

Simulação numérica de um escoamento laminar incompressível em uma cavidade quadrada com tampa deslizante

Numerical simulation of an incompressible laminar flow in a square lid-driven cavity

Simulación numérica de un flujo laminar incompresible en una cavidad cuadrada con tapa deslizante

Jonatan Ismael Eisermann¹

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil



<https://orcid.org/0000-0001-8884-3480>,



<http://lattes.cnpq.br/0798905187800482>

Resumo: Neste trabalho é realizada a simulação numérica de um escoamento laminar incompressível no interior de uma cavidade quadrada com tampa deslizante. Para tanto, um modelo matemático bidimensional baseado na formulação de função corrente e vorticidade das equações de Navier-Stokes é deduzido e, em seguida, discretizado sobre uma malha computacional por meio do método das Diferenças Finitas. Para a resolução das equações discretizadas a partir das condições iniciais e de contorno do problema, um código computacional baseado em um processo iterativo semi-implícito é implementado no programa *Matlab* e disponibilizado no texto. Por meio desse código são feitas simulações para escoamentos incompressíveis, com número de Reynolds 100, 400 e 1000. A validação do código é feita por meio de comparações dos resultados numéricos obtidos com resultados de referência disponíveis na literatura. Análises decorrentes da simulação evidenciam que os escoamentos provocam a criação de uma grande zona de recirculação próxima ao centro da cavidade e duas menores nos cantos inferiores, cuja intensidade e tamanho dependem diretamente do número de Reynolds correspondente.

Palavras-chave: simulação numérica; escoamento laminar incompressível; cavidade quadrada com tampa deslizante; diferenças finitas; semi-implícito.

Abstract: A numerical simulation of an incompressible laminar flow inside a lid-driven square cavity is carried out in this work. For this purpose, a two-dimensional mathematical model based on the vorticity-stream function formulation of the Navier-Stokes equations is deduced and then discretized on a computational mesh using the Finite Differences method. For the resolution of the discretized equations from the initial and boundary conditions of the problem, a computational code based on a semi-implicit iterative process is implemented in the *Matlab* software and is available in the text. From this code, simulations are made for incompressible flows with Reynolds numbers 100, 400 and 1000. The code validation is done through comparisons of numerical results obtained with reference results available in the literature. Analyzes resulting from the simulation show that the flows cause the creation of a large recirculation zone near the center of the cavity and two smaller ones in the lower corners, whose intensity and size depend directly on the corresponding Reynolds number.

Keywords: numerical simulation; incompressible laminar flow; lid-driven square cavity; finite differences; semi-implicit.

Resumen: En este trabajo se realiza una simulación numérica de un flujo laminar incompresible en el interior de una cavidad cuadrada con tapa deslizante. Por lo tanto, se deduce un modelo matemático bidimensional basado en la formulación de función de corriente y vorticidad de las ecuaciones de Navier-Stokes y, en seguida, se discretiza este modelo en una malla computacional utilizando el método de Diferencias Finitas. Para

¹ **Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha, mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina, doutorando do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Recursos, *Software*, Validação e Visualização. **Contato:** jonatan.eisermann@ufrgs.br.



la resolución de las ecuaciones discretizadas a partir de las condiciones iniciales y de contorno del problema, se implementa en el programa *Matlab* un código computacional basado en un proceso iterativo semi-implícito que está disponible en el texto. Mediante este código se realizan simulaciones para flujos incompresibles con números de Reynolds 100, 400 y 1000. La validación del código se realiza mediante comparaciones de los resultados numéricos obtenidos con resultados de referencia disponibles en la literatura. Los análisis resultantes de la simulación muestran que los flujos provocan la creación de una gran zona de recirculación cerca del centro de la cavidad y dos más pequeñas en las esquinas inferiores, cuya intensidad y tamaño dependen directamente del número de Reynolds correspondiente.

Palabras clave: simulación numérica; flujo laminar incompresible; cavidad cuadrada con tapa deslizante; diferencias finitas; semi-implícito.

Data de submissão: 19 de junho de 2023.

Data de aprovação: 7 de agosto de 2023.

1 Introdução

A Dinâmica de Fluidos é o ramo das ciências aplicadas dedicada ao estudo do movimento dos fluidos. Por fluido compreende-se toda substância que se deforma continuamente (flui, escoar) sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento não nula qualquer. Historicamente, os primeiros fundamentos da Dinâmica de Fluidos foram desenvolvidos exclusivamente a partir de observações experimentais. O início das investigações matemáticas nessa área somente ocorreu em meados do século XVIII, com a dedução de equações que relacionam o movimento de fluidos com as forças envolvidas nesse fenômeno: as equações de Euler. Estas foram aprimoradas no século posterior por meio dos trabalhos de Claude Navier (Navier, 1827), Simeon Poisson (Poisson, 1831) e George Stokes (Stokes, 1845), culminando, assim, no desenvolvimento das renomadas equações de Navier-Stokes.

O desenvolvimento de equações que modelam escoamentos expandiu, para além da observação experimental, as ferramentas disponíveis para investigar o movimento de fluidos. Nesse sentido, a construção de um modelo de um sistema real e a posterior condução de experimentos com tal formulação matemática é denominada simulação. Essa, por sua vez, pode ser efetivada de duas maneiras: por meio da solução analítica das equações do modelo e/ou por meio da utilização de técnicas numéricas/computacionais que aproximem tais soluções. De modo geral, a simulação numérica mostra-se, em grande parte dos casos, uma técnica mais atrativa do que estudos analíticos e experimentais, sobretudo quando são consideradas questões como viabilidade e custos de realização (Griebel; Dornsheifer; Neunhoeffler, 1997).



Devido à complexidade das equações envolvidas em escoamentos, a implementação de códigos computacionais em simulações numéricas é frequente. Para que os resultados obtidos computacionalmente sejam considerados confiáveis é comum que tais códigos sejam testados em problemas relativamente simples que contenham dados experimentais disponíveis para fins de comparação. Especificando-se à Dinâmica de Fluidos, o problema da Cavidade Quadrada com Tampa Deslizante (CQTD) é considerado um clássico que cumpre os requisitos supracitados. Além de constituir uma geometria simples, o referido sistema mecânico conta atualmente com vários estudos numéricos (Ghia; Ghia; Shin, 1982; Hou *et al.*, 1995; Marchi; Suero; Araki, 2009; Zhang, 2003) e experimentais (Koseff; Street, 1984a, 1984b, 1984c; Prasad; Koseff, 1989), servindo como referência no estudo de aspectos fundamentais de escoamentos incompressíveis (escoamentos em que as variações de densidade do fluido são desprezíveis). Mais ainda, o problema tem recebido atenção significativa da comunidade científica uma vez que possui várias aplicações práticas, como em escoamentos entre interstícios de aletas em trocadores de calor (Seibt *et al.*, 2016) e coletores de energia solar (Zdanski; Ortega; Fico Jr., 2003).

As formulações matemáticas usadas na modelagem do problema CQTD baseiam-se, fundamentalmente, nas equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, isto é, na equação da continuidade e na da quantidade de movimento. Tendo em vista a precisão na representação do escoamento, alguns estudos numéricos utilizam essas equações na forma primitiva, escritas em função da velocidade e pressão do fluido (Bruneau; Saad, 2006; Marchi; Suero; Araki, 2009; Vanka, 1986). Porém, essa abordagem mostra-se complexa e difícil de ser resolvida, principalmente no que tange ao acoplamento de variações do campo de velocidades com as variações no campo de pressão, satisfazendo a equação de continuidade (Gupta; Kalita, 2005). A fim de superar tal dificuldade, formulações alternativas para as equações de Navier-Stokes incompressíveis têm sido utilizadas para resolver o problema CQTD, tais como o uso da função corrente e vorticidade (Ghia; Ghia; Shin, 1982; Zhang, 2003), função corrente e velocidade (Gupta; Kalita, 2005) e equação de Lattice-Boltzmann (Hou *et al.*, 1995).

Além de diferentes formulações matemáticas do problema CQTD, a literatura contempla estudos com diferentes regimes de escoamentos na cavidade quadrada (Ghia; Ghia; Shin, 1982; Marchi; Suero; Araki, 2009). O regime de escoamento afeta diretamente a transferência de calor e massa envolvida no movimento dos fluidos, e pode ser classificado por um parâmetro adimensional conhecido como número de Reynolds (Re). O número de Reynolds é a razão da força inercial com a força viscosa do fluido, e por isso mensura o quão rápido o fluido está se movendo em relação ao quão vis-



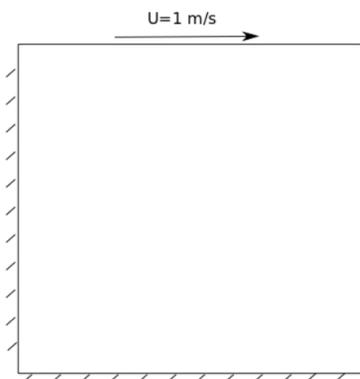
coso ele é. Conforme classificação adotada pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT, 2008), em geometrias mais simples um escoamento é laminar quando $Re \leq 2000$, de transição quando $2000 < Re < 4000$, e turbulento quando $Re \geq 4000$.

Neste estudo, objetiva-se realizar análises quantitativas e qualitativas relacionadas a um escoamento laminar incompressível em uma cavidade quadrada com tampa deslizante por meio do desenvolvimento da simulação numérica do referido fenômeno. Para tanto, um modelo matemático bidimensional baseado na formulação de função corrente e vorticidade das equações de Navier-Stokes será deduzido e, em seguida, discretizado sobre uma malha computacional por meio do método das Diferenças Finitas (Burden; Faires; Burden, 2015). Posteriormente, um algoritmo computacional baseado em um método semi-implícito será desenvolvido e disponibilizado no texto. Simulações numéricas serão feitas para valores de Reynolds 100, 400 e 1000, e comparadas com resultados de referência da literatura (Ghia; Ghia; Shin, 1982; Seibold, 2008), servindo de base para a validação do código desenvolvido e para a análise do escoamento na cavidade.

2 O Problema da Cavidade Quadrada com Tampa Deslizante (CQTD)

A geometria do problema da Cavidade Quadrada com Tampa Deslizante (CQTD), representada pela Figura 1, consiste em uma cavidade quadrada cujas paredes são sólidas e impermeáveis. As partes laterais e inferior são fixas; já a parte superior consiste de uma tampa deslizante (móvel) que está inicialmente em repouso. Considera-se o interior dessa cavidade totalmente preenchido com um fluido. O escoamento do fluido inicia a partir de uma velocidade constante $U > 0$ aplicada na tampa deslizante. Devido às tensões viscosas, o movimento da tampa desloca o fluido que está adjacente a ela, originando o escoamento.

Figura 1 – Geometria do problema CQTD



Fonte: Disponível em: <https://curiosityfluids.com/2016/03/14>. Acesso em: 8 nov. 2022.



Vale destacar que, além do problema CQTD, a cavidade cúbica com tampa deslizante (tridimensional) também existe na literatura científica e é alvo de estudos por pesquisadores da Dinâmica de Fluidos. Maiores informações para o referido caso podem ser consultadas nos trabalhos de Beya e Lili (2008), de Liberzon, Feldman e Gelfgat (2011) e de Wang e Wan (2011). No primeiro e no último, o escoamento é analisado a partir de simulações numéricas; já no segundo, as análises são baseadas em dados experimentais. Assim como no caso bidimensional, não são conhecidas soluções analíticas para o problema (Martins, 2016).

3 Formulação Analítica

Para a formulação matemática do problema CQTD considerar-se-á um plano bidimensional orientado por um eixo horizontal x e um eixo vertical y . A partir desses eixos, definem-se as componentes da velocidade do fluido envolvido: u é a velocidade na direção x , e v a velocidade na direção y . A pressão, a densidade e a viscosidade dinâmica do fluido são denotadas, respectivamente, por p , ρ e μ .

Assumindo as devidas condições de diferenciabilidade, convencionalmente, os escoamentos laminares incompressíveis são modelados pelas equações da continuidade e da quantidade de movimento. A primeira é baseada no princípio de conservação da massa do fluido durante o escoamento, e é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

A segunda, é baseada na Segunda Lei de Newton, e estabelece uma relação entre aceleração, pressão e forças aplicadas sobre o fluido durante o escoamento, de modo a constituir um acoplamento entre os campos de velocidade e pressão no espaço (x, y) e no tempo t . Para o caso bidimensional em que são desconsideradas as forças de corpo sobre o fluido, a equação da quantidade de movimento pode ser dissociada em:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Buk Junior (2007) destaca duas dificuldades em trabalhar com as equações (2) e (3) em sua formulação original: a existência de um termo não linear e não simétrico, e a necessidade de que essas equações satisfaçam simultaneamente a condição de incompressibilidade (1). A primeira difi-



culdade implica no agravamento de resolução das equações com o aumento do número de Reynolds do escoamento, uma vez que o referido termo passa a assumir maior importância na equação. Já a segunda dificuldade implica na imposição de um acoplamento desconhecido entre pressão e velocidade que impede que as duas variáveis possam ser aproximadas independentemente de forma direta.

Na subseção a seguir, as equações (1), (2) e (3) serão tratadas de modo a originar uma formulação matemática equivalente que permite sanar, na medida do possível, as dificuldades citadas no parágrafo anterior. Tal formulação consistirá, fundamentalmente, em duas equações: a equação de transporte da vorticidade e a equação elíptica da vorticidade.

3.1 Função Corrente e Vorticidade

A formulação em função corrente e vorticidade das equações abordadas na seção anterior necessita que, inicialmente, sejam definidos alguns conceitos. Nesse contexto, a vorticidade ω é a grandeza física que quantifica a rotação das partículas de um fluido em movimento. Matematicamente, ela constitui o campo vetorial definido pelo operador rotacional do campo de velocidades, sendo, portanto, calculada no plano bidimensional por

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Por outro lado, as linhas de corrente de um escoamento são linhas tangentes ao vetor de velocidade do fluido a cada instante, sendo úteis como indicadores da direção instantânea do movimento do fluido. Baseado nisso define-se a função corrente Ψ , em termos das velocidades u e v , por

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v. \quad (5)$$

Sob a hipótese de ser uma função duas vezes continuamente diferenciável, Ψ satisfaz automaticamente a equação da continuidade (1). De fato, a substituição de (5) em (1) fornece

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

A partir dessas definições serão deduzidas a equação de transporte da vorticidade e a equação elíptica da vorticidade. A primeira delas permite estudar a cinética da vorticidade no esco-



amento, e é obtida derivando (2) com relação a y e (3) com relação a x , donde resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Das duas equações obtidas, subtrai-se a primeira da segunda e encontra-se a relação

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right) + \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \left(v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \dots \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right). \end{aligned}$$

Simplificando a equação anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

A substituição de (1) e (4) em (6) fornece a equação

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \tag{7}$$

Substituindo (5) em (7) e isolando a derivada temporal, obtém-se a equação de transporte da vorticidade dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \tag{8}$$

Já a equação elíptica da vorticidade é mais simples de ser obtida: basta substituir (5) em (4).

Assim, tem-se que

$$-\omega = -\frac{\partial \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}. \tag{9}$$

4 Formulação Numérica

O modelo matemático do problema CQTD no presente estudo é constituído, essencialmente, pelas equações diferenciais (8) e (9). Uma forma de resolver numericamente essas equações, considerando as condições iniciais e de contorno do problema, consiste em discretizar o espaço e manter a variável tempo contínua. O resultado é um sistema de equações diferenciais ordinárias



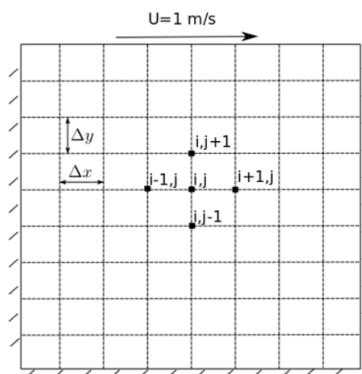
(EDOs), cuja resolução pode ser efetuada por algum método numérico adequado à classe e rigidez do problema.

A finalidade da discretização consiste em particionar o domínio contínuo em pontos discretos, para calcular aproximações de derivadas parciais por meio de expressões algébricas. Tal partição dá origem a uma malha, cujo refinamento necessita ser feito com cautela, já que interfere diretamente na qualidade das aproximações obtidas. Maiores detalhes sobre a malha computacional, o método de discretização, e as condições iniciais e de contorno utilizados na formulação numérica do problema CQTD serão apresentados nas próximas subseções.

4.1 Malha Computacional

Neste estudo a cavidade quadrada na qual será feita a simulação do escoamento possui lado $L = 1$. A malha computacional a ser considerada no espaço para a cavidade é uma malha quadrangular uniforme de tamanho 81×81 (vide recorte apresentado na Figura 2), de modo que tanto o espaçamento horizontal (Δx) quanto o espaçamento vertical (Δy) entre dois pontos adjacentes da malha será de $1/80$. Assim, o conjunto de pontos que constitui a malha será o conjunto $\Omega = \{(x_i, y_j); i, j \in \{0, 1, 2, \dots, 80\}\}$, em que $x_i = i \cdot \Delta x$ e $y_j = j \cdot \Delta y$.

Figura 2 – Exemplo de malha computacional para a cavidade quadrada



Fonte: Disponível em: <https://curiosityfluids.com/2016/03/14>. Acesso em: 8 nov. 2022.

Os pontos em Ω da forma (x_0, y_j) , (x_{80}, y_j) , (x_i, y_0) , (x_i, y_{80}) correspondem às paredes (ao contorno) da cavidade quadrada. Para esses pontos, os valores de ω e Ψ serão fornecidos ao longo do tempo conforme disposto na subseção 4.3. Em contrapartida, nos demais pontos de Ω os valores de ω e Ψ serão calculados por meio do processo iterativo no tempo explicitado na subseção 4.2.



4.2 Discretização das Equações

A discretização espacial das equações governantes do problema CQTD será feita pelo método das Diferenças Finitas baseado em esquemas centrados de primeira e segunda ordem (Burden; Faires; Burden, 2015). O fundamento principal desse método consiste em substituir as derivadas parciais de uma função por expressões discretas baseadas em expansões de série de Taylor, calculadas apenas em um conjunto finito de pontos.

Considerando a malha computacional Ω e uma função duas vezes continuamente diferenciável f , serão assumidas no ponto (x_i, y_j) as aproximações para as derivadas espaciais de primeira ordem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y},$$

e para as derivadas espaciais de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

O uso de tais aproximações na equação (8) fornece a formulação discreta

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_{i,j} = & - \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta y}\right) \left(\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta x}\right) + \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2\Delta x}\right) \dots \\ & \cdot \left(\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta y}\right) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Denominando o lado direito da equação acima por $g_{i,j}$, tem-se a equação diferencial ordinária

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_{i,j} = g_{i,j}.$$

Sua resolução será feita por meio de um processo iterativo no tempo indexado pelo índice k e com passo temporal Δt , de modo que soluções numéricas poderão ser obtidas em Ω para cada instante de tempo $t = k \cdot \Delta t$, $k \in \mathbb{N}$. Nesse contexto, com base na expansão em série de Taylor de primeira ordem, considera-se que

$$\omega_{i,j}^{(k+1)} = \omega_{i,j}^{(k)} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_{i,j}^{(k)} \Delta t.$$



Disso, e da substituição de $h = \Delta x = \Delta y$ em (10), segue que a atualização da vorticidade no ponto (x_i, y_j) da malha será calculada por

$$\omega_{i,j}^{(k+1)} = \omega_{i,j}^{(k)} + \left[- \left(\frac{\Psi_{i,j+1}^{(k)} - \Psi_{i,j-1}^{(k)}}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{(k)} - \omega_{i-1,j}^{(k)}}{2h} \right) + \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^{(k)} - \Psi_{i-1,j}^{(k)}}{2h} \right) \dots \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{(k)} - \omega_{i,j-1}^{(k)}}{2h} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{(k)} + \omega_{i,j+1}^{(k)} - 4\omega_{i,j}^{(k)} + \omega_{i-1,j}^{(k)} + \omega_{i,j-1}^{(k)}}{h^2} \right) \right] \Delta t. \quad (11)$$

Por outro lado, o uso de diferenças finitas centrais na equação elíptica da vorticidade (9) fornece a formulação discreta

$$-\omega_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\ = \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j+1} - 4\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j-1}}{h^2}, \quad (12)$$

Rearranjando os termos de (12), de maneira a isolar $\Psi_{i,j}$ de um dos lados da equação, segue que a atualização da função corrente no ponto (x_i, y_j) será calculada por

$$\Psi_{i,j}^{(k+1)} = \frac{\omega_{i,j}^{(k+1)} h^2 + \Psi_{i+1,j}^{(k)} + \Psi_{i,j+1}^{(k)} + \Psi_{i-1,j}^{(k)} + \Psi_{i,j-1}^{(k)}}{4}. \quad (13)$$

4.3 Condições Iniciais e de Contorno

Para as condições iniciais do problema considera-se um fluido em repouso (velocidades u e v nulas) no interior e nos pontos adjacentes às paredes laterais e inferior da cavidade. Em contrapartida, para o topo da cavidade (tampa deslizante) tomar-se-á $u = 1$ e $v = 0$, assim como ilustrado na Figura 1, com $u = U$.

As condições de contorno utilizadas neste trabalho são as do tipo Dirichlet (De Bortoli, 2000), isto é, condições que definem diretamente as soluções de uma ou mais variáveis do problema no contorno. Nessa perspectiva, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, 80\}$, utilizar-se-á

$$\omega_{i,80}^{(k+1)} = \frac{-2\Psi_{i,79}^{(k)}}{h^2} - \frac{2}{h}; \quad \omega_{i,0}^{(k+1)} = \frac{-2\Psi_{i,1}^{(k)}}{h^2}; \quad \omega_{80,j}^{(k+1)} = \frac{-2\Psi_{79,j}^{(k)}}{h^2}; \quad \omega_{0,j}^{(k+1)} = \frac{-2\Psi_{1,j}^{(k)}}{h^2}.$$

Essas condições são deduzidas a partir de expansões de séries de Taylor nos pontos de Ω (Juujärvi; Kinnunem, 2022).



4.4 Código Computacional

Baseado nas informações apresentadas e discutidas anteriormente, implementou-se um método numérico adequado para o problema em questão. Tal método consiste em um processo iterativo que identifica aproximações para a vorticidade e a função corrente em cada ponto de Ω . Esse processo terminará assim que a maior diferença da vorticidade entre duas iterações consecutivas nos pontos da malha for muito pequena ou quando a quantidade de iterações necessárias para a obtenção da solução ultrapassar um limite previamente estabelecido. Por fim, as velocidades em cada ponto da malha serão calculadas a partir da função corrente obtida.

A implementação computacional do método supracitado segue as seguintes etapas: *i)* inserção dos dados de entrada; *ii)* geração da malha computacional; *iii)* definição das condições iniciais do problema; *iv)* desenvolvimento do processo iterativo, contemplando condições de contorno, atualização da vorticidade e da função corrente por meio das fórmulas (11) e (13), checagem de convergência; e *v)* identificação das velocidades em cada ponto da malha a partir da função corrente.

A densidade do fluido será fixada em $\rho = 1$. Já para a viscosidade do fluido μ serão considerados três valores distintos: 0,01; 0,0025; e 0,001. Esses valores correspondem, respectivamente, a Reynolds 100, 400 e 1000, uma vez que tal número é definido pela fórmula

$$\text{Re} = \frac{UL\rho}{\mu}.$$

Portanto, o regime do escoamento no interior da cavidade quadrada será laminar.

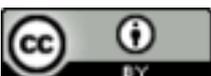
A seguir, é apresentada a implementação realizada no programa *Matlab*².

```

1 %% MÉTODO SEMI-IMPLÍCITO PARA RESOLVER UM ESCOAMENTO LAMINAR INCOMPRESSÍVEL NA CQTD
2
3 % Inserção dos dados de entrada
4 L      = 1;           % lado da cavidade;
5 U      = 1;           % velocidade u na parede superior da cavidade;
6 rho    = 1;           % densidade do fluido;
7 mu     = 0.01;        % viscosidade dinâmica do fluido para Re=100;
8 dt     = 0.001;       % tamanho do passo de tempo;
9 maxit  = 50000;       % máximo de iterações do método;
10 tol   = 1e-7;        % tolerância no método;
11
12 % Geração da malha computacional
13 ni    = 81;          % número de pontos da malha na direção x;

```

²Software disponível em: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.



```

14 nj      = 81;           % número de pontos da malha na direção y;
15 h      = L/(ni-1);    % distância entre dois pontos adjacentes da malha;
16 x      = 0:h:L;      % primeira coordenada dos pontos da malha;
17 y      = 0:h:L;      % segunda coordenada dos pontos da malha;
18 ia     = 1:ni-2;      % i anterior;
19 i      = 2:ni-1;      % i corrente;
20 ip     = 3:ni;        % i posterior;
21 ja     = 1:nj-2;      % j anterior;
22 j      = 2:nj-1;      % j corrente;
23 jp     = 3:nj;        % j posterior;
24
25 % Condições iniciais (a componente da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz ...
    corresponde ao valor da variável no ponto da malha (x.i,y-j))
26 Vo     = zeros(ni,nj); % vorticidade no iterado atual;
27 Voa    = Vo;          % vorticidade no iterado anterior;
28 Fc     = Vo;          % função corrente;
29 u      = Vo;          % velocidade na direção x;
30 v      = Vo;          % velocidade na direção y;
31
32 % Desenvolvimento do processo iterativo
33 for iter = 1:maxit
34     % condições de contorno da cavidade
35     Vo(1:ni,nj) = -2*Fc(1:ni,nj-1)/(h^2) - 2/h;    % parede superior;
36     Vo(1:ni,1) = -2*Fc(1:ni,2)/(h^2);             % parede inferior;
37     Vo(ni,1:nj) = -2*Fc(ni-1,1:nj)/(h^2);         % parede direita;
38     Vo(1,1:nj) = -2*Fc(2,1:nj)/(h^2);             % parede esquerda;
39
40     % atualização da vorticidade
41     Voa = Vo;
42     Vo(i,j) = Voa(i,j) + ...
43         (-1*(Fc(i,jp)-Fc(i,ja))/(2*h) .* (Voa(ip,j)-Voa(ia,j))/(2*h)+...
44         (Fc(ip,j)-Fc(ia,j))/(2*h) .* (Voa(i,jp)-Voa(i,ja))/(2*h)+...
45         mu/rho*(Voa(ip,j)+Voa(i,jp)-4*Voa(i,j)+Voa(ia,j)+Voa(i,ja))/(h^2))*dt;
46
47     % atualização da função corrente
48     Fc(i,j) = (Vo(i,j)*h^2 + Fc(ip,j) + Fc(i,jp) + Fc(ia,j) + Fc(i,ja))/4;
49
50     % verificação da convergência
51     if iter > 10
52         erro = max(max(Vo - Voa))
53         if erro < tol
54             break;
55         end
56     end
57 end
58
59 % Identificação da velocidade através da função corrente
60 u(2:ni-1,nj) = U;
61 u(i,j)       = (Fc(i,jp)-Fc(i,ja))/(2*h);
62 v(i,j)       = (-Fc(ip,j)+Fc(ia,j))/(2*h);

```

Vale salientar que o cálculo das velocidades realizado nas duas últimas linhas do código provém da utilização do método das Diferenças Finitas na equação (5):

$$u_{i,j} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2h}; \quad v_{i,j} = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{-\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}}{2h}.$$



Nesse contexto, $u_{i,j}$ e $v_{i,j}$ denotam, respectivamente, aproximações de u e de v no ponto (x_i, y_j) .

5 Resultados Numéricos

Um meio muito utilizado na validação de algoritmos computacionais é a comparação de seus resultados com dados de referência disponíveis na literatura. Nessa perspectiva, o código apresentado na seção anterior foi executado no programa *Matlab* e os resultados foram comparados com os do código desenvolvido e disponibilizado por Seibold (2008). Esse código é baseado no método de projeção desenvolvido por Chorin (1967, 1968), cujo processo de modelagem do escoamento envolve as equações de Navier-Stokes descritas nas variáveis primitivas (velocidade e pressão). Conforme Hernández *et al.* (1999), o esquema projetivo de Chorin tornou-se bastante popular em simulações de escoamentos transitórios, sendo composto de três operações sequenciais: computação de um campo de velocidades intermediário ou provisório usando os termos não lineares e viscosos na equação da quantidade de movimento, sem levar em conta o campo de pressão; cálculo do campo de pressão resolvendo uma equação de Poisson; e, finalmente, projeção da velocidade intermediária sobre um espaço de divergência zero usando o gradiente da pressão.

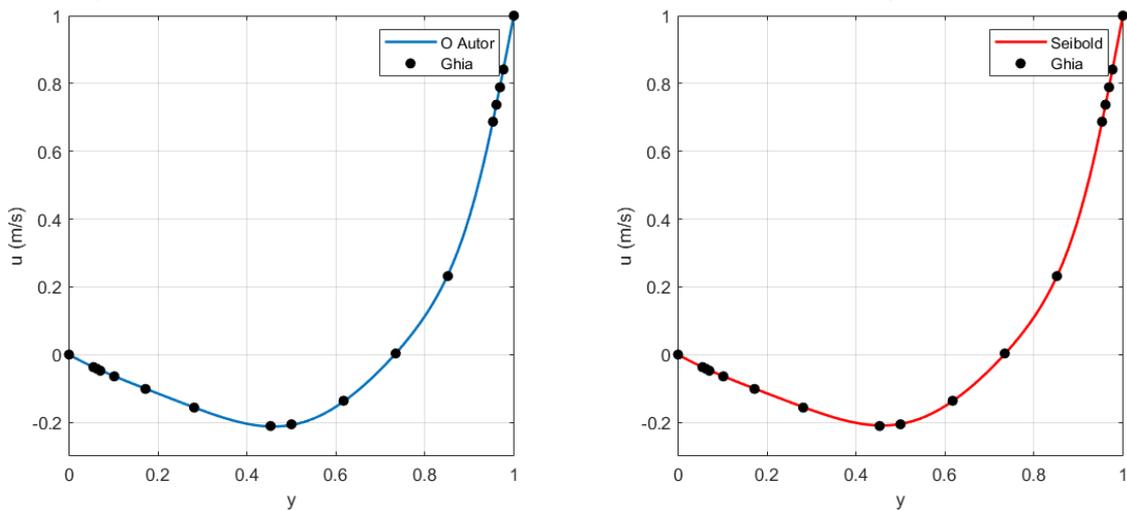
Além de serem comparados entre si com base em três números de Reynolds distintos, o código do autor e o de Seibold (2008) foram comparados, também, com os resultados clássicos de Ghia, Ghia e Shin (1982), culminando nas análises apresentadas nas subseções a seguir.

5.1 Escoamento com $Re = 100$

Inicialmente, traçou-se o perfil da velocidade u em relação à linha de centro vertical da cavidade para ambos os códigos, baseado em um escoamento incompressível com $Re = 100$. A Figura 3 evidencia a compatibilidade dos resultados obtidos entre os dois algoritmos comparados.



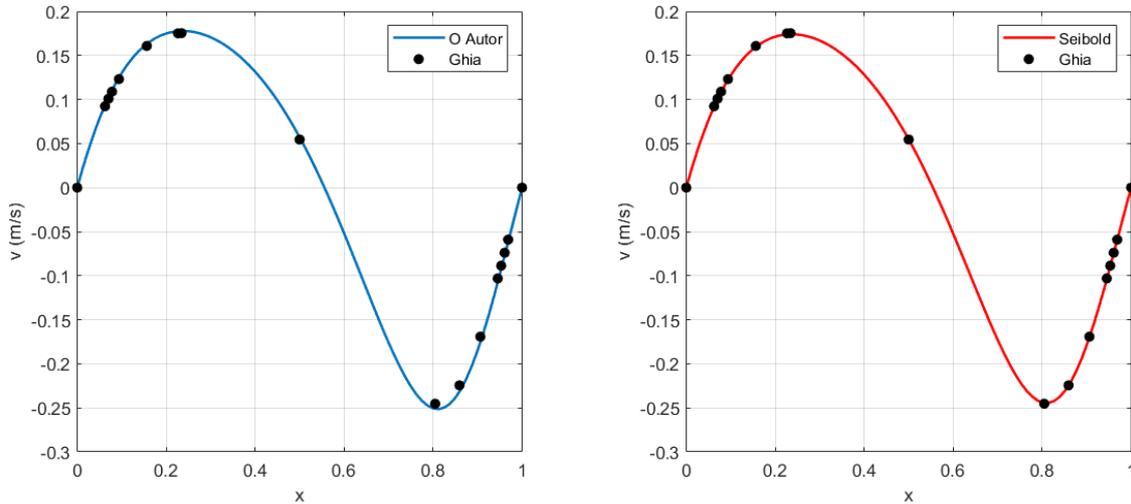
Figura 3 – Velocidade u na linha de centro vertical da cavidade para $Re = 100$



Fonte: Elaboração do autor (2023).

Similarmente, traçou-se o perfil da velocidade v em relação à linha de centro horizontal da cavidade para ambos os códigos. A Figura 4 evidencia, novamente, a compatibilidade dos códigos comparados entre si e com os resultados de referência apresentados por Ghia, Ghia e Shin (1982).

Figura 4 – Velocidade v na linha de centro horizontal da cavidade para $Re = 100$

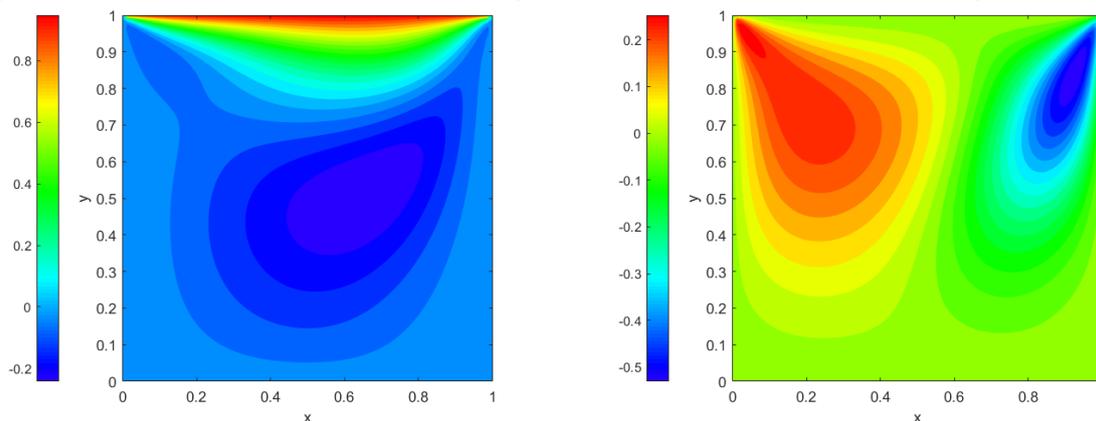


Fonte: Elaboração do autor (2023).

Expandindo o perfil de u e v para além das linhas de centro da cavidade, a Figura 5 apresenta o comportamento dessas velocidades ao longo de toda cavidade.



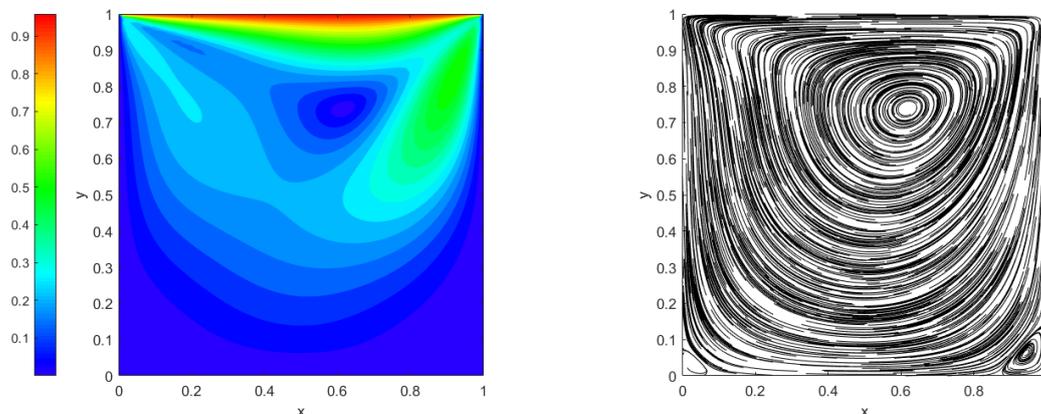
Figura 5 – Perfil das velocidades u (na esquerda) e v (na direita) na cavidade para $Re = 100$



Fonte: Elaboração do autor (2023).

A partir dos dados representados nos gráficos acima é possível mensurar o comprimento do vetor (u, v) em cada ponto da malha, gerando a magnitude da velocidade do fluido na cavidade (lado esquerdo da Figura 6).

Figura 6 – Magnitude da velocidade do fluido (na esquerda) e linhas de corrente (na direita) na cavidade para $Re = 100$



Fonte: Elaboração do autor (2023).

Verifica-se que a magnitude da velocidade é maior no topo da cavidade, onde o fluxo do fluido é conduzido pelo deslize da tampa. Após tal condução, o fluido é empurrado para a parede à direita, onde flui para baixo antes de voltar para o lado esquerdo da cavidade, perdendo, cada vez mais, a intensidade da velocidade devido à dissipação da energia. Esse movimento cria um grande vórtice próximo ao centro da cavidade – fato que pode ser evidenciado com maiores detalhes no lado direito da Figura 6.

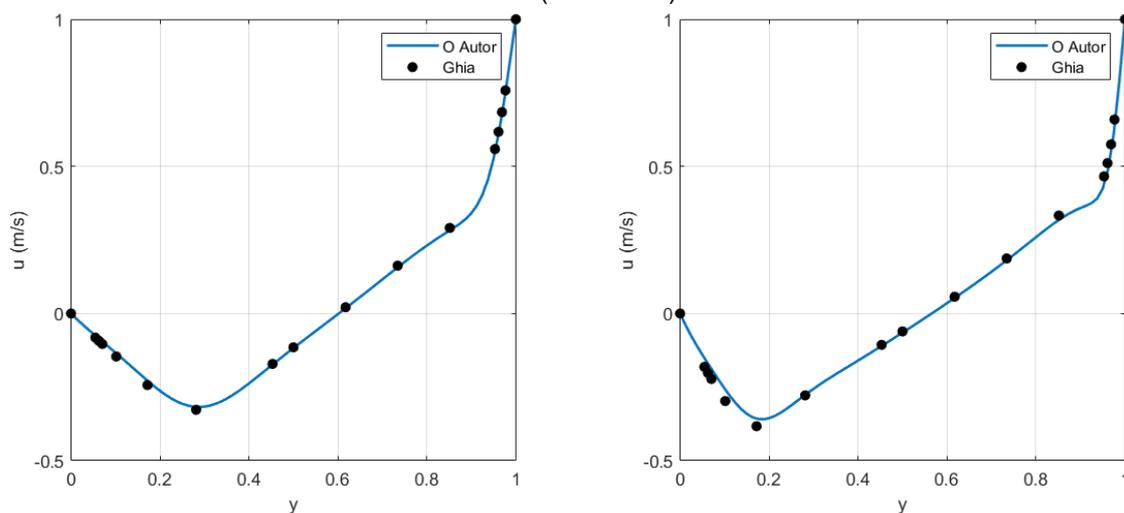


Observa-se que, além de uma grande zona de recirculação central do fluido, outras menores surgem nos cantos inferiores da cavidade. O tamanho dessas regiões, bem como a localização da zona de recirculação central, variam com o número de Reynolds do escoamento (Ghia; Ghia; Shin, 1982). Nessa perspectiva, em altos números de Reynolds espera-se um resultado mais interessante, com zonas de recirculação secundárias mais significativas se formando nos cantos da cavidade. Para verificar isso, na próxima subseção serão simulados escoamentos incompressíveis na cavidade quadrada para $Re = 400$ e $Re = 1000$.

5.2 Escoamentos com $Re = 400$ e $Re = 1000$

Assim como realizado para o caso $Re = 100$, a validação da simulação numérica de escoamentos incompressíveis na cavidade com números de Reynolds mais altos requer, inicialmente, a comparação dos dados obtidos com resultados de referência da literatura. Nesse sentido, o perfil da velocidade u na linha de centro vertical da cavidade para $Re = 400$ e $Re = 1000$ foi traçado e comparado com os dados apresentados por Ghia, Ghia e Shin (1982), como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Velocidade u na linha de centro vertical da cavidade para $Re = 400$ (na esquerda) e $Re = 1000$ (na direita)

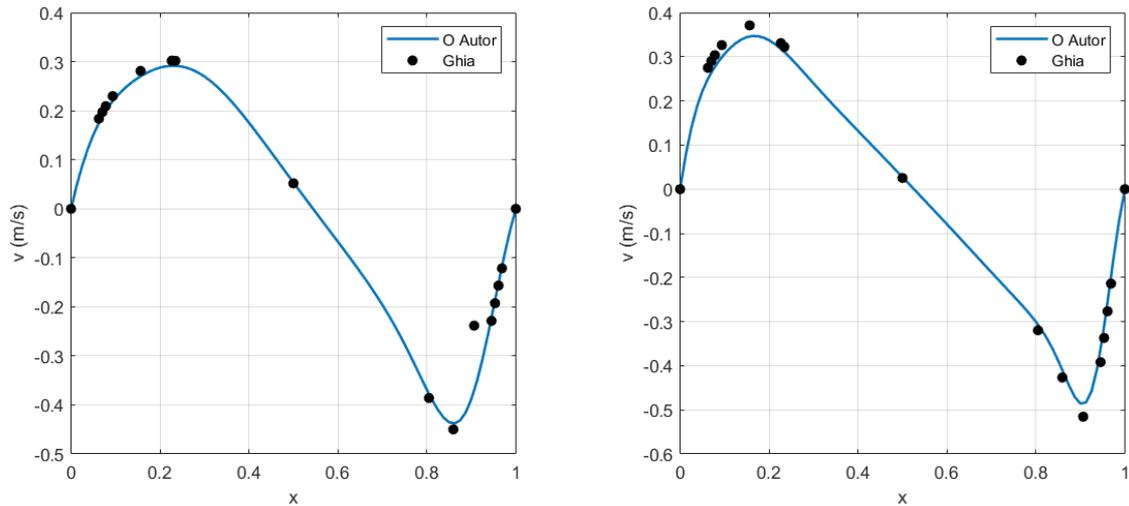


Fonte: Elaboração do autor (2023).

Apesar do aumento do número de Reynolds ter provocado um pequeno aumento na diferença entre os dados da simulação autoral e os da referência, a concordância entre esses resultados ainda mostra-se em um nível aceitável. O mesmo ocorre para o perfil da velocidade v na linha de centro horizontal da cavidade, como mostra a Figura 8.



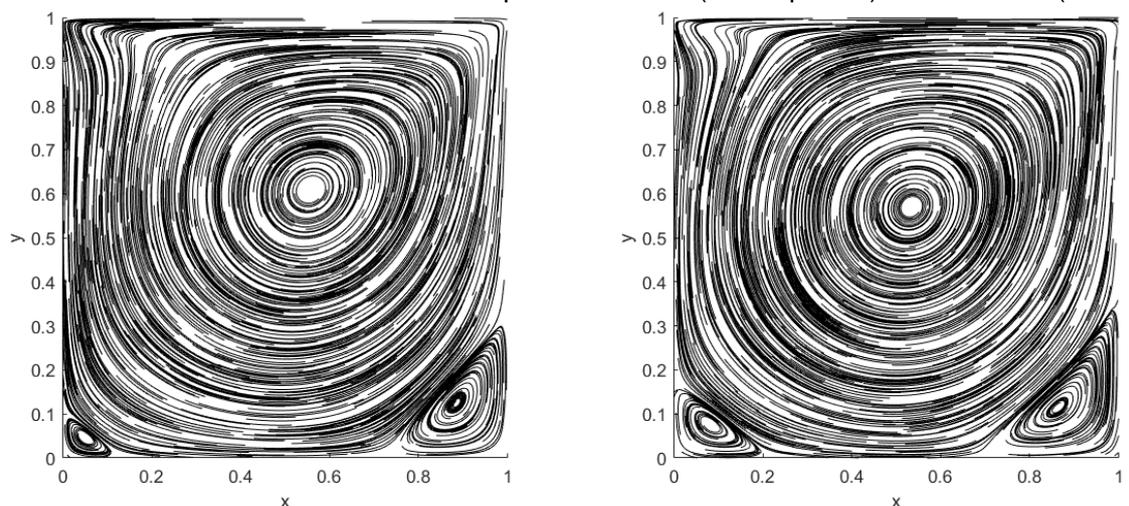
Figura 8 – Velocidade v na linha de centro horizontal da cavidade para $Re = 400$ (na esquerda) e $Re = 1000$ (na direita)



Fonte: Elaboração do autor (2023).

Além da concordância entre a simulação autoral e os dados de referência, já é possível observar que as velocidades do fluido na cavidade ficam maiores em valor absoluto com a elevação do número de Reynolds. Por consequência, a zona de recirculação principal desloca-se mais em direção ao centro da cavidade e as zonas de recirculação secundárias nos cantos da cavidade aumentam de tamanho (Figura 9). Esses comportamentos condizem com as análises de Fortuna (2000) e de Maliska (2004), que afirmam que, à medida que se aumenta o número de Reynolds, o escoamento na cavidade tende a ficar simétrico em relação ao centro.

Figura 9 – Linhas de corrente na cavidade para $Re = 400$ (na esquerda) e $Re = 1000$ (na direita)



Fonte: Elaboração do autor (2023).



Para $Re = 1000$ observa-se, ainda, o início da formação de uma quarta zona de recirculação no canto superior esquerdo da cavidade – fato evidenciado, também, nos estudos de Calixtrato, Campos e Mariano (2020).

Neste estudo, o aumento do número de Reynolds do escoamento foi ocasionado pela diminuição da viscosidade dinâmica do fluido, justificando, em partes, os comportamentos observados pelas linhas de corrente da cavidade. De modo geral, fluidos com maiores viscosidades dinâmicas resistem mais ao movimento porque sua composição molecular lhe dá muita fricção interna. Em contrapartida, fluidos com menores viscosidades dinâmicas escoam com maior facilidade porque, quando em movimento, a sua composição molecular resulta em pouco atrito.

6 Considerações Finais

A simulação numérica realizada neste estudo para o problema CQTD oportunizou importantes relações teórico-práticas inerentes à Dinâmica de Fluidos. Nesse sentido, diferentemente de grande parte dos estudos numéricos do problema CQTP já publicados na literatura, o desenvolvimento e a disponibilização de um código computacional no texto forneceu aos leitores um recurso adicional de investigação dos tópicos abordados no trabalho.

Ademais, a formulação em função corrente e vorticidade das Equações de Navier-Stokes mostrou-se um meio eficiente para a modelagem matemática do problema, uma vez que superou os empecilhos ocasionados pelo acoplamento entre os campos de velocidade e pressão originalmente presente nas equações do modelo. Os dados obtidos da resolução numérica do modelo, validados a partir de comparações com resultados de referência da literatura, evidenciaram o comportamento de escoamentos incompressíveis na cavidade com números de Reynolds até 1000. De modo geral, a trajetória do fluido foi marcada pela criação de uma grande zona de recirculação do fluido próximo ao centro da cavidade, e duas menores nos cantos inferiores cuja intensidade e tamanho depende diretamente do número de Reynolds do escoamento.

Sabe-se que para escoamentos não laminares na cavidade quadrada com tampa deslizante a complexidade do fenômeno aumenta consideravelmente. Para tanto, técnicas numéricas mais robustas precisam ser implementadas junto a malhas computacionais mais refinadas que consigam capturar o movimento de partículas do fluido que se misturam por vezes de forma caótica. Nessa



perspectiva, o desafio de simular escoamentos incompressíveis na cavidade quadrada com número de Reynolds maiores que 1000 é sugerido para trabalhos futuros.

Referências

- ABNT. Associação Brasileira de Normas Técnicas. **Norma Técnica ABNT NBR ISO 5167-1:2008**. Medição de vazão de fluidos por dispositivos de pressão diferencial, inserido em condutos forçados de seção transversal circular. Rio de Janeiro: ABNT, 2008. Disponível em: <https://www.abntcatalogo.com.br>. Acesso em: 3 mar. 2023.
- BEYA, B. B.; LILI, T. Three-dimensional incompressible flow in a two-sided non-facing lid-driven cubical cavity. **Comptes Rendus: Mécanique**, v. 336, n. 11-12, p. 863-872, 2008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2008.10.004>.
- BRUNEAU, C.-H.; SAAD, M. The 2D lid-driven cavity problem revisited. **Computers & Fluids**, v. 35, n. 3, p. 326-348, 2006. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2004.12.004>.
- BUK JUNIOR, L. **Estudo numérico do escoamento ao redor de um cilindro fixo**. Orientador: José Augusto Penteado Aranha. 2007. 67 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2007. DOI: <https://doi.org/10.11606/D.3.2007.tde-12072007-160644>.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. **Numerical Analysis**. 10. ed. Boston: Cengage Learning, 2015.
- CALIXTRATO, M. P.; CAMPOS, P. A. C.; MARIANO, F. P. Análise numérica do problema da cavidade com tampa deslizante usando o OpenFoam. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2020, evento *online*. **Anais [...]**. Recife: Even3, 2023. DOI: <https://doi.org/10.29327/142544>.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. **Mathematics of Computation**, v. 22, n. 104, p. 745–762, 1968. DOI: <https://doi.org/10.2307/2004575>.
- CHORIN, A. J. The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 73, n. 6, p. 928-931, 1967. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11853-6>.
- BORTOLI, Á. L. de. **Introdução à Dinâmica de Fluidos Computacional**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2000.
- FORTUNA, A. de O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, n. 3, p. 387-411, 1982. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4).
- GRIEBEL, M.; DORNSHEIFER, T.; NEUNHOEFFER, T. **Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction**. Philadelphia: SIAM, 1997.



GUPTA, M. M.; KALITA, J. C. A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: streamfunction-velocity formulation. **Journal of Computational Physics**, v. 207, n. 1, p. 52-68, 2005. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.01.002>.

HERNÁNDEZ, J. E. R.; MARTINS, S. B. C.; BARROS, A. M.; SPHAIER, S. H. Estudo comparativo de diferentes métodos de desacoplamento pressão-velocidade nas equações de Navier-Stokes. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 15., 1999, Águas de Lindóia. **Anais [...]**. São Paulo: ACBM, 1999. Disponível em: <https://www.abcm.org.br/anais/cobem/1999/pdf/Aacjfb.pdf>. Acesso em: 21. mar. 2024.

HOU, S.; ZOU Q.; CHEN, S.; DOOLEN, G.; COGLEY, A. C. Simulation of cavity flow by the Lattice Boltzmann method. **Journal of Computational Physics**, v. 118, n. 2, p. 329-347, 1995. DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1995.1103>.

JUUJÄRVI, H.; KINNUNEN, I. **Lid driven cavity flow using stencil-based numerical methods**. Uppsala, Suécia: UPPSALA Universitet, 2022. Disponível em: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1668016/FULLTEXT01.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2023.

KOSEFF, J. R.; STREET, R. L. On End Wall Effects in a Lid-Driven Cavity Flow. **Journal of Fluids Engineering**, v. 106, n. 4, p. 385-389, 1984. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3243135>.

KOSEFF, J. R.; STREET, R. L. The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observations. **Journal of Fluids Engineering**, v. 106, n. 4, p. 390-398, 1984. DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.3243136>.

KOSEFF, J. R.; STREET, R. L. Visualization Studies of a Shear Driven Three-Dimensional Recirculating Flow. **Journal of Fluids Engineering**, v. 106, n. 4, p. 21-27, 1984. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3242393>.

LIBERZON, A.; FELDMAN, Y.; GELFGAT, A. Y. Experimental observation of the steady-oscillatory transition in a cubic lid-driven cavity. **Physics of Fluids**, v. 23, n. 8, p. 084106-1–084106-7, 2011. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3625412>.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2. ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 2004.

MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 31, n. 3, p. 186-198, 2009. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/s1678-58782009000300004>.

MARTINS, A. M. **Análise da qualidade de tensões obtidas na simulação de escoamentos de fluidos viscoelásticos usando a formulação log-conformação**. Orientador: Nilo Sérgio Medeiros Cardozo. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/156814>. Acesso em: 28 fev. 2024.

NAVIER, C. L. M. H. Mémoire sur les lois du Mouvement des Fluides. **Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France**, v. 6, p. 389-440, 1827.

POISSON, S. D. Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides. **Journal de L'Ecole Polytechnique**, v. 13, p. 1-174, 1831.



PRASAD, A. K.; KOSEFF, J. R. Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. **Physics of Fluids A**, v. 1, n. 2, p. 208–218, 1989. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.857491>.

SEIBOLD, B. **A compact and fast Matlab code solving the incompressible Navier-Stokes equations on rectangular domains**. Massachusetts Institute of Technology, 2008. Disponível em: https://math.mit.edu/~gs/cse/codes/mit18086_navierstokes.pdf. Acesso em: 15 set. 2022.

SEIBT, F. M.; RAZERA, A. L.; VARELA, D. J. C.; FONSECA, R. J. C.; ROCHA, L. A. O.; DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A. Constructal design de uma aleta triangular inserida em uma cavidade de placa superior móvel com escoamento por convecção mista. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, v. 2, n. 32, p. 72-84, 2016. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/ripe/article/view/14426>. Acesso em: 21 mar. 2024.

STOKES, G. G. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, v. 8, p. 287-319, 1845.

VANKA, S. P. Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables. **Journal of Computational Physics**, v. 65, n. 1, p. 138-158, 1986. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90008-2](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(86)90008-2).

WANG, J.; WAN, D. Parallel Simulation of 3D Lid-driven Cubic Cavity Flows by Finite Element Method. *In*: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 21., 2011, Maui, Hawaii, USA. **Anais [...]**. Mountain View: International Society of Offshore and Polar Engineers, 2011. p. 644-651. Disponível em: <https://dcwan.sjtu.edu.cn/userfiles/ISOPE-I-11-019.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2024.

ZDANSKI, P. S. B.; ORTEGA, M. A.; FICO JR., N. G. C. R. Numerical study of the flow over shallow cavities. **Computers & Fluids**, v. 32, n. 7, p. 953-974, 2003. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/s0045-7930\(02\)00067-1](http://dx.doi.org/10.1016/s0045-7930(02)00067-1).

ZHANG, J. Numerical simulation of 2D square driven cavity using fourth-order compact finite difference schemes. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 45, n. 1-3, p. 43-52, 2003. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/s0898-1221\(03\)80006-8](http://dx.doi.org/10.1016/s0898-1221(03)80006-8).

Agradecimentos

Esta pesquisa foi desenvolvida na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. O autor agradece à referida instituição, pelo suporte acadêmico ofertado, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro oriundo do processo nº 141504/2021-8.

