

Análise dos modelos Gompertz, Verhulst e de Von Bertalanffy para o crescimento linear dos machos albinos da tilápia do Nilo

Analysis of the Gompertz, Verhulst and Von Bertalanffy models for the linear growth of albino Nile tilapia

Análisis de los modelos de Gompertz, Verhulst y Von Bertalanffy para el crecimiento lineal de machos albinos de tilapia del Nilo

Willian Trindade¹

Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, AM, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-4794-7336>,  <http://lattes.cnpq.br/1648283351114713>

Roberto Antonio Cordeiro Prata²

Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, AM, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-7578-1014>,  <http://lattes.cnpq.br/5159150780688575>

Resumo: O objetivo deste trabalho é estimar o melhor modelo matemático que representa o crescimento linear de machos albinos da tilápia do Nilo. Os modelos escolhidos para este artigo são: de Gompertz, Verhulst e de Von Bertalanffy. Os dados são de um experimento previamente conduzido pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas Rodolpho Von Ihering, o qual está situado no município de Pentecostes no Ceará. Para analisar qual o modelo com melhor ajuste, são empregados os seguintes critérios de avaliação: Coeficiente de Determinação (R^2), Quadrado Médio do Resíduo (QMR), o Erro Percentual Médio (EPM) e o Critério de Akaike Corrigido (AIC_c). O parâmetro do crescimento assintótico é maior no modelo Von Bertalanffy (36,309 cm), seguido pelo Gompertz (30,890 cm), e menor no de Verhulst (30,590 cm). Os três modelos tem um R^2 maior do que 99% e o de Gompertz tem os piores valores em todos os critérios. O modelo de Von Bertalanffy é considerado como o mais adequado para descrever o crescimento médio dos exemplares analisados. Ele possui os seguintes parâmetros: comprimento assintótico de 36,309 cm, constante de integração de 0,694 e taxa de crescimento relativo de 0,161 ano⁻¹.

Palavras-chave: modelagem matemática; tilápia; crescimento; Gompertz, Verhulst e Von Bertalanffy.

Abstract: The objective of this work is to estimate the best mathematical model that represents the linear growth of albino male Nile tilapia. The models chosen for this article are by: Gompertz, Verhulst and Von Bertalanffy. The data are from an experiment previously conducted by the Rodolpho Von Ihering Ichthyological Research Center, which is located in the municipality of Pentecostes in Ceará. To analyze which model provides the best fit, the following evaluation criteria are used: Coefficient of Determination (R^2), Mean Square of the Residual (QMR), the Mean Percentage Error (EPM) and the Corrected Akaike Information Criteria (AIC_c). The asymptotic growth parameter is higher in the Von Bertalanffy model (36.309 cm), followed by the Gompertz model (30.890 cm) and lower in the Verhulst model (30.590 cm). The three models have an R^2 greater than 99% and Gompertz's has the worst values in all criteria. The Von Bertalanffy model is considered the most appropriate to describe the average growth of the analyzed specimens. It has the following parameters: asymptotic length of 36.309 cm, integration constant of 0.694 and relative growth rate of 0.161 year⁻¹.

Keywords: mathematical modeling; tilapia; growth; Gompertz, Verhulst and Von Bertalanffy.

¹ **Currículo sucinto:** Graduação em Ciências Militares pela Academia Militar das Agulhas Negras, graduação em Engenharia Química mestrado em Química e doutorado em Ciência dos Materiais pelo Instituto Militar de Engenharia, discente de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Amazonas. **Contribuição de autoria:** Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação e Metodologia. **Contato:** Bill45_7@hotmail.com.

² **Currículo sucinto:** Graduação e mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas e doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Professor Associado 3 na Universidade Federal do Amazonas. **Contribuição de autoria:** Revisão, Metodologia e Supervisão. **Contato:** praroberto@gmail.com.



Resumen: El objetivo de este trabajo es estimar el mejor modelo matemático que represente el crecimiento lineal de tilapia del Nilo macho albina. Los modelos elegidos para este artículo son: Gompertz, Verhulst y Von Bertalanffy. Los datos provienen de un experimento realizado previamente por el Centro de Investigaciones Ictiológicas Rodolpho Von Ihering, ubicado en el municipio de Pentecostes, en Ceará. Para analizar qué modelo tiene mejor ajuste se utilizan los siguientes criterios de evaluación: Coeficiente de Determinación (R^2), Cuadrado Medio del Residual (QMR), Error Porcentual Medio (EPM) y Criterio de información de Akaike Corregido (AIC_c). El parámetro de crecimiento asintótico es más alto en el modelo de Von Bertalanffy (36,309 cm), seguido por el modelo de Gompertz (30,890 cm) y más bajo en el modelo de Verhulst (30,590 cm). Los tres modelos tienen un R^2 superior al 99% y el de Gompertz tiene los peores valores en todos los criterios. El modelo de Von Bertalanffy se considera el más apropiado para describir el crecimiento promedio de los ejemplares analizados. En este hay los siguientes parámetros: longitud asintótica de 36,309 cm, constante de integración de 0,694 y tasa de crecimiento relativo de $0,161 \text{ año}^{-1}$.

Palabras clave: modelo matematico; tilapia; crecimiento; Gompertz, Verhulst y Von Bertalanffy.

Data de submissão: 20 de junho de 2023.

Data de aprovação: 16 de outubro de 2023.

1. Introdução

A tilápia do Nilo apresenta um hábito alimentar fitoplanctófago, o que significa que se alimenta principalmente de plâncton. No entanto, ela também aceita bem as rações comerciais e artesanais elaboradas a partir de subprodutos da agropecuária (Oliveira, 2007).

Quanto à reprodução, ela é do tipo segmentada, podendo desovar de 8 a 12 vezes por ano. A maturidade sexual está relacionada com fatores como o clima da região, condições de espaço, manejo e alimentação. Normalmente, a sua procriação inicia-se por volta dos 4 a 5 meses de idade, colocando em média de 800 a 2.000 óvulos por desova (Oliveira, 2007).

A criação de tilápia em cativeiro começou no Quênia, em 1924, e seguiu no Congo, em 1937. Dentre mais de setenta espécies de tilápias, a maioria oriunda da África, apenas três conquistaram destaque mundial: a Tilápia do Nilo (*Oreochromis niloticus*), a Tilapia-azul ou Aurea (*Oreochromis aureus*) e a Tilapia-mossambicus (*Oreochromis mossambicus*). No Brasil, a tilápia do Nilo e suas diferentes linhagens têm sido a principal espécie selecionada para piscicultura e teve sua introdução em 1996 (Oliveira, 2010).

É interessante observar o papel significativo da tilapicultura na produção de peixes de cultivo no Brasil em 2020. A tilápia foi a espécie mais cultivada com uma produção de 486.576,58 toneladas, representando mais da metade da produção total. Além disso, sua liderança nas exportações demonstra sua importância econômica com uma receita de US\$ 10,3 milhões (Associação Brasileira da Piscicultura, 2021).

Neste trabalho, foram obtidos os valores dos parâmetros de crescimento assintótico, o tempo em meses e a taxa exponencial de aproximação ao valor assintótico das equações dos modelos matemáticos Bertalanffy, Gompertz e Verhulst e chegou-se à conclusão de que o melhor modelo que representa o crescimento linear de machos albinos de tilápia do Nilo é o de Verhulst.



2. Referencial Teórico

Um modelo matemático pode ser uma equação diferencial ordinária ou parcial, ou um sistema de equações diferenciais (Zill; Cullen, 2001). O modelo deve ser o mais simples possível e tão detalhado quanto necessário (Kuttler, 2009). As próximas subseções irão descrever os modelos matemáticos de Von Bertalanffy, Verhulst e de Gompertz.

2.1. Modelo de Von Bertalanffy

O modelo obtido pelo biólogo Von Bertalanffy, com o estudo de peixes, é fundamentado no princípio da alometria e leva em consideração os processos de catabolismo e anabolismo, tendo como produto a perda e o ganho de massa, respectivamente. Esse princípio traduzido em termos de equação, em função do tempo, é descrito pela equação (1) (Bassanezi; Diniz, 2015):

$$\frac{dp}{dt} = \alpha S - \beta p, \tag{1}$$

em que α é a constante de anabolismo (taxa de síntese de massa por unidade de área) e β a constante de catabolismo (taxa de decaimento de massa por unidade de massa) da espécie.

Nesse modelo, a área da superfície (S) é proporcional à massa (p):

$$S \propto p^{2/3}, \tag{2}$$

resultado obtido pelo princípio da alometria (Bassanezi, 2002).

O peso é proporcional ao volume e este é proporcional ao cubo do comprimento (l):

$$p = k_1 l^3, \tag{3}$$

em que k_1 é a constante de proporcionalidade.

A área é proporcional ao quadrado do comprimento,

$$S = k_2 l^2, \tag{4}$$

em que k_2 é a constante de proporcionalidade. Portanto,

$$S = kp^{2/3}. \tag{5}$$

Logo, o modelo de Von Bertalanffy para o peso de peixes é fornecido pela equação

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p. \tag{6}$$

Pelo princípio da alometria, pode-se obter um modelo para o crescimento linear do peixe, dado por

$$\frac{\gamma dp}{p dt} = \frac{1 dl}{l dt}. \tag{7}$$

Utilizando a regra da cadeia na equação (7), tem-se

$$\frac{dl}{dp} = \gamma \frac{l}{p}. \tag{8}$$



Separando as variáveis e integrando, obtém-se

$$\int \frac{dl}{l} = \gamma \int \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln l = \gamma \ln p + c,$$

e fazendo a constante de integração $c = \ln b$ ($b > 0$),

$$l(t) = b[p(t)]^\gamma, \tag{9}$$

em que b é uma constante e γ é o coeficiente de alometria e depende da espécie do peixe considerada. Neste trabalho, foi utilizado $\gamma = \frac{1}{3}$, conforme a alometria isométrica $p = kl^3$, ou $l = bp^{1/3}$, obtido experimentalmente por Von Bertalanffy. Quando $\gamma < \frac{1}{3}$, o peixe tem uma forma “arredondada” e se for $\gamma > \frac{1}{3}$ é longilíneo (Bassanezi, 2002).

Utilizando a equação (9) na equação (6), tem-se:

$$\gamma \frac{\alpha p^{2/3} - \beta p}{p} = \frac{dl}{dt} \Rightarrow \gamma (\alpha p^{-1/3} - \beta) l = \frac{dl}{dt}. \tag{10}$$

Substituindo $p^{-1/3}$ pela expressão alométrica, o modelo do crescimento linear é obtido pela equação (Bassanezi, 2002):

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = \gamma(b\alpha - \beta l), \\ l(0) = l_0 \end{cases}, \tag{11}$$

em que l_0 é o comprimento inicial, o qual é conhecido.

A equação (11) pode ser escrita na forma:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{b\alpha}{3} - \frac{\beta}{3}l. \tag{12}$$

A equação diferencial (12) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dl}{dt} + kl = \lambda \tag{13}$$

em que $k = \frac{\beta}{3}$ e $\lambda = \frac{b\alpha}{3}$.

A equação (13) pode ser resolvida utilizando a técnica do fator integrante, obtendo-se:

$$l(t) = \frac{\lambda}{k} + Ce^{-kt}. \tag{14}$$

Sendo o comprimento do peixe no instante t_0 , $l = l_0$, obtém-se que $C = l_0 - \frac{\lambda}{k}$ e, quando $t \rightarrow \infty$, observa-se que $l(t) \rightarrow \frac{\lambda}{k} = l_\infty$. Ou seja, o comprimento tende a um valor assintótico.

Portanto, a equação para o crescimento linear é dada por:

$$l(t) = l_\infty - (l_\infty - l_0)e^{-kt} = l_\infty(1 - \frac{l_\infty - l_0}{l_\infty}e^{-kt}), \tag{15}$$

em que l_0 e l_∞ são respectivamente o comprimento inicial, presumindo ser conhecido, e o comprimento assintótico do peixe, t é o tempo em meses e k mede a taxa exponencial de



aproximação ao valor assintótico, isto é, o índice de precocidade; quanto maior o índice, mais rápido amadurece sexualmente o peixe (Sarmiento, 2018).

Os parâmetros l_∞ e k podem ser estimados pelo método de Ford-Waldorf (Bassanezi; Ferreira Jr., 1988). O procedimento consiste na linearização dos pares de comprimentos experimentais médios $(l(t), l(t+1))$ por meio da equação:

$$l(t + 1) \cong ml(t) + n. \tag{16}$$

Combinando as equações (4) e (5), obtém-se:

$$l_\infty = \frac{n}{1-m} ek = \ln \left(\frac{1}{m} \right). \tag{17}$$

2.2. Modelo de Verhulst

O modelo de Verhurst, também conhecido como Modelo Logístico, foi formulado pelo matemático belga Pierre F. Verhurst, em 1873, e foi o primeiro modelo que atendeu a variação da taxa de crescimento, baseado em uma observação feita por Adolphe Quetelet, que sugeriu que o crescimento exponencial não seria possível em um longo período de tempo (Bassanezi, 2002; Sarmiento, 2018).

Neste modelo, a taxa de crescimento é considerada como sendo proporcional à população em cada instante, diferente do Modelo de Malthus, o qual considera a taxa de crescimento constante (Bassanezi, 2002), e é dada por

$$\frac{dP}{dt} = \delta(P)P \tag{18}$$

em que

$$\delta(P) = k \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right), k > 0, \tag{19}$$

e P_∞ é o valor limite da população.

Supondo que $P(0) = P_0$ seja dado, temos o modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right) \\ P(0) = P_0, k > 0 \end{cases} \tag{20}$$

A solução analítica é obtida por integração após a separação das variáveis (Bassanezi, 2002):

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right)} = \int k dt$$

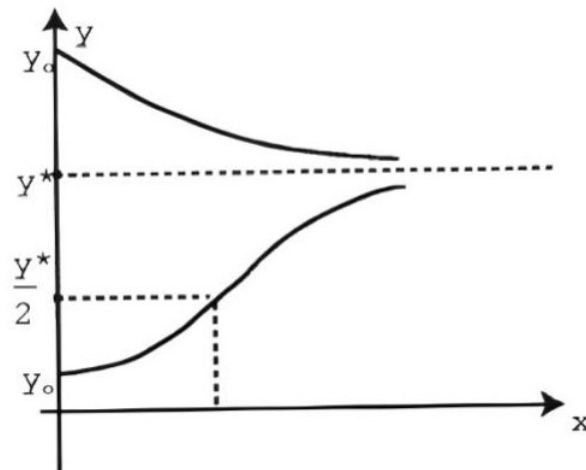
Assim,

$$P(t) = P_\infty (1 + B e^{-kt})^{-1}, \text{ onde } B = \frac{P_\infty}{P_0} - 1. \tag{21}$$

Os parâmetros P_∞ e B podem ser estimados pelo método do Ajuste Linear do Modelo Logístico, conforme exemplifica a Figura 1.



Figura 1 – Crescimento sigmoidal ou logístico



Fonte: Bassanezi (2002, p. 76).

Uma das características fundamentais da curva logística (Figura 1) é que a taxa de crescimento relativo y_i é linear, com $i \in \mathbb{N}$, ou seja (Bassanezi, 2002),

$$\theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i} \tag{22}$$

pode ser ajustada por uma reta:

$$\theta = ay_{i+1} + b, \tag{23}$$

onde a e b são coeficientes angular e linear da equação do 1º grau, respectivamente.

Outra característica é que y , variável independente da equação do 1º grau acima, é de estabilidade, ou seja, $y \rightarrow y^*$ quando x cresce. A variável x representa o tempo (t), y^* representa o comprimento assintótico da tilápia (l_∞) e y é o comprimento em função do tempo $l(t)$.

A expressão teórica da curva logística é

$$y = \frac{y^*}{Be^{-kt} + 1}. \tag{24}$$

onde $y^* = \frac{-b}{a}$, a e b referentes à equação (23), $B = \frac{y^*}{y_0} - 1$ e $k = \alpha y^*$ é a taxa de reprodutividade máxima (Bassanezi, 2002).

A estimação dos parâmetros da curva logística pode ser feita por meio de um ajuste linear, utilizando a mudança de variáveis (Bassanezi, 2002)

$$z = \ln\left(\frac{y/a}{1 - y/a}\right) = \ln\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + be^{-kt}}} = \ln\left(\frac{1}{b}e^{kt}\right) \tag{25}$$

obtendo-se a equação de uma reta:

$$z = kt - u \tag{26}$$

em que $\ln B = u \Rightarrow B = e^u$ e k e u são coeficientes angular e linear da equação do 1º grau, respectivamente.



2.3. Modelo de Gompertz

O matemático inglês Benjamin Gompertz, em 1938, desenvolveu um modelo muito parecido com o de Verhulst, que utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável. O significado disso é que a taxa de crescimento é alta no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento (Bassanezi, 2002; Souza; Silva Filho, 2019).

O modelo de Gompertz é dado pelo problema de Cauchy (Bassanezi, 2002):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (27)$$

com $a > 0$ e $b > 0$, em que $x(t)$ denota a população em função do tempo.

A taxa de crescimento $r(x) = a - b \ln x$, com $x > 0$, decresce com x e o valor de estabilidade, que representa a capacidade limite da população de x , é obtido considerando-se $r(x) = 0$, isto é,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow a - b \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{a/b}, \text{ com } x > 0.$$

Pode-se observar que quando o x é muito pequeno, $r(x)$ é muito grande, tendo em vista que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty.$$

Toma-se $a = b \ln x_\infty$, pois $0 = a - b \ln x_\infty$. Reescrevendo a equação (27) como

$$\frac{dx}{dt} = bx \ln x_\infty - b \ln x = x \ln \left(\frac{x_\infty}{x} \right)^b \quad (28)$$

e, neste caso, $r(x) = \ln \left(\frac{x_\infty}{x} \right)^b$.

A solução da equação (27) é obtida considerando-se a mudança de variável $z = \ln x$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = a - bz.$$

Integrando,

$$\int \frac{dz}{a-bz} = \int dt \Leftrightarrow -\frac{1}{b} \ln |a-bz| = t + c,$$

para $t = 0$, tem-se que $c = -\frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0|$, então $\ln |a - bz| = -bt + \ln |a - b \ln x_0|$

$$a - bz = (a - b \ln x_0) e^{-bt} \Leftrightarrow z(t) = \frac{1}{b} [a - (a - b \ln x_0) e^{-bt}].$$

Retornando à variável $x = e^z$, obtém-se:

$$x(t) = e^{a/b} \cdot e^{[-(\frac{a}{b} - \ln x_0) e^{-bt}]} \quad (29)$$

ou



$$x(t) = x_{\infty} \left(\frac{x_0}{x_{\infty}} \right) e^{-bt} \quad (30)$$

$x(t)$, x_{∞} e x_0 representam, neste artigo, $l(t)$, l_{∞} e l_0 , respectivamente.

Para obter o ajuste linear das taxas de variação do modelo de Gompertz tem-se que relacionar $\ln x_i$ com r_i , e este é obtido pela equação (31):

$$r_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{(t_{i+1} - t_i)x_i} \quad (31)$$

e a equação da reta é dada por $r_i = c \ln l_i + d$, onde c e d são coeficientes da equação do 1º grau.

3. Metodologia

Nesta seção, serão apresentados os dados e a metodologia utilizada no trabalho.

3.1. Dados do experimento

Os dados são provenientes de um experimento previamente conduzido pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas Rodolpho Von Ihering, o qual está situado no município de Pentecostes, no Ceará. Os valores de comprimento, massa e consumo de ração, em função do tempo, da espécie tilápia do Nilo estão apresentados na Tabela 1 (Araújo; Márquez, 2008). A partir destes dados, foram utilizados modelos matemáticos para descrever o crescimento linear desses exemplares.

Tabela 1 – Médias dos comprimentos em relação ao tempo de vida dos peixes

<i>Tempo (meses)</i>	<i>Comprimento médio (cm)</i>
0	11,0
1	15,0
2	17,4
3	20,5
4	22,7
5	25,3
6	27,4
7	28,0
8	29,3

Fonte: Araújo e Márquez (2008, p. 42).

3.2. Critérios de avaliação e escolha do modelo

Os modelos foram avaliados, entre os dados observados e estimados, pelo Coeficiente de Determinação (R^2), que tem a finalidade de avaliar a qualidade do ajuste de um modelo de regressão, pelo Quadrado Médio do Resíduo (QMR), o qual possui o objetivo de medir a variação



total nos dados, o Erro Percentual Médio (*EPM*), que é uma métrica que mostra a porcentagem de erro em relação aos valores reais, e o Critério de Akaike Corrigido (*AIC_c*), que é um critério que mensura a qualidade de um modelo estatístico visando também a sua simplicidade.

A primeira etapa foi determinar o Erro Percentual Médio, o qual foi calculado pela equação:

$$EPM = 100 \times \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{(Y - \hat{y})}{Y} \right)}{n} \tag{32}$$

onde, *n* é o número de observações, *Y* é o valor observado, \hat{y} é o valor estimado pelo modelo, o erro indica a tendência à subestimação (sinal positivo) ou à superestimação (sinal negativo) dos valores preditivos do modelo (Goonewardene; Berg; Hardin, 1981).

A segunda etapa foi obter a Soma de Quadrados dos Resíduos (*SQR*) e depois o Quadrado Médio do Resíduo, que foi determinado pela equação:

$$QMR = \frac{SQR}{n - p} \tag{33}$$

na qual

$$SQR = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{34}$$

sendo *SQR* a Soma de Quadrados dos Resíduos, *n* o número de observações, *p* o número de parâmetros do modelo, e *Y_i* e \hat{y}_i os valores observados e estimados, respectivamente (Costa, 2012).

A terceira etapa foi estimar a Soma de Quadrados do Total (*SQT*) e, logo a seguir, foi obtido o Coeficiente de Determinação, obtido pela equação (Rocha, 2015):

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT} \tag{35}$$

em que

$$SQT = SQR + QMR \tag{36}$$

A última etapa foi determinar o Critério de Akaike (*AIC*) e depois foi calculado o Critério de Akaike Corrigido (*AIC_c*), dado pela equação:

$$AIC_c = AIC + \frac{2p(P + 1)}{n - p - 1} \tag{37}$$

na qual

$$AIC = n \times \left[\log \left(\frac{2\pi \cdot SQR}{n} \right) + 1 \right] + 2p \tag{38}$$

onde, *n* é o número de observações, *SQR* é a Soma de Quadrados dos Resíduos, *p* é o número de parâmetros estimados adaptado para análise de mínimos quadrados (Katsanevakis;



Maravelias, 2008). Os cálculos de R^2 , QMR , AIC_c , SQR , SQT e EPM foram obtidos com o auxílio do *software* Excel 2007.

3.3. Representações matemáticas dos modelos

Foram utilizados, neste trabalho, os modelos de crescimento de Von Bertalanffy, Gompertz e Verhulst para o crescimento linear dos peixes. As representações matemáticas desses modelos estão ilustradas na Tabela 2. Os parâmetros utilizados nessas equações têm os seguintes significados (Bassanezi, 2002; Sarmiento, 2018):

- a) $l(t)$ caracteriza o valor do comprimento (cm) em função do tempo (meses);
- b) l_∞ é o valor assintótico do comprimento do peixe, em centímetros;
- c) B significa uma constante de integração que envolve os valores do comprimento e o l_∞ , somente para os modelos de Verhulst e Von Bertalanffy;
- d) k mensura a taxa exponencial de aproximação ao valor assintótico, isto é, o índice de precocidade do animal, ou seja, quanto maior o índice, mais rápido amadurece sexualmente o peixe;
- e) t_c descreve o ponto de inflexão em termos de t ; ele informa o dia em que a taxa de crescimento dos peixes é máxima, somente para o modelo de Gompertz.

Os gráficos, os coeficientes da reta e o R^2 ajustado foram obtidos por meio do *software* OriginPro 8.5.

Tabela 2 – Equações ajustadas ao crescimento da tilápia do Nilo

Modelos	Equação desenvolvida no trabalho
Gompertz	$l(t) = l_\infty \left(\frac{l_0}{l_\infty}\right)^{e^{-kt}}$
Verhulst	$l(t) = l_\infty (1 + Be^{-kt})^{-1}$
Von Bertalanffy	$l(t) = l_\infty (1 - Be^{-kt})$

Fonte: Bassanezi (2002) e Sarmiento (2018).

4. Resultados e discussão

Neste item, serão apresentados os resultados obtidos no trabalho, assim como as suas respectivas discussões.

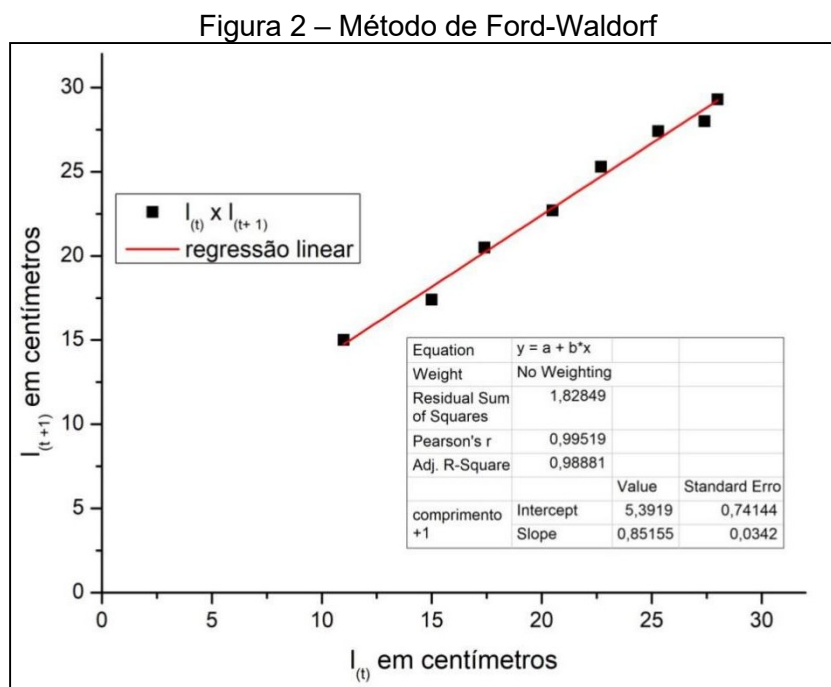
4.1. Cálculos dos parâmetros dos modelos

Neste subitem, serão apresentados os cálculos dos parâmetros empregados neste trabalho e as equações dos modelos.



4.1.1. Modelo de Von Bertalanffy

O método Ford-Waldorf está representado na Figura 2; nela consta a regressão linear dos dados $(l(t), l(t+1))$, os quais estão na Tabela 3, ajustados pelos mínimos quadrados. A equação da reta é dada por $l_{(t+1)} \cong 0,85 l_{(t)} + 5,39$, com R^2 ajustado (Adj. R^2) de 98,88%.



Fonte: Elaboração dos autores.

Tabela 3 – Valores de $l(t)$ e $l(t + 1)$ em centímetros

l_t	11,0	15,0	17,4	20,5	22,7	25,3	27,4	28,0
l_{t+1}	15,0	17,4	20,5	22,7	25,3	27,4	28,0	29,3

Fonte: Elaboração dos autores.

Pela equação da reta, tem-se que $m \cong 0,85$ e $n \cong 5,39$. Os valores estimados para os parâmetros l_∞ e k são obtidos empregando a equação (17), que resulta:

$$l_\infty = \frac{5,39}{1 - 0,85} \cong 36,309 \text{ cm}$$

e

$$e^{-k} = 0,85 \Rightarrow k = 0,161.$$

Substituindo esses valores na equação (15), tem-se:

$$l(t) = l_\infty \left(1 - \frac{(l_\infty - l_0)}{l_\infty} e^{-kt} \right) = 36,309 \left(1 - \frac{36,32 - 11,00}{36,32} e^{-0,161t} \right)$$

$$l(t) = 36,309(1 - 0,694e^{-0,161t}). \tag{39}$$

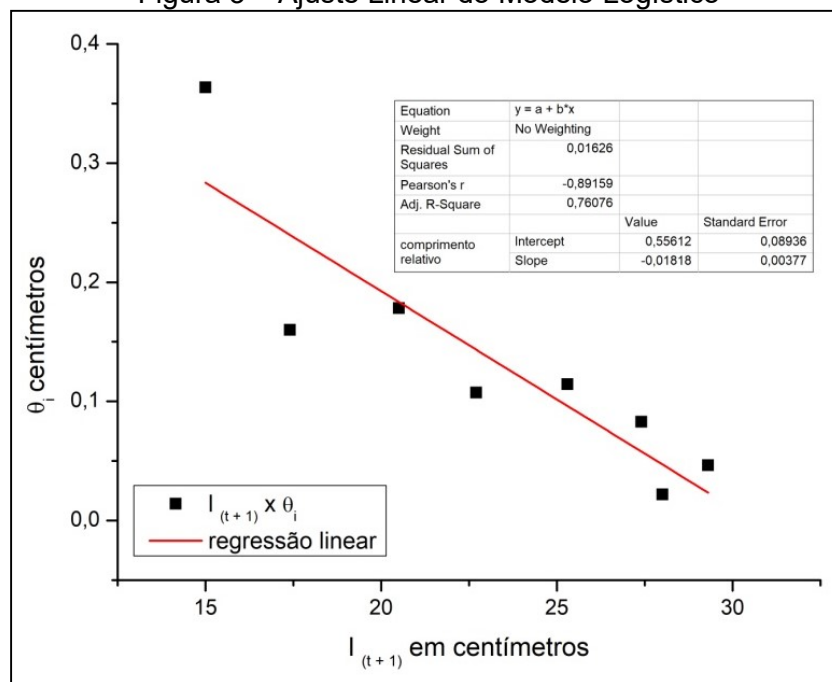


A equação (39) é a expressão matemática para o comprimento linear do modelo de Von Bertalanffy. Os valores dos parâmetros da equação do crescimento, em relação ao tempo, foram semelhantes dos valores obtidos por Araújo e Márquez (2008). A diferença se deve às diferentes condições do experimento, isto é, temperatura e nível de oxigenação da água, tipo de ração, entre outros.

4.1.2. Modelo de Verhulst

O ajuste linear do Modelo Verhulst está representado na Figura 3, que apresenta a regressão linear dos dados (y_{i+1}, θ_i) , os quais estão na Tabela 4; os valores de θ_i foram obtidos pela equação (22), ajustados pelos mínimos quadrados. A obtenção dos coeficientes da equação do 1º grau foi obtida pelo software OriginPro 8.5 e o resultado está na tabela inserida na Figura 3, onde o coeficiente angular é $-0,01818$ e o linear é $0,55612$. Logo, a equação da reta é dada por $\theta_i \cong -0,01818 l_{i+1} + 0,55612$, com Adj. R^2 de 76,01%, também obtido pelo mesmo software.

Figura 3 – Ajuste Linear do Modelo Logístico



Fonte: Elaboração dos autores.



Tabela 4 – Dados do comprimento e para construção do gráfico da Figura 3

l_i (cm)	l_{i+1} (cm)	θ_i
11,000	15,000	0,364
15,000	17,400	0,160
17,400	20,500	0,178
20,500	22,700	0,107
22,700	25,300	0,115
25,300	27,400	0,083
27,400	28,000	0,022
28,000	29,300	0,046
29,300	-----	-----

Fonte: Elaboração dos autores.

Sabe-se que $b = -0,01818$ e $a = 0,55612$; substituindo os valores na equação de l_∞ , tem-se que:

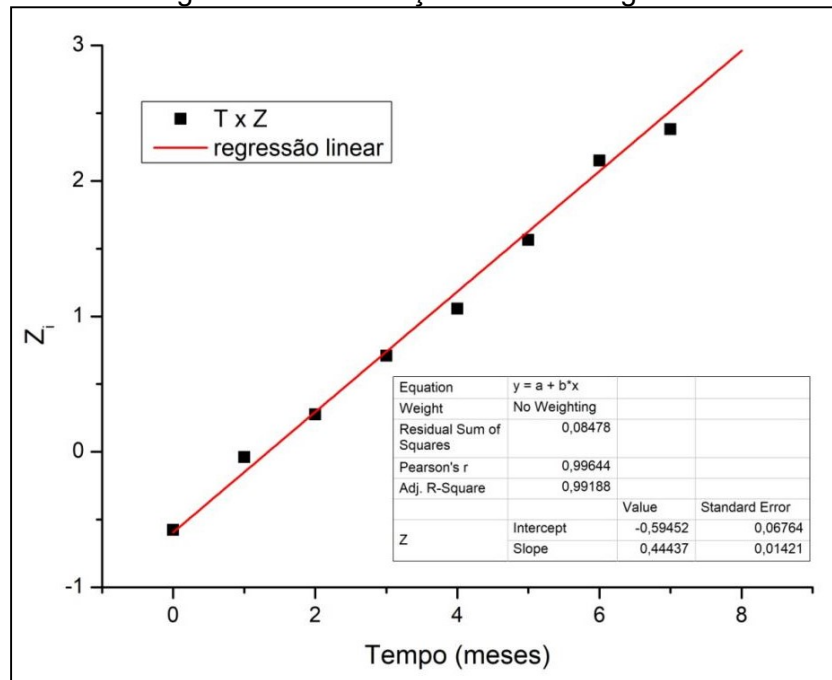
$$l_\infty = \frac{-b}{a} = \frac{-0,55612}{-0,01818} = 30,590 \text{ cm}$$

Para calcular os parâmetros B e k , foi empregada mudança de variável da equação (25); assim, a curva Logística foi transformada na equação (26).

A linearização da curva de Logística está representada na Figura 4; nela versa a regressão linear dos dados (t, z_i) , os quais estão na Tabela 5; os valores de z_i foram obtidos pela equação (24), ajustados pelos mínimos quadrados. A obtenção dos coeficientes da equação do 1º grau foi obtida pelo *software* OriginPro 8.5 e o resultado está na tabela inserida na Figura 4, onde o coeficiente angular é 0,44437 e o linear é 0,59452. A equação da reta é dada por $z \cong 0,44437t - 0,59452$, portanto, $k = 0,444$ e $B = e^{0,59452} = 1,812$.



Figura 4 – Linearização da curva Logística



Fonte: Elaboração dos autores.

Tabela 5 – Dados do tempo, comprimento e z_i para construção do gráfico da Figura 4

t (meses)	l_i (cm)	z_i
0	11,000	-0,577
1	15,000	-0,039
2	17,400	0,277
3	20,500	0,709
4	22,700	1,057
5	25,300	1,565
6	27,400	2,151
7	28,000	2,381
8	29,300	3,123

Fonte: Elaboração dos autores.

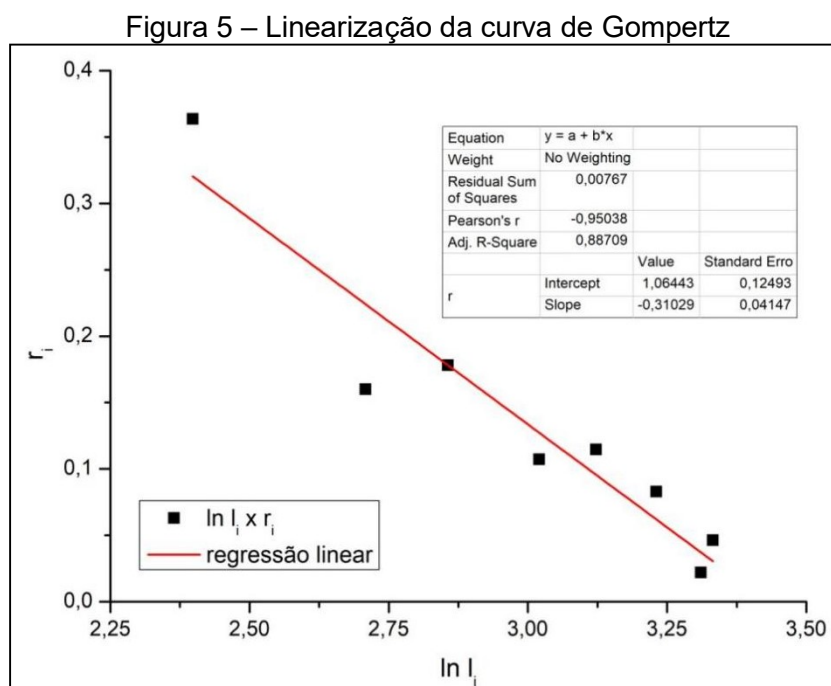
Substituindo os valores encontrados na equação (21), tem-se a expressão matemática para o comprimento linear da tilápia do Nilo:

$$l(t) = \frac{30,590}{(1 + 1,812e^{-0,444t})} \tag{40}$$



4.1.3. Modelo de Gompertz

O ajuste linear de Gompertz está representado na Figura 5, que apresenta a regressão linear dos dados $(\ln(l_i), r_i)$, os quais estão na Tabela 6; os valores de r_i foram obtidos pela equação (31), ajustados pelos mínimos quadrados. A obtenção dos coeficientes da equação do 1º grau foi obtida pelo *software* OriginPro 8.5 e o resultado está na tabela inserida na Figura 5, onde o coeficiente angular é $-0,31029$ e o linear é $1,06443$. A equação da reta é dada por $r_i \cong -0,31029 \ln(l_i) + 1,06443$ com Adj. R^2 de 88,71%, também obtido pelo mesmo *software*.



Fonte: Elaboração dos autores.

Tabela 6 – Dados do comprimento e r_i para construção do gráfico da Figura 5

$\ln(l_i)$ (cm)	r_i
2,398	0,364
2,708	0,160
2,856	0,178
3,020	0,107
3,122	0,115
3,231	0,083
3,311	0,022
3,332	0,046
3,378	-----

Fonte: Elaboração dos autores.



Sabe-se que $b = -0,31029$ e $a = 1,06443$. Substituindo esses valores na equação para l_{∞} , tem-se que:

$$l_{\infty} = e^{a/b} = 30,890 \text{ cm.}$$

Substituindo os valores $k = 0,31029$ e $l_{\infty} = 30,890$ na equação (20), tem-se que a expressão matemática para o comprimento linear da tilápia do Nilo é:

$$l(t) = 30,890 \times \left(\frac{11,000}{30,890}\right)^{e^{-0,310t}} = 30,890 \times 0,356^{e^{-0,310t}}. \tag{41}$$

4.2. Resultados dos parâmetros

Os resultados dos parâmetros obtidos, para cada um dos modelos avaliados, estão indicados na Tabela 7.

Tabela 7 – Parâmetros obtidos das equações para os dados de crescimento em comprimento da tilápia

Modelos	l_{∞} (cm)	B	k (ano⁻¹)
Gompertz	30,890	-----	0,310
Verhulst	30,590	1,812	0,444
Von Bertalanffy	36,309	0,694	0,161

Fonte: Elaboração dos autores.

O parâmetro l_{∞} , Tabela 7, foi maior no modelo Von Bertalanffy (36,309 cm) e menor no de Verhulst (30,590 cm). Esses resultados são similares aos assinalados por Santos (2007) no ajuste do crescimento morfométrico de *Oreochromis niloticus*.

A diferença dos valores do l_{∞} entre este trabalho e o de Santos (2007) pode ser devido à forma de medir o comprimento do peixe. No trabalho referido, a extensão é compreendida entre a extremidade anterior da cabeça e o menor perímetro do pedúnculo, inserção da nadadeira caudal; neste trabalho, a medição foi feita da parte anterior do focinho à posterior da nadadeira caudal, por isto que o valor do referido parâmetro é maior.

Em contrapartida, o parâmetro B foi menor no modelo Gompertz (0,356) e maior no de Verhulst (1,812), só que o parâmetro em questão é uma constante de integração sem significado biológico. Este resultado é parcialmente contrário ao indicado por Santos (2007), que registrou o menor valor do parâmetro B para o modelo de Von Bertalanffy. A causa pode ser a obtenção do comprimento assintótico nos modelos Gompertz e Verhulst, pois o parâmetro B depende dos comprimentos assintótico e inicial. Os R^2 da regressão linear, para obter os l_{∞} , foram, respectivamente, 88,71% e 76,01%, uma diferença significativa em relação ao modelo de Von

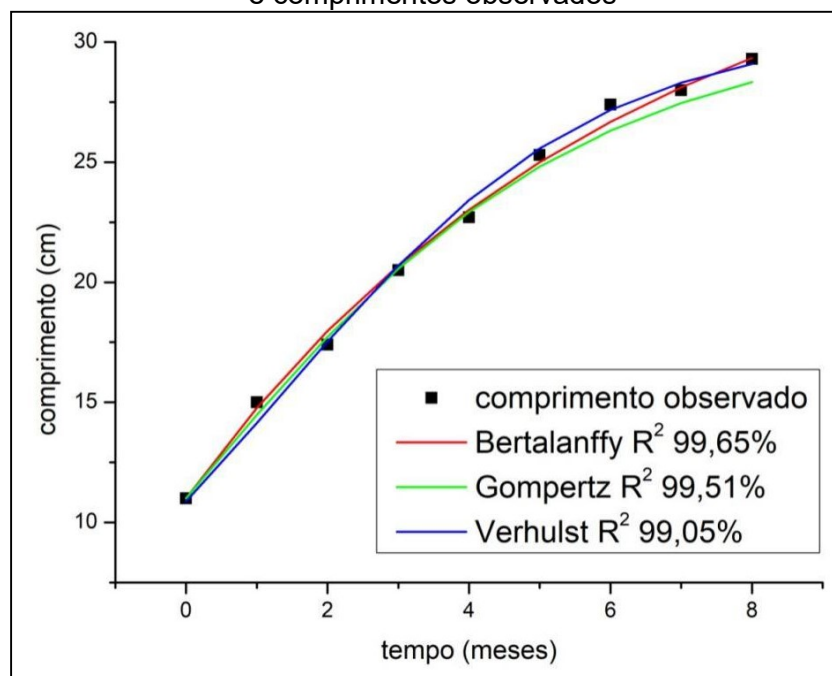


Bertalanffy (98,88%). Este problema pode ser amenizado com mais observações do comprimento do peixe em relação ao tempo e, também, com dados da tilápia próxima da fase adulta.

Finalizando a análise dos parâmetros, foi observado, ainda, que o parâmetro k , Tabela 7, foi maior no modelo Verhulst (0,444) e menor no modelo de Von Bertalanffy (0,161). Isto significa que o índice de precocidade é maior no modelo de Verhulst, ou seja, a tilápia irá alcançar o comprimento assintótico mais rápido nesse modelo do que nos outros. Essa diferença se deve à concepção dos modelos. Esses resultados são semelhantes aos indicados por Santos (2007) no ajuste do crescimento morfométrico de *Oreochromis niloticus*.

A Figura 6 apresenta o comportamento do crescimento das tilápias para os dados observados e estimados pelos três modelos, durante oito meses de cultivo.

Figura 6 – Curvas dos modelos ajustados aos dados em comprimento (cm), com os respectivos R^2 e comprimentos observados



Fonte: Elaboração dos autores.

A forma das curvas obtidas pelos modelos não apresenta, visualmente, variações entre elas e corresponde a uma curva do tipo exponencial côncava, na qual se observa uma ligeira etapa linear, de 0 a 3 meses aproximadamente, e uma etapa de estabilização, após 8 meses, aproximadamente, até alcançar um valor assintótico. A forma das curvas está em conformidade com o trabalho feito por Lugert (2014 *apud* Sarmiento, 2018).

Os valores obtidos pelos modelos e observados estão na Tabela 8.



Tabela 8 – Valores do comprimento da tilápia observado e calculado

Comprimento observado (cm)	Modelo de Gompertz (cm)	Modelo de Verhulst (cm)	Modelo de Von Bertalanffy (cm)
11,00	11,00	10,88	11,00
15,00	14,49	14,15	14,77
17,40	17,73	17,53	17,97
20,50	20,56	20,70	20,70
22,70	22,92	23,42	23,02
25,30	24,82	25,57	25,00
27,40	26,31	27,17	26,68
28,00	27,46	28,30	28,12
29,30	28,34	29,08	29,34

Fonte: Elaboração dos autores.

4.3. Critérios de avaliação e escolha do modelo

Os resultados dos critérios de avaliação do ajuste, para informações em comprimento do peixe, estão indicados na Tabela 9.

Tabela 9 – Avaliadores do ajuste das equações utilizadas

Modelos	R²	Adj. R²	QMR	EPM	AIC_c
Gompertz	99,05 %	88,71%	0,5098	1,2593 ± 0,0212 %	22,7653
Verhulst	99,51 %	76,01%	0,2621	0,1523 ± 0,0246 %	20,1655
Von Bertalanffy	99,65 %	98,88%	0,1905	-0,0936 ± 0,0175 %	18,9184

Fonte: Elaboração dos autores.

Observa-se que o menor valor do *QMR* foi obtido pelo modelo de Von Bertalanffy (0,1905), seguido pelo modelo de Verhulst (0,2621), e o de Gompertz apresentou o maior valor (0,5098). Isso significa que a variação não explicada no modelo Von Bertalanffy é menor, logo a variação explicada mais se aproxima da total, e isso faz com que o modelo esteja mais próximo da realidade em relação aos outros dois (Barbetta; Reis; Bornia, 2010).

Os valores de *R²* foram ligeiramente maiores e similares nos modelos Verhulst (99,51%) e Von Bertalanffy (99,65%) quando comparados com o obtido pelo modelo de Gompertz (99,05%). Isso exprime que em torno de 99,00% da variação no comprimento linear da tilápia do Nilo podem ser explicados pelos três modelos e que os 1,00% restantes são atribuídos a outros fatores intervenientes no processo (Rocha, 2015).



O R^2 tende a estimar de forma otimista o ajuste da regressão linear, por isso foi feito o R^2 ajustado. Esse parâmetro pode ser definido como a quantidade de variabilidade nos dados explicada pelo modelo (Gonçalves, 2021). O modelo de Von Bertalanffy possui o maior Adj. R^2 (98,88%); isso significa que os seus preditores melhoraram o modelo mais do que os preditores dos outros dois modelos.

Sobre o EPM , o modelo de Von Bertalanffy apresentou sinal negativo, o que indica que os valores preditivos têm tendência a serem maiores do que os observados nas biometrias. Em consequência, o modelo avaliado tem tendência à superestimação do crescimento em comprimento. Os outros dois modelos tiveram sinal positivo, o que caracteriza a subestimação (Goonewardene; Berg; Hardin, 1981).

Por último, observa-se que os menores valores de AIC_c são obtidos pelos modelos de Von Bertalanffy (18,9184) e Verhulst (20,1655), seguido pelo modelo de Gompertz, com o qual obteve-se o maior valor (22,7653). Isso significa que o modelo de Von Bertalanffy tem mais possibilidade de estar mais ajustado que o de Verhulst e que o de Gompertz, ou seja, ele tem a maior probabilidade de ser o modelo com o melhor ajuste para este trabalho (Katsanevakis; Maravelias, 2008).

5. Considerações finais

Os modelos não lineares Verhulst e Von Bertalanffy apresentaram-se adequados para descrever o crescimento linear das tilápias do Nilo com cultivo de até 8 meses no Ceará, pois foi pequena a diferença existente entre eles no AIC_c (o modelo de Von Bertalanffy foi 6,18% menor) e há uma grande diferença no QMR (o modelo de Von Bertalanffy foi 27,32% menor), ou seja, a qualidade dos modelos é parecida e a variação total dos dados é bem menor no modelo de Von Bertalanffy. Além disso, seriam necessários dados com cultivo superiores a 8 meses para fazer uma projeção mais abrangente.

Como os resultados do modelo de Von Bertalanffy foram melhores, ou seja, obteve-se AIC_c e QMR menores e Adj. R^2 maior do que o de Verhulst, então ele pode ser considerado, portanto, como mais adequado para descrever o crescimento linear médio dos exemplares analisados.

Referências

ARAÚJO, Jorge Corrêa de; MÁRQUEZ, Rosa María García. Modelos de Von Bertalanffy e Gompertz para descrever os parâmetros de tamanho e peso médio de tilápias. **Cadernos do IME: Série Matemática**, v. 2, n. 20, p. 41-50, 2008. Disponível em: <https://www.e-publicacoes.uerj.br/cadmat/article/view/11849>. Acesso em: 12 jun. 2024.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA PISCICULTURA. **Anuário 2021**: Peixe BR da Piscicultura. São Paulo, 2021. Disponível em: <https://www.peixebr.com.br/anuario-2021>. Acesso em: 15 abr. 2024.



BARBETTA, Pedro Alberto; REIS, Marcelo Menezes; BORNIA, Antonio Cezar. **Estatística: Para Cursos de Engenharia e Informática**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3. ed. Campinas: Contexto, 2002.

BASSANEZI, Rodney Carlos; DINIZ, Michael Macedo. Um estudo sobre crescimento em peso do tambaqui com modelagem fuzzy. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 3, n. 1, 2015. DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2015.003.01.0054>.

BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA JR, Wilson Castro. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

COSTA, Giovani Glaucio de Oliveira. **Curso de Estatística Inferencial e Probabilidades: Teoria e Prática**. São Paulo: Atlas, 2012.

GONÇALVES, Eloy Nader. **Aplicação do Modelo de Regressão Linear Múltipla para Estimação da Produção Habitacional (MCMV/CVA e MAP) no Brasil**. Orientador: Aldo Giuntini de Magalhães. 2021. 33 f. Monografia (Especialização em Gestão e Tecnologia na Construção Civil) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1843/38242>. Acesso em: 16 abr. 2024.

GOONEWARDENE, L. A.; BERG, R. T.; HARDIN, R. T. A growth study of beef cattle. **Canadian Journal of Animal Science**, Ottawa, v. 61, p. 1041-1048, 1981.

KATSANEVAKIS, S.; MARAVELIAS, C. D. Modelling fish growth: multi-model inference as a better alternative to a priori using von Bertalanffy equation. **Fish and Fisheries**, v. 9, n. 2, p. 178-187, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-2979.2008.00279.x>.

KUTTLER, Christina. **Mathematical Models in Biology**. München: Technische Universität München, 2009. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:178244157>. Acesso em: 12 jun. 2024.

OLIVEIRA, Angelo Sousa. Influência dos fatores ambientais no crescimento da tilápia do Nilo (*Oreochromis niloticus*) em viveiros escavados no brejo paraibano. Orientador: Dermeval Araujo da Furtado. 2010. 86f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2010. Disponível em: <http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/11116>. Acesso em: 16 abr. 2024.

OLIVEIRA, Elenise Gonçalves de; SANTOS, Francisco José de Seixas; PEREIRA, Alitieni Moura L.; LIMA, Carolyny Batista. **Produção de tilápia: Mercado, espécie, biologia e recria**. Circular Técnica. 1. ed. Teresina, PI: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, dez. 2007. v. 45.

ROCHA, Sergio. **Estatística Geral e Aplicada: para Cursos de Engenharia**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2015.

SANTOS, Vander Bruno dos; FREITAS, Rilke Tadeu Fonseca de; SILVA, Fabyano Fonseca e; FREATO, Thiago Archangelo. Avaliação de curvas de crescimento morfométrico de linhagens de tilápia do nilo (*Oreochromis niloticus*). **Zootecnia e Medicina Veterinária**, Lavras, v. 31, n. 5, p. 1486-1492, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1413-70542007000500032>.



SARMIENTO, Peter Charrie Janampa. **Modelagem do Crescimento de Truta Arco-íris na Fase Engorda**. Orientador: Marcelo Maia Pereira. Coorientadores: Rodrigo Takata; Thiago Mendes de Freitas. 2018. 49 f. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2018. Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6352637. Acesso em: 12 jun. 2024.

SOUZA, Francine Bonato de; SILVA FILHO, Antônio Carlos da. Equações diferenciais e o crescimento populacional: uma comparação entre a curva de Gompertz e o modelo Logístico.

Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática, Franca, v. 1, n. 1, 2019.

Disponível em: <http://periodicos.unifacef.com.br/RELIMAT/article/view/1887>. Acesso em: 16 abr. 2024.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. v. 1. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

