!}.$$

Multiplicando e dividindo tanto por $M - 1$ quanto por $M - 1 + N$, temos que

$$Q(2, 0) = \frac{(M - 1)(M - 1 + N)}{(M - 1)(M - 1 + N)} \cdot \frac{(M - 2 + N)!}{(M - 2)!N!} =$$

$$\frac{(M - 1 + N)!}{(M - 1)!N!} \cdot \frac{M - 1}{M - 1 + N} =$$

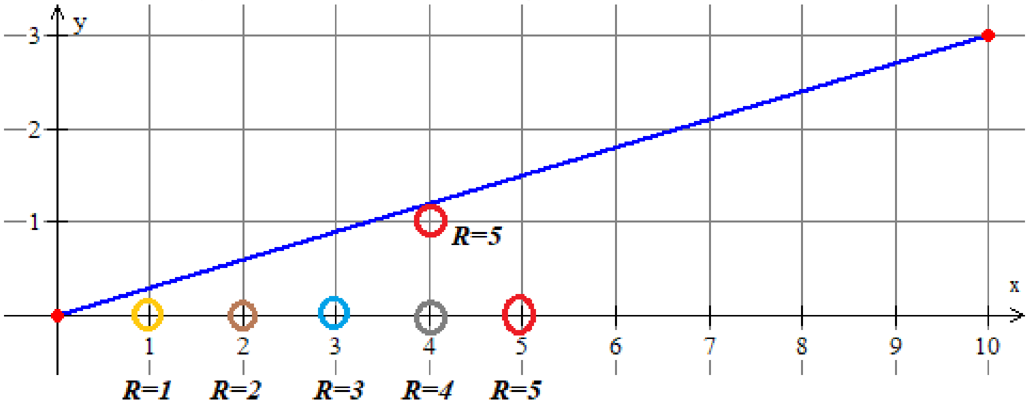
$$Q(1, 0) \cdot \frac{(M - 1)}{(M - 1) + N} < Q(1, 0) \cdot 1 = Q(1, 0).$$

Logo, para o único ponto tal que $x + y = 2$, também vale o Teorema. Vamos, portanto, supor que o mesmo é válido para todos os pontos (x, y) tais que $x + y = R \geq 2$ e provar que vale para os pontos tais que $x + y + 1 = R + 1$, pelo Princípio de Indução, em R.

Na Figura 3, cujo exemplo ilustra um retângulo 10 por 3, o ponto $(1, 0)$ destacado em laranja é tal que $R = 1$, já testado, e $(2, 0)$ em marrom é tal que $R = 2$, também já testado. A indução dará conta, portanto, dos pontos: $(3, 0)$ em azul tal que $R = 3$, em cinza com $R = 4$, em vermelho, dois pontos tais que $R = 5$, e assim por diante. Observamos que a quantidade de pontos tais que $R = 3$, 4 etc., depende da inclinação $\dfrac{N}{M}$ da diagonal do retângulo.

Por exemplo, se a reta na Figura 3 fosse menos inclinada, talvez teríamos um único ponto tal que $R = 5$.

Figura 3: Pontos e suas respectivas somas $x + y = R$



Fonte: Figura construída no software Winplot pelos autores.

Por hipótese, portanto, é verdadeira a desigualdade

$$\frac{(x+y)!}{x!y!} \cdot \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!(N-y)!} \leq Q(1,0), \tag{5}$$

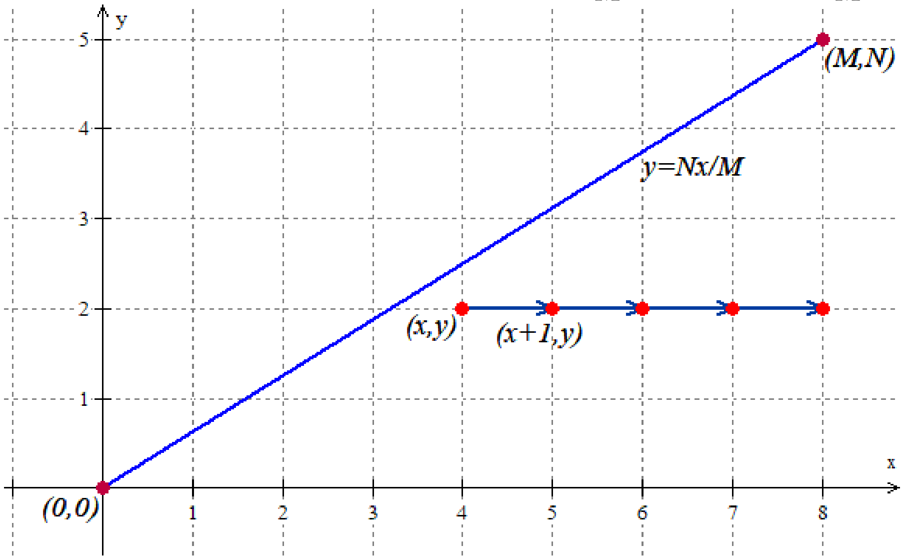
para $R = x + y \geq 2$.

No membro esquerdo, para seguirmos a prova por indução, substituímos $x + y$ por $x + y + 1$, onde podemos interpretar que $x + y + 1 = (x + 1) + y$, ou seja, x é acrescido em uma unidade e y se mantém.

Dessa forma, fazendo esse passo, o novo ponto $(x + 1, y)$ satisfaz o presente caso em que a ordenada é menor ou igual a $\frac{N}{M}$ vezes a abscissa, pois estamos supondo $y \leq \frac{N}{M}x$. De fato, como $y \leq \frac{N}{M}x$, então, $y \leq \frac{N}{M}(x + 1)$. Para o ponto seguinte, idem, conforme ilustra a Figura 4.

Além disso, para cada y, a indução valerá para qualquer x positivo tal que $y \leq \dfrac{Nx}{M}$, inclusive para o menor x positivo tal que $y \leq \dfrac{N}{M}x$. Somando 1 a x na prova por indução, então estaremos provando o Teorema para toda a reta que contém os pontos (x, y), $(x+1, y)$, $(x+2, y)$, $\cdots$, conforme

Figura 4: Passo de indução sob a reta $y = \frac{N}{M}x$ de inclinação $\frac{N}{M}$



Fonte: Figura construída no software Winplot pelos autores.

ilustra a Figura 4.

Fazendo isso, o Teorema fica provado para qualquer $0 \leq y < N$, logo, para todo o retângulo.

Sendo assim, seguindo a indução, após a substituição, (5) fica da seguinte forma:

$$\frac{(x+1+y)!}{[(x+1)!y!]} \cdot \frac{[M-(x+1)+N-y)]!}{[M-(x+1)]!(N-y)!} \leq Q(1,0). \tag{6}$$

Multiplicando o numerador e o denominador tanto por $M-x$ quanto por $M-x+N-y$, e trabalhando os fatoriais, temos que

$$\frac{(x+y)!}{x!y!} \cdot \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!(N-y)!} \frac{M-x}{M-x+N-y} \frac{x+y+1}{x+1} \leq Q(1,0) \iff$$

$$Q(x,y) \cdot \frac{M-x}{M-x+N-y} \cdot \frac{x+y+1}{x+1} \leq Q(1,0).$$

Logo, é suficiente provarmos que

$$\frac{M-x}{M-x+N-y} \cdot \frac{x+y+1}{x+1} \leq 1.$$

Provemos, portanto. De fato, como $x \leq M$, então

$$Mx + x \leq Mx + M \iff$$

$$(M+1)x \leq M(x+1) \iff \frac{x}{M} \leq \frac{x+1}{M+1} \iff$$

$$\frac{N}{M}x \leq \frac{N}{M+1}(x+1).$$

Portanto, lembrando que $y \leq \dfrac{N}{M}x$, temos:

$$y \leq \frac{N}{M}x \leq \frac{N}{M+1}(x+1).$$

Logo,

$$(M+1)y \leq N(x+1) \iff$$

$$yM + y \leq Nx + N \iff$$

$$yM + y - yx \leq Nx + N - yx \iff$$

$$y(M-x) \leq (N-y)x + (N-y) \iff$$

$$y(M-x) \leq (x+1)(N-y) \iff$$

$$(x+1)(M-x) + y(M-x) \leq (x+1)(N-y) + (x+1)(M-x) \iff$$

$$(x+y+1)(M-x) \leq (x+1)(M-x+N-y)$$

Como $y < N$ e $x \leq M$,

$$\frac{x+y+1}{x+1} \cdot \frac{M-x}{M-x+N-y} \leq 1,$$

como queríamos demonstrar.

Portanto, a desigualdade (2) vale também para $x+y+1$ e, portanto, por indução, vale para toda soma $x+y$.

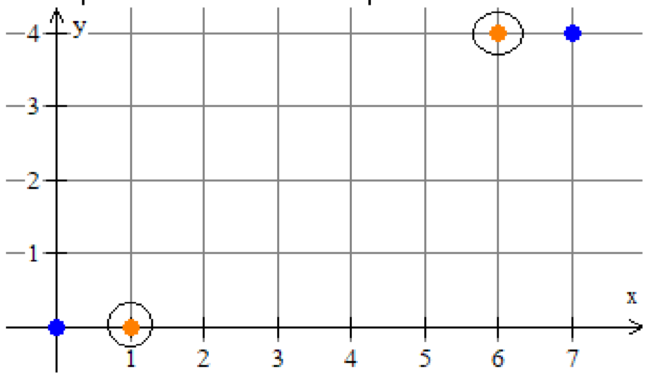
Logo, está provado o problema do Ponto Mais Visitado em retângulos M por N, $M > N$, isto é, $Q(x,y) \leq Q(1,0)$, para todo $0 \leq x \leq M$, $0 \leq y \leq N$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $(x,y) \neq (M,N)$. $\square$

Pela simetria do problema observada em (3), concluímos que os pontos $(1,0)$ e $(M-1,N)$ são os pontos mais visitados.

Na Figura 5, estão em destaque os pontos mais visitados no retângulo 7 por 4.

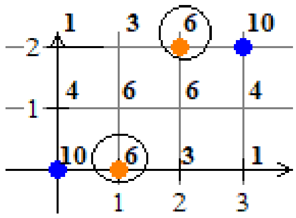
Na Figura 6, estão as quantidades de caminhos que passam por cada ponto, no retângulo 3 por 2. Nele, os pontos $(1,0)$ e $(2,2)$ são os mais visitados com seis caminhos passando por cada um deles, não necessariamente os mesmos caminhos.

Figura 5: Os dois pontos mais visitados por caminhos no retângulo 7 por 4



Fonte: Figura construída no Software Winplot pelos autores.

Figura 6: Ilustração do Teorema no retângulo 3 por 2



Fonte: Figura construída no Software Winplot pelos autores.

Para a demonstração do PMV nos paralelepípedos, separaremos os casos em que não são cubos e os casos que são cubos.

3 O PMV em Paralelepípedos não Regulares

Analogamente aos casos do retângulo no plano, no espaço o paralelepípedo não regular possui vértice na origem $(0,0,0)$ e a diagonal do mesmo finda no ponto (M,N,P), com $M > N$, $M > P$. Os passos seguem o mesmo padrão: são unitários e podem se direcionar apenas para o sentido positivo de cada um dos eixos x, y e z, em qualquer ordem.

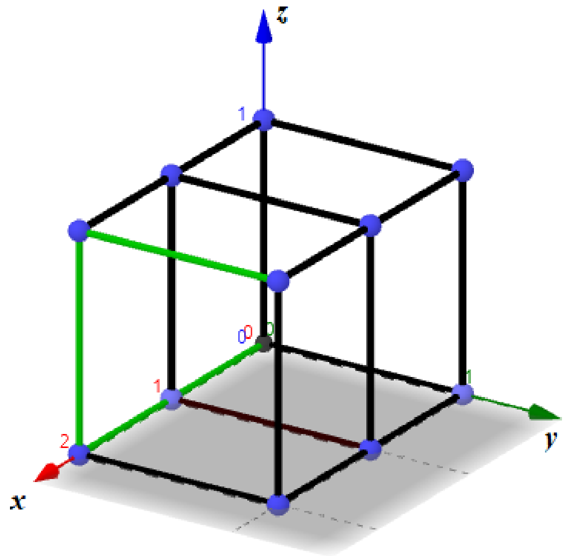
A Figura 7 mostra um paralelepípedo 2 por 1 por 1 e um caminho possível destacado em verde, da origem até o ponto de chegada $(2,1,1)$.

Queremos provar que o ponto mais visitado no paralelepípedo M por N por P, com $M > N \geq P > 0$ é o ponto $(1,0,0)$, por meio do Teorema:

Teorema 3.1. *No conjunto dos números naturais, se $M > N \geq P > 0$ vale a desigualdade*

$$\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!} \cdot \frac{(M-x+N-y+P-z)!}{(M-x)!(N-y)!(P-z)!} \leq \frac{(M-1+N+P)!}{(M-1)!N!P!},$$

Figura 7: Um caminho possível no paralelepípedo não regular



Fonte: Figura construída no Software GeoGebra pelos autores.

para todo $0 \leq x \leq M$*,* $0 \leq y \leq N$*,* $0 \leq z \leq P$*,* $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ *e* $(x, y, z) \neq (M, N, P)$.

Demonstração. De fato,

$$Q(x,y,z) = \frac{(x+y+z)!}{x!y!z!} \cdot \frac{(M-x+N-y+P-z)!}{(M-x)!(N-y)!(P-z)!} =$$

$$\frac{[(x+y)+z]!}{x!y!z!} \cdot \frac{(M+N-(x+y)+P-z)!}{(M-x)!(N-y)!(P-z)!} =$$

$$\frac{[(x+y)+z]!}{(x+y)!z!} \frac{(x+y)!}{x!y!} \cdot \frac{(M+N-(x+y)+P-z)!}{[(M+N)-(x+y)]!(P-z)!} \frac{[(M+N-(x+y)]!}{(M-x)!(N-y)!} =$$

$$\left(\frac{[(x+y)+z]!}{(x+y)!z!} \cdot \frac{(M+N-(x+y)+P-z)!}{[(M+N)-(x+y)]!(P-z)!} \right) \left(\frac{(x+y)!}{x!y!} \frac{[(M+N)-(x+y)]!}{(M-x)!(N-y)!} \right). \tag{7}$$

Nessa última expressão, vamos usar o resultado já provado nos retângulos, em cada um dos conteúdos dos dois parênteses maiores: no que consta dentro dos parênteses maiores da esquerda, tomemos $y_0 = x + y \leq M + N$.

Pelas hipóteses do Teorema, sabemos que $M + N > P$ e $z \leq P$, para o parêntese maior da esquerda. No parêntese maior da direita, $M > N$.

Assim, aplicando o Teorema (2.1) nos retângulos $M + N$ por P, e M por N, respectivamente, vale:

$$(7) \leq Q(1,0)_{(M+N,P)} \cdot Q(1,0)_{(M,N)} =$$

$$\left(\frac{[(M+N)-1+P]!}{(M+N-1)!P!}\right)\left(\frac{[(M-1)+N]!}{(M-1)!N!}\right)=$$

$$\frac{(M+N+P-1)!}{(M+N-1)!P!}\frac{(M+N-1)!}{(M-1)!N!}=$$

$$\frac{(M+N+P-1)!}{(M-1)!N!P!}=Q(1,0,0),$$

como queríamos demonstrar. □

4 O PMV nos Cubos

Nos cubos de lado inteiro $M \geq 1$, a quantidade de caminhos que passam por um ponto (x, y, z) é dada por:

$$Q(x,y,z)=\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!}\cdot\frac{(3M-x-y-z)!}{(M-x)!(M-y)!(M-z)!}.$$

Observe que

$$Q(1,0,0)=Q(0,1,0)=Q(0,0,1)=\frac{(3M-1)!}{(M-1)!M!^2}.$$

Também,

$$Q(a,b,c)=Q(a,c,b)=Q(b,a,c)=\ldots=Q(c,b,a).$$

No cubo de lado $M = 1$, excetuando a origem e a chegada dos caminhos, só existem os pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, e $(0, 1, 1)$.

Pela simetria da fórmula de Q, basta analisarmos $Q(1, 0, 0)$ e $Q(1, 1, 0)$, com $M = 1$:

$$Q(1,0,0)=2=Q(1,1,0).$$

Ou seja, todos esses pontos são os mais e igualmente visitados por caminhos.

No cubo de lado $M = 2$, o ponto mais visitado é o ponto $(1, 1, 1)$, conforme já provado numericamente em Santos e Melo (2017), dado que para esse caso a baixa quantidade de pontos a serem testados torna fácil a verificação computacional. Esse é o único caso que o ponto mais visitado não segue o padrão dos demais cubos.

Assim, os casos $M = 1$ e $M = 2$ já estão resolvidos e pacificados.

Para o cubo de lado M com $M \geq 3$, vamos provar que o ponto $(1, 0, 0)$ é o mais visitado. Isto é, vamos provar o Teorema:

Teorema 4.1. *Dado $M \geq 3$, então*

$$Q(x,y,z) = \frac{(x+y+z)!}{x!y!z!} \cdot \frac{(3M-x-y-z)!}{(M-x)!(M-y)!(M-z)!} \leq \frac{(3M-1)!}{(M-1)!M!^2} = Q(1,0,0), \tag{8}$$

em que x, y e z são naturais menores ou iguais a M, com $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ e $(x,y,z) \neq (M,M,M)$.

Demonstração. A demonstração guarda semelhança com o caso dos retângulos.

Vamos dividir em três casos, a depender de qual variável é maior do que as outras duas:

1) $x \geq y, z$,

2) $y \geq x, z$,

3) $z \geq x, y$.

Comecemos com o primeiro caso: $x \geq y$ e $x \geq z$.

Vamos usar indução sobre a soma $x + y + z = R$.

No cubo arbitrário de lado $M \geq 3$, vamos tratar diretamente os casos $R = x + y + z = 0$, $R = x + y + z = 1$, $R = x + y + z = 2$ e $R = x + y + z = 3$, para depois fazer indução sobre $R \geq 3$.

Para $R = 0$, temos $x = y = z = 0$, o que contraria as hipóteses.

Para $R = 1$, então, como $x \geq y$ e $x \geq z$, apenas um ponto poderá ser analisado, o ponto $(1,0,0)$. Logo, $Q(x,y,z) = Q(1,0,0)$ e está provada a desigualdade (8), que, para esse caso, é uma igualdade.

Para $R = 2$, como $x \geq y$ e $x \geq z$, poderemos analisar apenas três pontos: $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ e $(2,0,0)$, sendo que as duas primeiras possuem simetria na função Q. Logo, reduzem-se a dois pontos o nosso campo de análise para $R = 2$.

Provemos (8) em cada um:

$$Q(1,1,0) \leq Q(1,0,0) \iff$$

$$2! \cdot \frac{(3M-2)!}{(M-1)!^2 M!} \leq \frac{(3M-1)!}{(M-1)!M!^2} \iff$$

$$\frac{2}{(M-1)!} \leq \frac{3M-1}{M!} \iff$$

$$2 \leq \frac{3M-1}{M} \iff$$

$$2M \leq 3M - 1 \iff$$

$$-M \leq -1 \iff$$

$$M \geq 1,$$

o que é verdade.

Tomemos o ponto $(2,0,0)$, para finalizar o caso $R = 2$:

$$
\begin{gathered}
Q(2,0,0) \leq Q(1,0,0) \iff \\
= \frac{2!}{2!} \cdot \frac{(3M-2)!}{(M-2)!M!^2} \leq \frac{(3M-1)!}{(M-1)!M!^2} \iff \\
1 \leq \frac{3M-1}{M-1} \iff \\
M-1 \leq 3M-1 \iff M \geq 0,
\end{gathered}
$$

e findo está o caso $R = x+y+z = 2$.

Agora, o caso $R = 3$.

Se $x+y+z = 3$, temos, a menos de simetria, três pontos para serem analisados, lembrando que estamos no caso 1), em que $x \geq y, z$: $(3,0,0)$, $(2,1,0)$ e $(1,1,1)$. Note que $(2,0,1)$ é redundante.

Fazendo ponto a ponto, temos:

$$
\begin{gathered}
Q(3,0,0) = \frac{3!}{3!} \cdot \frac{(3M-3)!}{(M-3)!M!^2} \leq \frac{(3M-1)!}{(M-1)!M!^2} \iff \\
1 \leq \frac{(3M-1)(3M-2)}{(M-1)(M-2)} \iff \\
(M-1)(M-2) \leq (3M-1)(3M-2) \iff \\
M^2 - 3M + 2 \leq 9M^2 - 9M + 2 \iff \\
8M^2 - 6M \geq 0 \iff \\
2M(4M-3) \geq 0 \iff \\
M \geq \frac{3}{4},
\end{gathered}
$$

o que é verdade.

Agora, o ponto $(2,1,0)$:

$$
\begin{gathered}
Q(2,1,0) = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{(3M-3)!}{(M-2)!(M-1)!M!} \leq \frac{(3M-1)!}{(M-1)!M!^2} \iff \\
\frac{3}{(M-2)!} \leq \frac{(3M-1)(3M-2)}{M!} \iff
\end{gathered}
$$

$$3 \leq \frac{(3M-1)(3M-2)}{M(M-1)} \iff$$

$$3M^2 - 3M \leq 9M^2 - 9M + 2 \iff$$

$$6M^2 - 6M + 2 \geq 0 \iff$$

$$3M^2 - 3M + 1 \geq 0,$$

o que é verdade para todo $M > 0$, pois o discriminante é $\Delta = -3 < 0$.

Finalizando o caso $R = x + y + z = 3$, temos:

$$Q(1,1,1) = 3! \cdot \frac{(3M-3)!}{(M-1)!^3} \leq Q(1,0,0) = \frac{(3M-1)!}{(M-1)!M!^2} \iff$$

$$6 \cdot \frac{1}{(M-1)!^2} \leq \frac{(3M-1)(3M-2)}{M!^2} \iff$$

$$\frac{6}{(M-1)!^2} \leq \frac{(3M-1)(3M-2)}{M^2(M-1)!^2} \iff$$

$$6M^2 \leq 9M^2 - 9M + 2 \iff$$

$$3M^2 - 9M + 2 \geq 0 \iff$$

$$M \leq \frac{9 - \sqrt{81-24}}{6} \text{ ou } M \geq \frac{9 + \sqrt{81-24}}{6}$$

$$\iff$$

$$M \leq \frac{9 - \sqrt{57}}{6} \text{ ou } M \geq \frac{9 + \sqrt{57}}{6}.$$

Como

$$\frac{9 - \sqrt{57}}{6} < \frac{9-7}{6}$$

e

$$\frac{9 + \sqrt{57}}{6} > \frac{9+7}{6},$$

então,

$$M < 0,333...$$

ou

$$M > 2,666...$$

$$\iff$$

$$M \geq 3,$$

que é exatamente a hipótese de nosso Teorema. Note que esse último ponto testado $(1,1,1)$, que é o mais visitado no caso $M=2$, mostrou-se portanto não ser o mais visitado para $M \geq 3$, o que era de se esperar.

Isso finaliza o caso $R = x + y + z = 3$.

Logo, varremos todos os possíveis pontos do cubo de lado arbitrário $M \geq 3$ tais que $R = 1$, 2 ou 3, no presente caso $x \geq y, z$.

Usando indução, portanto, suponha que o Teorema 4.1 vale para $R = x + y + z \geq 3$ com $M \geq 3$ e provemos que vale para $R + 1 = x + y + z + 1$.

Logo, supomos válido que

$$\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!} \cdot \frac{(3M-x-y-z)!}{(M-x)!(M-y)!(M-z)!} \leq Q(1,0,0).$$

Para provarmos o caso $x+y+z+1$, vamos admitir que estamos somando 1 na variável x.

Ao darmos esse passo, observamos que o novo ponto $(x+1, y, z)$ ainda satisfaz a presente condição de que a primeira coordenada é maior ou igual às outras duas. De fato, como $x \geq y, z$, então $x + 1 \geq y, z$.

E, assim como ocorreu na prova do retângulo, fixando y e z, a indução valerá para qualquer x tal que $x \geq y$, z, inclusive para o menor x que o satisfaz. Fazendo o passo $x+1$, estaremos provando o Teorema para a reta no espaço que contém os pontos $(x+1, y, z)$, $(x+2, y, z)$ etc. Como y e z são arbitrários, o Teorema valerá para todo o cubo.

Logo, queremos provar que

$$\frac{(x+1+y+z)!}{(x+1)!y!z!} \cdot \frac{(3M-x-y-z-1)!}{(M-x-1)!(M-y)!(M-z)!} \leq Q(1,0,0). \tag{9}$$

Multiplicando e dividindo por

$$\frac{(3M-x-y-z)(M-x)}{(M-x)(3M-x-y-z)}$$

a expressão à esquerda da desigualdade acima, obtemos a seguinte expressão equivalente:

$$\frac{[x+1+y+z](x+y+z)!}{[x+1]x!y!z!} \cdot \frac{(3M-x-y-z-1)!}{(M-x-1)!(M-y)!(M-z)!} \cdot \frac{(3M-x-y-z)[M-x]}{(M-x)[3M-x-y-z]}$$

$$\leq Q(1,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

(colocando os termos entre colchetes à direita)

$$\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!} \cdot \frac{(3M-x-y-z)!}{(M-x)!(M-y)!(M-z)!} \cdot \frac{[x+1+y+z][M-x]}{[x+1][3M-x-y-z]}$$
$$\leq Q(1,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Q(x,y,z) \cdot \frac{(x+1+y+z)(M-x)}{(x+1)(3M-x-y-z)} \leq Q(1,0,0). \tag{10}$$

Por hipótese de indução, sabemos que

$$Q(x,y,z) \leq Q(1,0,0).$$

Então, para provar (10), é suficiente provarmos que

$$\frac{(x+1+y+z)(M-x)}{(x+1)(3M-x-y-z)} \leq 1. \tag{11}$$

Para tal, vamos provar dois lemas, que possuem as mesmas hipóteses do Teorema 4.1:

Lema 4.1. $y(M+1) \leq M(x+1)$.

Lema 4.2. $z(M+1) \leq M(x+1)$.

Para provar o Lema (4.1), comecemos com as desigualdades

$$y \leq x$$

e

$$y \leq M,$$

que são verdadeiras pelas hipóteses do Teorema (4.1) e considerando que estamos no caso 1), $x \geq y, z$.

Logo, temos:

$$My \leq Mx.$$

Somando membro a membro com $y \leq M$, temos:

$$My + y \leq Mx + M.$$

Enfim, $y(M+1) \leq M(x+1)$.

De maneira similar, para provar o Lema (4.2), comecemos com as desigualdades

$$z \leq x$$

e

$$z \leq M,$$

que são verdadeiras pelas hipóteses do Teorema (4.1) e considerando que estamos no caso 1).

Logo, temos:

$$Mz \leq Mx.$$

Somando com $z \leq M$, temos:

$$Mz + z \leq Mx + M.$$

Enfim, $z(M+1) \leq M(x+1)$.

Voltando à desigualdade (11), queremos provar:

$$\frac{(x+1+y+z)(M-x)}{(x+1)(3M-x-y-z)} \leq 1 \iff$$

$$(x+1+y+z)(M-x) \leq (x+1)(M-x+M-y+M-z) \iff$$

$$(x+1)(M-x) + (y+z)(M-x) \leq (x+1)(M-x) + (x+1)(M-y) + (x+1)(M-z) \iff$$

$$(y+z)(M-x) \leq (x+1)(M-y) + (x+1)(M-z) \iff$$

$$yM - (yx) + zM - (zx) \leq xM - (xy) + M - y + xM - (xz) + M - z \iff$$

$$yM + zM \leq xM + M - y + xM + M - z \iff$$

$$yM + zM + y + z \leq 2M(x+1) \iff$$

$$y(M+1) + z(M+1) \leq M(x+1) + M(x+1),$$

que é verdade pelos lemas (4.1) e (4.2), o que encerra a prova por indução sobre R, para o caso 1), $x \geq y, z$.

Para os casos 2) e 3), $y \geq x, z$ e $z \geq x, y$, respectivamente, o procedimento é análogo, com apenas alguns ajustes. Basta fazer o seguinte.

Para $y \geq x, z$, na passagem da prova por indução (9), basta considerar que estamos somando 1 à y, não à x. A estratégia da demonstração é a mesma. Os lemas (4.1) e (4.2) devem ser substituídos por:

Lema 4.3. $x(M+1) \leq M(y+1)$.

Lema 4.4. $z(M+1) \leq M(y+1)$.

Já para o caso 3), $z \geq x, y$, basta somar 1 à z na passagem de indução (9), e os lemas de apoio são:

Lema 4.5. $x(M+1) \leq M(z+1)$.

Lema 4.6. $y(M+1) \leq M(z+1)$.

O restante da prova é inteiramente análoga.

Fica provado, assim, o Teorema (4.1) para os cubos de lados $M \geq 3$.

□

Com isso, encerramos todos os casos dos cubos de lados $M \geq 1$, sendo que, no caso $M = 2$, já estava solucionado em Santos e Melo (2017).

5 Conclusões

Está provado, portanto, o problema do Ponto Mais Visitado nos retângulos, nos paralelepípedos não regulares e nos cubos, sendo que, para os quadrados, já estava solucionado em Santos e Castilho (2013).

Os pontos mais visitados são, portanto:

1. no quadrado M por M, o ponto $(1, 1)$ (provado em Santos e Castilho (2013));

2. no retângulo M por N tal que $M > N$, o ponto $(1, 0)$;

3. no paralelepípedo M por N por P tal que $M > N \geq P$, o ponto $(1, 0, 0)$;

4. no cubo de lado $M = 1$, todos os pontos (que não sejam a origem nem a chegada);

5. no cubo de lado $M = 2$, o ponto $(1, 1, 1)$ (numericamente provado em Santos e Melo (2017));

6. no cubo de lado $M \geq 3$, o ponto $(1, 0, 0)$ (igualmente, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$).

Como observação final, podemos generalizar o caso dos paralelepípedos não regulares da seção 3 para paralelepípedos n-dimensionais não regulares. Aplicando a mesma ideia ora apresentada, temos: dados $N_0 > N_1 \geq N_2 \geq \ldots \geq N_n > 0$, então,

$$\frac{\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right)! \left[\sum_{j=0}^{n}(N_j - x_j)\right]!}{\prod_{j=0}^{n}(x_j!) \prod_{j=0}^{n}[(N_j - x_j)!]} \leq \frac{\left[\left(\sum_{j=0}^{n} N_j\right) - 1\right]!}{(N_0 - 1)! \prod_{j=1}^{n}(N_j)!},$$

para $0 \leq x_j \leq N_j$, $0 \leq j \leq n$, $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ e $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq (N_0, N_1, \ldots, N_n)$.

Ou seja, o ponto $(1, 0, 0, ...0)$ é o mais visitado.

Referências

[1] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Combinatória / Probabilidade. v. 5, 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[2] SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[3] SANTOS, Rogério César dos; CASTILHO, José Eduardo. O problema do ponto mais visitado. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 82, p. 50-52, 2013. Disponível em: `https://rpm.org.br/cdrpm/82/11.html`. Acesso em: 14 ago. 2023.

[4] SANTOS, Rogério César dos; MELO, Antônio Luiz de. O problema do ponto mais visitado em retângulos e paralelepípedos: casos particulares e conjecturas. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 11, p. 89-98, 2017. Disponível em:`https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/159`. Acesso em: 14 ago. 2023.

MELO, Antônio Luiz de; SANTOS, Rogério César dos. Uma solução definitiva para o problema do ponto mais visitado no plano e no espaço. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 1, p. e3007, 28 de abril de 2024. `https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6840`.