

Uma versão espacial do modelo de crescimento econômico AK

A spatial version of the AK model of economic growth

Una versión espacial del modelo de crecimiento económico AK

João Plínio Juchem Neto¹

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil



<https://orcid.org/0000-0002-7640-6539>



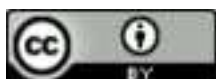
<http://lattes.cnpq.br/4722086991853309>

Resumo: Neste trabalho propomos uma generalização espacial do modelo de crescimento econômico AK em uma dimensão espacial, o qual é descrito matematicamente por uma equação diferencial parcial parabólica linear para o capital *per capita* da economia, com as correspondentes condições iniciais e de contorno. Obtemos soluções em série de Fourier para o modelo considerando condições de contorno de Dirichlet homogêneas, de Neumann homogêneas e mistas homogêneas, e apresentamos exemplos numéricos do modelo. Mostramos que o modelo com condições de Neumann homogêneas constitui generalização espacial natural do modelo AK não-espacial. Além disso, encontramos valores críticos mínimos para a taxa de poupança da economia, de forma a garantir o crescimento persistente do capital *per capita* no longo prazo, com as condições de Neumann homogêneas apresentando o menor valor, independente do tamanho geográfico da economia, seguido das condições do tipo mistas e Dirichlet homogêneas, com o valor mínimo dependendo inversamente do tamanho geográfico da economia nestes dois últimos casos. Por fim, o modelo AK espacial aqui proposto constitui exemplo interessante de aplicação de equações diferenciais parciais na área de Economia.

Palavras-chave: modelo AK espacial; equações diferenciais parciais; Séries de Fourier; crescimento econômico; ecologia matemática.

Abstract: In this work, we propose a unidimensional spatial generalization of the AK model of economic growth, which is mathematically described by a parabolic linear partial differential equation for the *per capita* capital of the economy, with corresponding initial and boundary conditions. We obtain Fourier series solutions for the model, considering homogeneous Dirichlet, homogeneous Neumann, and homogenous mixed boundary conditions, and present numerical examples of the model. We show that the model with homogeneous Neumann boundary conditions is a natural spatial generalization for the non-spatial AK model. Besides, we

¹ **Currículo sucinto:** Bacharel em Ciências Econômicas, mestre e doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Professor no Departamento de Economia e Relações Internacionais e no Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Contribuição de autoria:** Administração do Projeto, Análise Formal, Conceituação, Curadoria de Dados, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Investigação, Metodologia, Recursos, Software, Supervisão, Validação e Visualização. **Contato:** plinio.juchem@ufrgs.br.



find minimum critical values for the saving rate of the economy that guarantee persistent growth of the *per capita* capital in the long run, with homogeneous Neumann conditions presenting the lowest value, regardless of the geographical size of the economy, followed by mixed and homogeneous Dirichlet-type conditions, with the minimum value inversely depending on the geographic size of the economy in these last two cases. Finally, the spatial AK model proposed here is an interesting example of application of partial differential equation in the field of Economics.

Keywords: spatial AK model; partial differential equations; Fourier Series; economic growth; mathematical ecology.

Resumen: En este trabajo proponemos una generalización espacial del modelo de crecimiento económico AK en una dimensión espacial, que se describe matemáticamente mediante una ecuación diferencial parcial parabólica lineal para el capital *per capita* de la economía, con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Obtenemos soluciones en series de Fourier para el modelo considerando condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas, de Neumann homogéneas y mixtas homogéneas, y presentamos ejemplos numéricos del modelo. Mostramos que el modelo con condiciones de Neumann homogéneas constituye una generalización espacial natural del modelo AK no espacial. Además, encontramos valores críticos mínimos para la tasa de ahorro de la economía, a fin de garantizar el crecimiento persistente del capital *per capita* a largo plazo, siendo las condiciones de Neumann homogéneas las que presentan el valor más bajo, independientemente del tamaño geográfico de la economía, seguido de condiciones mixtas y de Dirichlet homogéneas, siendo el valor mínimo inversamente dependiente del tamaño geográfico de la economía en estos dos últimos casos. Finalmente, el modelo espacial AK propuesto aquí es un ejemplo interesante de la aplicación de ecuaciones diferenciales parciales en Economía.

Palabras clave: modelo AK espacial; ecuaciones diferenciales parciales; Series de Fourier; crecimiento económico; ecología matemática.

Data de submissão: 9 de maio de 2023.

Data de aprovação: 15 de agosto de 2023.

1 Introdução

O modelo de crescimento econômico AK é o modelo mais simples encontrado na literatura econômica a apresentar, endogenamente, crescimento persistente do capital *per capita* da economia no longo prazo. Esse resultado é obtido por meio do uso de uma função de produção linear, que associada com um crescimento exponencial, ou Malthusiano, da força de trabalho, resulta em uma equação diferencial ordinária linear governando a evolução temporal do capital *per capita* da



economia, cuja solução é uma exponencial crescente, desde que a taxa de poupança da economia seja grande o suficiente (Jones, 2000; Barro; Sala-i-Martin, 2004). Tal resultado contrasta com o do modelo de crescimento de Solow-Swan, proposto de forma independente por Solow (1956) e Swan(1956), que, ao considerar uma função de produção não linear do tipo de Cobb-Douglas (Cobb; Douglas, 1928), só é capaz de apresentar crescimento do capital *per capita* no longo prazo se for adicionado progresso técnico exogenamente no modelo (Jones, 2000; Barro; Sala-i-Martin, 2004).

O modelo de Solow-Swan não-espacial já foi objeto de generalizações espaciais, considerando movimentação espacial difusiva do capital e/ou trabalhadores pela economia (Camacho; Zou, 2004; Brito, 2005) e mesmo, adicionalmente, movimentação advectiva não linear de trabalhadores (Juchem Neto; Claeysen, 2015). Quanto ao modelo AK, as generalizações espaciais difusivas propostas até o momento foram consideradas apenas dentro de problemas mais gerais de controle ótimo visando maximizar uma função de utilidade social (Boucekkine; Camacho; Fabbri, 2013; Ballestra, 2016; Boucekkine *et al.*, 2019; Hu; Lai, 2021), em que não foi realizada a análise de uma generalização espacial mais direta do modelo AK não-espacial, sem considerar processos de otimização (Jones, 2000; Barro; Sala-i-Martin, 2004).

Considerando esse contexto, neste artigo propomos uma generalização espacial unidimensional do modelo AK, em um intervalo de tamanho finito, considerando uma economia com mão de obra constante, em que o capital se movimenta difusivamente de regiões onde é mais abundante para regiões onde é menos abundante no interior da economia. Matematicamente, o modelo proposto é descrito por uma equação diferencial parcial parabólica linear, apresentando termos reativo e difusivo, associada a uma condição inicial e duas condições de contorno na fronteira do intervalo. Aqui, consideraremos três tipos de condições de contorno: condições de contorno de Dirichlet homogêneas, representando o caso em que a economia é circundada por territórios hostis que roubam ou destroem o capital que chega na fronteira; condições de contorno de Neumann homogêneas, onde a economia espacial é uma autarquia, com nenhum capital podendo passar pela sua fronteira com o exterior (caso que argumentamos ser a generalização espacial natural do modelo AK tradicional não-espacial); e condições de contorno mistas homogêneas, onde nenhum capital pode passar pela fronteira esquerda e onde todo capital que chega na fronteira direita é roubado ou destruído por um vizinho hostil.

É interessante observar que o modelo AK espacial aqui proposto, quando associado a condições de contorno de Dirichlet homogêneas, apresenta a mesma estrutura matemática do modelo KISS da área de Ecologia Matemática (Murray, 2002; Kot, 2003), o qual foi proposto por Skellam



(1951) e Kierstead e Slobodkin (1953) na modelagem de florescimento de fitoplâncton. Dessa forma, o presente artigo, ao apresentar caráter multidisciplinar envolvendo as áreas de Economia, Ecologia e Matemática, busca contribuir para a concepção de que o diálogo entre áreas, ao instigar a livre troca de ideias, pressupostos e métodos, pode trazer resultados positivos a todas elas. Em particular, o modelo econômico aqui proposto pode constituir exemplo adicional aos encontrados em livros textos sobre equações diferenciais, tais como Boyce e DiPrima (2010) e Zill e Cullen (2014), a ser considerado em cursos introdutórios de equações diferenciais, quando abordam a equação do calor unidimensional em domínio limitado e suas soluções em série de Fourier.

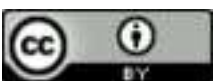
O presente artigo está estruturado da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos o modelo AK tradicional, não-espacial, assim como sua solução; na Seção 3 propomos uma generalização espacial para o modelo AK e obtemos soluções em série de Fourier para condições de contorno Dirichlet, Neumann e mistas homogêneas, assim como valores críticos mínimos para o tamanho geográfico e a taxa de poupança da economia, de forma a garantir crescimento persistente do capital *per capita* no longo prazo; na Seção 4 apresentamos alguns exemplos numéricos do modelo espacial proposto, utilizando o software MATLAB (Chapra, 2013); e finalmente, na Seção 5, apresentamos nossas considerações finais.

2 Modelo AK não-espacial

O modelo AK não-espacial, usualmente encontrado na literatura econômica, descreve a evolução temporal do capital *per capita* agregado de uma economia, $k(t)$, considerando uma função de produção linear, $Y(t) = AK(t)$, onde $Y(t)$ é a quantidade produzida do produto final agregado da economia no tempo $t > 0$, $K(t)$ é o estoque de capital agregado no mesmo instante de tempo e $A > 0$ é um parâmetro tecnológico constante. Supondo que o capital se deprecia a uma taxa constante $\delta \in (0, 1)$, temos que a taxa de variação temporal do estoque de capital da economia, \dot{K} , será igual ao investimento líquido:

$$\dot{K} = sAK - \delta K = (sA - \delta)K, \quad K(0) = K_0 > 0, \quad (1)$$

sendo $s \in (0, 1)$ a taxa de poupança constante da economia, sAK o investimento bruto, δK a quantidade de capital depreciado no tempo t e $K_0 > 0$ o estoque de capital inicial. Por outro lado, o modelo considera que a mão de obra plenamente empregada na economia, $L(t)$, cresce a uma taxa



constante $\alpha \in (0, 1)$, conforme a equação:

$$\dot{L} = \alpha L, L(0) = L_0 > 0, \tag{2}$$

sendo $L_0 > 0$ a quantidade de trabalhadores inicial.

Definindo o capital *per capita* agregado da economia como $k = \frac{K}{L}$, podemos reescrever o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares dado por (1)-(2) como uma única EDO linear:

$$\dot{k} = [sA - (\alpha + \delta)]k, k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0} > 0, \tag{3}$$

cuja solução é dada pela função exponencial:

$$k(t) = k_0 e^{[sA - (\alpha + \delta)]t}. \tag{4}$$

Desta forma, para o caso em que $s > \frac{\alpha + \delta}{A}$, *i.e.*, quando a taxa de poupança for grande o suficiente, temos que o capital *per capita* agregado da economia irá apresentar crescimento exponencial persistente ao longo do tempo à taxa constante $sA - (\alpha + \delta) > 0$. Note que o mesmo ocorrerá com o produto *per capita* agregado, $y = Ak$, e com o consumo *per capita* agregado, $c = (1 - s)y = (1 - s)Ak$, da economia. Caso $s = \frac{\alpha + \delta}{A}$, então essas variáveis permanecerão constantes ao longo do tempo, e a economia permanecerá estagnada. Por fim, se a taxa de poupança da economia for muito baixa, *i.e.*, $s < \frac{\alpha + \delta}{A}$, essas variáveis tenderão assintoticamente a zero, tendo como consequência o colapso da economia no longo prazo.

3 Modelo AK espacial

Aqui propomos uma generalização espacial do modelo AK apresentado na Seção 2. Consideramos que a economia espacial de tamanho geográfico $l > 0$ existe em um intervalo compacto da reta, $\Omega = [0, l] \subset \mathbb{R}$, que a distribuição de mão de obra é espacialmente homogênea e constante, $L(x, t) = L_0 > 0, \forall(x, t)$ ¹, e que o capital tende a se mover de localidades onde é mais abundante para localidades vizinhas onde é menos abundante. Sem perda de generalidade, podemos considerar $L_0 = 1$. Assim, temos que $k(x, t) = K(x, t)$ e a equação governando a evolução da densidade do capital *per capita* da economia, $k(x, t) \geq 0$, é dada pela seguinte equação diferencial parcial (EDP)

¹No modelo AK não-espacial, este caso ocorre quando a taxa de crescimento da mão de obra é nula, $\alpha = 0$.



linear com termos de reação e difusão:

$$\begin{aligned} k_t &= (sA - \delta)k + dk_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ k(x, 0) &= k_0(x) \geq 0, \quad x \in [0, l] \end{aligned} \tag{5}$$

onde $d > 0$ é o parâmetro difusivo do capital (quanto maior for o valor de d , mais rapidamente o capital se move de regiões onde é abundante, para regiões onde é mais escasso) e $k_0(x)$ é a distribuição inicial da densidade de capital *per capita* da economia. Como os parâmetros s , A , δ e d são constantes, neste modelo o espaço é considerado homogêneo.

Para completar o modelo, ainda é necessário preescrever as condições de contorno na fronteira $\partial\Omega = \{0, l\}$ para o problema (5). Neste artigo iremos apresentar a solução da equação (5) considerando três tipos de condições de contorno homogêneas: condições de contorno de Dirichlet homogêneas, $k(0, t) = k(l, t) = 0, \forall t \geq 0$, representando o caso em que a economia é circundada por territórios hostis que roubam ou destroem o capital que chega na fronteira; condições de contorno de Neumann homogêneas, $k_x(0, t) = k_x(l, t) = 0, \forall t \geq 0$, onde a economia espacial é uma autarquia, com nenhum capital podendo passar pela sua fronteira com o exterior; e condições de contorno mistas homogêneas, onde nenhum capital pode passar pela fronteira esquerda, $k_x(0, t) = 0, \forall t \geq 0$, e onde todo capital que chega na fronteira direita é roubado ou destruído, $k(l, t) = 0, \forall t \geq 0$.

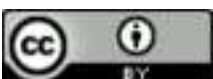
Antes de prosseguirmos, vamos reescrever o problema (5) em uma forma mais simples. Seguindo Kot (2003), supomos que a solução da EDP (5) é da forma:

$$k(x, t) = e^{(sA - \delta)t} u(x, t). \tag{6}$$

Derivando parcialmente (6) e substituindo na equação (5), obtemos a equação do calor unidimensional em u :

$$\begin{aligned} u_t &= du_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= k_0(x), \quad x \in [0, l] \end{aligned} \tag{7}$$

sendo que as condições de contorno correspondentes aos três cenários acima podem ser reescritas, em termos da função u , como: Dirichlet homogêneas $u(0, t) = u(l, t) = 0, \forall t \geq 0$; Neumann homogêneas $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \forall t \geq 0$; e mistas homogêneas $u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \forall t \geq 0$.



3.1 Solução para condições de contorno de Dirichlet homogêneas

O modelo AK espacial com condições de contorno de Dirichlet homogêneas é dado por:

$$\begin{aligned} k_t &= (sA - \delta)k + dk_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ k(x, 0) &= k_0(x) \geq 0, \quad x \in [0, l] \\ k(0, t) &= k(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Este modelo é análogo ao modelo proposto por Skellam (1951) e Kierstead e Slobodkin (1953) – usualmente conhecido como modelo KISS – na área de Ecologia Matemática para modelar o florescimento de fitoplâncton (Kot, 2003). Como observado acima, supondo $k(x, t) = e^{(sA-\delta)t}u(x, t)$, podemos reescrever (8) como o seguinte problema de valor inicial e de contorno envolvendo a equação do calor em uma barra finita:

$$\begin{aligned} u_t &= du_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= k_0(x) \geq 0, \quad x \in [0, l] \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

cuja solução em série de Fourier, obtida via método de separação de variáveis, é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-d\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

e assim:

$$k(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{[sA-\delta-d\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2]t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{10}$$

sendo os coeficientes A_n dados pela condição inicial do problema pela da integral:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l k_0(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{11}$$

A resolução detalhada deste problema pode ser encontrada em Figueiredo (1997), Kot (2003) e Farlow (2016), por exemplo.

O capital *per capita* espacialmente agregado da economia no instante t , $k_a(t)$, pode ser obtido integrando (10) em relação à variável espacial x , no intervalo $\Omega = [0, l]$:

$$k_a(t) = \int_0^l k(x, t) dx = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1 - (-1)^n}{n}\right) e^{[sA-\delta-d\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2]t}, \tag{12}$$

onde os coeficientes A_n também são dados por (11).

Neste modelo há duas forças opostas interagindo: por um lado, o movimento difusivo faz com que o capital que chega à fronteira da economia seja destruído, assim como a depreciação



econômica do capital à taxa δ faz o capital desaparecer; por outro, há reprodução e crescimento do capital *per capita* no interior da economia à taxa sA . Desta forma podemos nos perguntar qual é a condição sobre os parâmetros do modelo que garante que esta economia apresentará crescimento econômico persistente no longo prazo. A resposta a essa pergunta pode ser encontrada analisando o sinal do coeficiente que multiplica t na exponencial em (12). Se tal coeficiente for positivo para $n = 1$, então haverá crescimento da economia, e isto ocorrerá quando:

$$sA - \delta - d \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 > 0,$$

o que implica na seguinte inequação:

$$sA > \delta + d \left(\frac{\pi}{l}\right)^2. \tag{13}$$

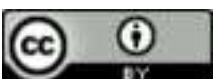
A condição (13) nos diz que, se os parâmetros que reforçam o crescimento do capital na economia (taxa de poupança, s , fator tecnológico, A , e tamanho geográfico, l) forem grandes em comparação com os parâmetros relacionados com a destruição do capital (coeficiente de difusão, d , e taxa de depreciação do capital, δ), então haverá crescimento do capital *per capita* no interior da economia.

No contexto econômico do presente artigo é pertinente perguntar se há um tamanho mínimo de território a garantir a sobrevivência da economia, no caso excepcional em que a economia espacial sob análise está enfrentando disputa territorial com guerra em sua fronteira. Por exemplo, se vizinhos hostis invadem seu território e destroem o capital existente próximo à fronteira, isso implica em uma diminuição no tamanho l da economia, o que tende a diminuir o crescimento do capital *per capita* agregado, impactando negativamente, desta forma, sua economia (Auray; Eyquem; Jouneau-Sion, 2014; Feigenbaum; Lee; Mezzanotti, 2022). Sendo assim, se a economia espacial enfrentar uma diminuição drástica de seu território, isso pode causar o seu colapso econômico? Mais precisamente, isolando l em (13), temos que a economia crescerá se:

$$l > \pi \sqrt{\frac{d}{sA - \delta}} = l_c. \tag{14}$$

Ou seja, se a economia espacial ver seu território ficar menor do que o tamanho crítico $l_c = \pi \sqrt{\frac{d}{sA - \delta}}$, *ceteris paribus*, então apresentará colapso econômico, o que dará vantagem significativa às forças inimigas. Se seu tamanho ficar igual a l_c , então seu capital *per capita* permanecerá constante. Em suma:

$$\text{se } l \begin{cases} > l_c, \text{ então } k_a \text{ crescerá.} \\ = l_c, \text{ então } k_a \text{ permanecerá constante.} \\ < l_c, \text{ então } k_a \text{ tenderá a zero.} \end{cases} \tag{15}$$



Em um cenário de normalidade, onde a fronteira da economia espacial está consolidada e l é constante, podemos isolar a taxa de poupança na condição (13), parâmetro econômico no qual governos têm certo controle. Neste caso, k_a crescerá se:

$$s > \frac{1}{A} \left[\delta + d \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right] = s_c. \tag{16}$$

Ou seja, dados os outros parâmetros fixos, a taxa de poupança da economia deve ser maior do que a taxa de poupança crítica definida em (16), s_c , a fim de que o capital *per capita* cresça. Note que, para que a condição (16) seja válida, é necessário considerarmos que os parâmetros do modelo impliquem em $s_c < 1$. Resumindo para todos os casos que podem ocorrer:

$$\text{se } s \begin{cases} > s_c, \text{ então } k_a \text{ crescerá.} \\ = s_c, \text{ então } k_a \text{ permanecerá constante.} \\ < s_c, \text{ então } k_a \text{ tenderá a zero.} \end{cases} \tag{17}$$

No caso em que $s = s_c$, por (10) temos que a economia convergirá para o seguinte equilíbrio espacialmente não-homogêneo estático no longo prazo, i.e., quando $t \rightarrow \infty$:

$$k^\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(x, t) = A_1 \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l} \right). \tag{18}$$

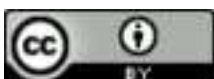
Aqui utilizamos a notação $k^\infty(x)$ para denotar a distribuição espacial do capital *per capita* no longo prazo. Note que (18) apresenta o maior nível de capital *per capita* exatamente no centro da economia espacial, em $x = \frac{l}{2}$. Além disso, o capital *per capita* espacialmente agregado da economia (12) convergirá para o seguinte valor constante no longo prazo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_a(t) = \frac{2l}{\pi} A_1 = k_a^\infty, \tag{19}$$

onde utilizamos a notação k_a^∞ para denotar o valor do capital *per capita* espacialmente agregado que a economia consegue atingir no longo prazo, sendo o coeficiente A_1 dado por (11).

3.2 Solução para condições de contorno de Neumann homogêneas

O modelo AK espacial com condições de contorno de Neumann homogêneas representa uma economia autárquica na qual nenhum capital entra ou sai dela pela fronteira $\partial\Omega$, de forma que neste caso o capital só desaparece devido à sua depreciação econômica natural à taxa δ . Tal formulação para as condições de contorno já foram utilizadas na versão espacial do modelo de



Solow-Swan (Juchem Neto; Claeysen, 2015). Matematicamente temos que o modelo AK espacial com condições de contorno de Neumann homogêneas é dado por:

$$\begin{cases} k_t = (sA - \delta)k + dk_{xx}, & x \in (0, l), t > 0 \\ k(x, 0) = k_0(x) \geq 0, & x \in [0, l] \\ k_x(0, t) = k_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{k = e^{(sA-\delta)t}u} \begin{cases} u_t = du_{xx}, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = k_0(x) \geq 0, & x \in [0, l] \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

A resolução deste problema por separação de variáveis, que pode ser encontrada em Figueiredo (1997) e Boyce e DiPrima (2010), é dada por:

$$k(x, t) = \frac{A_0}{2} e^{(sA-\delta)t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{[sA-\delta-d(\frac{n\pi}{l})^2]t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (21)$$

sendo:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{l} \int_0^l k_0(x) dx = \overline{k_0(x)}, \quad (22)$$

onde $\overline{k_0(x)}$ é o valor médio da distribuição inicial de capital *per capita* em $\Omega = [0, l]$, sendo os coeficientes $A_n, n = 1, 2, 3, \dots$, dados por:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l k_0(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Como $\int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0$, o capital *per capita* espacialmente agregado da economia no instante t , $k_a(t)$, é dado por:

$$k_a(t) = \int_0^l k(x, t) dx = l \overline{k_0(x)} e^{(sA-\delta)t}. \quad (24)$$

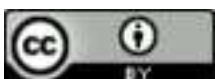
Neste caso em que temos condições de contorno Neumann homogêneas, basta que $sA - \delta > 0$ a fim de garantir que este modelo apresente crescimento do capital *per capita* agregado da economia, desde que a distribuição inicial $k_0(x)$ tenha valor médio positivo, independente do valor dos outros parâmetros do modelo, já que aqui o capital não é destruído na fronteira da economia. Sendo assim, o primeiro termo do lado direito da equação (21) se torna dominante para tempos muito grandes:

$$k(x, t) \sim \overline{k_0(x)} e^{(sA-\delta)t}, \quad \text{para } t \gg 1. \quad (25)$$

Ou seja, no longo prazo todas as localidades da economia espacial tendem ao mesmo nível de capital *per capita*, sendo este sempre crescente.

Caso $sA - \delta = 0$, então temos que a economia converge para o seguinte equilíbrio espacialmente homogêneo e estático:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(x, t) = \overline{k_0(x)}, \quad (26)$$



e todas as localidades da economia espacial ficam estagnadas no mesmo nível constante de capital *per capita* médio inicial $\overline{k_0(x)}$.

Já se $sA - \delta < 0$, então a economia espacial colapsa como um todo no longo prazo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(x, t) = 0. \tag{27}$$

Em suma, definindo a taxa de poupança crítica \hat{s}_c , neste caso independente do tamanho geográfico da economia, l :

$$\hat{s}_c = \frac{\delta}{A} < s_c, \tag{28}$$

podemos ter os seguintes comportamentos para o capital *per capita* agregado:

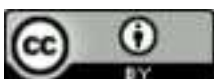
$$\text{se } s \begin{cases} > \hat{s}_c, \text{ então } k_a \text{ crescerá.} \\ = \hat{s}_c, \text{ então } k_a \text{ permanecerá constante.} \\ < \hat{s}_c, \text{ então } k_a \text{ tenderá a zero.} \end{cases} \tag{29}$$

Considerando todos os casos para o valor de $sA - \delta$, podemos concluir que condições de contorno Neumann homogêneas eliminam, no longo prazo, qualquer desigualdade na distribuição de capital *per capita* inicial da economia, fazendo todas as localidades $x \in \Omega$ da economia espacial convergirem para o mesmo nível de capital *per capita*.

Observação: Os resultados (25), (26) e (27) são consistentes com a solução do modelo AK não-espacial (4), considerando $\alpha = 0$ e $k_0 = \overline{lk_0(x)}$. De fato, se considerarmos a condição inicial do modelo espacial, $k_0(x)$, de tal forma que $\overline{k_0(x)} = \frac{k_0}{l}$, temos que a solução para o capital *per capita* agregado implicado por este modelo espacial, (24), é igual à solução do modelo AK não-espacial (4). Assim, o modelo AK espacial com condições de contorno de Neumann homogêneas analisado nesta seção pode ser considerado uma generalização espacial natural para o modelo AK não-espacial apresentado na Seção 2.

3.3 Solução para condições de contorno mistas homogêneas

Este último cenário é uma combinação das condições de contorno utilizadas nos dois casos anteriores, no qual a fronteira esquerda da economia espacial é isolada do mundo exterior, com nenhum capital podendo cruzá-la, $k_x(0, t) = 0, \forall t \geq 0$, e a fronteira direita delimita a economia de um vizinho hostil, com todo capital chegando lá sendo destruído, $k(l, t) = 0, \forall t \geq 0$. Tal modelo



pode então ser escrito como:

$$\begin{cases} k_t = \gamma k + dk_{xx}, & x \in (0, l), t > 0 \\ k(x, 0) = k_0(x) \geq 0, & x \in [0, l] \\ k_x(0, t) = k_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{k = e^{(sA-\delta)t}u} \begin{cases} u_t = du_{xx}, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = k_0(x) \geq 0, & x \in [0, l] \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (30)$$

cuja solução, que pode ser obtida seguindo Figueiredo (1997), é dada por:

$$k(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\left[sA - \delta - d \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} \right)^2 \right] t} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right), \quad (31)$$

com os coeficientes:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l k_0(x) \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

Logo, esta solução implica no seguinte capital *per capita* espacialmente agregado da economia no instante t , $k_a(t)$:

$$k_a(t) = \int_0^l k(x, t) dx = \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right) e^{\left[sA - \delta - d \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} \right)^2 \right] t}. \quad (33)$$

Desta forma, a fim de garantir o crescimento do capital *per capita* agregado da economia, temos que ter:

$$sA > \delta + d \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2, \quad (34)$$

condição que implica nos seguintes valores críticos para o tamanho geográfico da economia, \tilde{l}_c , e taxa de poupança, \tilde{s}_c :

$$\tilde{l}_c = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{sA - \delta}} = \frac{l_c}{2} < l_c, \quad (35)$$

$$\hat{s}_c < \tilde{s}_c = \frac{1}{A} \left[\delta + d \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \right] < s_c. \quad (36)$$

Ambos os valores críticos, \tilde{l}_c e \tilde{s}_c , são menores do que os obtidos quando consideramos condições de Dirichlet homogêneas em ambos extremos de Ω , l_c e s_c , o que é consistente com o fato de que no presente caso o capital é destruído apenas em uma das fronteiras da economia, e não nas duas, como nas condições Dirichlet homogêneas consideradas na Seção 3.1. Trocando l_c e s_c por \tilde{l}_c e \tilde{s}_c em (14) e (16), respectivamente, obtemos conclusões análogas em relação ao crescimento ou não da economia no longo prazo.

Note que a equação (36) nos diz que $\hat{s}_c < \tilde{s}_c < s_c$, ou seja, é mais fácil – no sentido de requerer uma menor taxa de poupança – obter crescimento econômico persistente da economia



para condições de Neumann homogêneas do que de mistas homogêneas e Dirichlet homogêneas, respectivamente.

No caso em que $s = \tilde{s}_c$, por (31) temos que a economia convergirá para o seguinte equilíbrio espacialmente não-homogêneo estático no longo prazo, $k^\infty(x)$:

$$k^\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(x, t) = A_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right), \tag{37}$$

com o maior nível de capital *per capita* ocorrendo na fronteira isolada, em $x = 0$. Por sua vez, o capital *per capita* espacialmente agregado da economia $k_a(t)$ (33) convergirá para o seguinte valor constante quando $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_a(t) = \frac{2l}{\pi} A_1 = k_a^\infty, \tag{38}$$

onde aqui o A_1 é dado por (32).

Observação: Para todo $\epsilon > 0$, as soluções na forma de séries de Fourier obtidas para os três problemas acima, (10)-(12), (21)-(23) e (31)-(33), convergem uniformemente em $\Omega \times [\epsilon, \infty)$, desde que a distribuição inicial de capital *per capita*, $k_0(x)$, seja contínua por partes com derivada também contínua por partes em $\Omega = [0, l]$, tal que $k_0(x) = \frac{k_0(x^-) + k_0(x^+)}{2}$, $\forall x \in \text{int } \Omega$. Ou seja, o modelo proposto, ao utilizar uma EDP parabólica em sua formulação matemática, suaviza instantaneamente eventuais descontinuidades presentes na condição inicial $k_0(x)$, conforme Lório (2001). Tal comportamento suavizador decorrente do processo difusivo pode ser justificado economicamente da seguinte forma: o capital possui a tendência de se deslocar de regiões onde é mais abundante (onde apresenta menor remuneração devido à concorrência mais acirrada) para regiões vizinhas nas quais é mais escasso, podendo assim receber maior remuneração devido à concorrência menor.

4 Exemplos numéricos

Como forma de ilustrar as soluções e análises do modelo AK espacial proposto na Seção 3, apresentaremos alguns exemplos numéricos, utilizando o software matemático MATLAB (Chapra, 2013), para os três tipos de condições de contorno, considerando os seguintes valores teóricos para os parâmetros do modelo:

$$l = 10, A = 1, \delta = 0,05, d = 1. \tag{39}$$



Esses parâmetros implicam nas seguintes taxas de poupança crítica para o modelo com condições de contorno Dirichlet homogêneas (16):

$$s_c = \frac{1}{100}(\pi^2 + 5) = 0,148\dots \tag{40}$$

Neumann homogêneas (28):

$$\hat{s}_c = 0,05, \tag{41}$$

e mistas homogêneas (36):

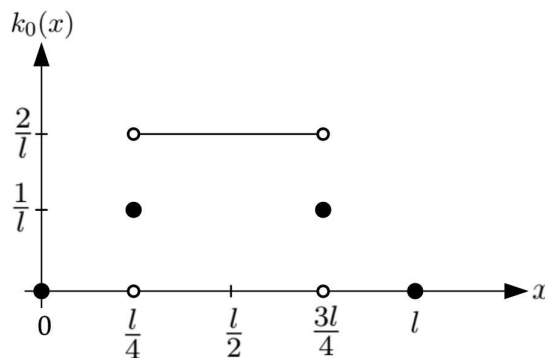
$$\tilde{s}_c = \frac{1}{400}(\pi^2 + 20) = 0,074\dots \tag{42}$$

Além disso, consideraremos a seguinte distribuição inicial da densidade de capital *per capita* na economia, $k_0(x)$:

$$k_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{l}, & \text{se } \frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4} \\ 0, & \text{se } 0 \leq x < \frac{l}{4} \text{ ou } \frac{3l}{4} < x \leq l \\ \frac{1}{l}, & \text{se } x = \frac{l}{4} \text{ ou } x = \frac{3l}{4} \end{cases} \tag{43}$$

a qual implica, para qualquer $l > 0$, em uma quantidade agregada inicial de capital *per capita* unitária, i.e. $k_a(0) = \int_0^l k_0(x)dx = 1$. Note que tal $k_0(x)$ é contínua por partes com derivada também contínua por partes em $\Omega = [0, l]$, tal que $k_0(x) = \frac{k_0(x^-)+k_0(x^+)}{2}$, $\forall x \in \text{int } \Omega$, o que garante a convergência das soluções em série do modelo AK espacial para as condições de contorno consideradas. Na Figura 1, apresentamos um gráfico desta condição inicial $k_0(x)$.

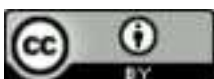
Figura 1 – Distribuição inicial da densidade de capital *per capita*, $k_0(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, a condição inicial (43) associada com os parâmetros (39) implicam nos seguintes valores para os coeficientes A_n (11) da solução com condições de contorno Dirichlet homogêneas (10)-(12):

$$A_n = \frac{2}{5n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{44}$$



para os A_n (22)-(23) da solução com condições de contorno Neumann homogêneas (21)-(24):

$$\frac{A_0}{2} = \overline{k_0(x)} = \frac{1}{10} \text{ e } A_n = \frac{2}{5n\pi} \left[\text{sen} \left(\frac{3n\pi}{4} \right) - \text{sen} \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

e para os A_n (32) da solução com condições de contorno mistas homogênea (31)-(33):

$$A_n = \frac{4}{5(2n-1)\pi} \left[\text{sen} \left(\frac{3(2n-1)\pi}{8} \right) - \text{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi}{8} \right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

A fim de garantir uma boa aproximação, foram considerados 5.000 termos das séries de Fourier nas soluções numéricas dos problemas, as quais foram obtidas somando-se os termos das séries por meio da estrutura de laços do tipo `for` no MATLAB. Para gerar os gráficos de superfície das Figuras 2, 3 e 4 a seguir, utilizamos o comando `surf` do MATLAB. Para uma discussão de como utilizar o MATLAB para analisar séries de Fourier de funções periódicas, ver Araki e Mollo Neto (2013).

Na Figura 2, apresentamos gráficos com a evolução espaço-temporal do capital *per capita*, $k(x, t)$ (primeira coluna), e evolução temporal do capital *per capita* agregado, $k_a(t)$ (segunda coluna), para o modelo AK espacial com condições de contorno Dirichlet homogêneas, com $s = 0, 1 < s_c$, caso em que a economia colapsa no longo prazo; $s = 0, 148 \dots = s_c$, caso em que a economia tende a um equilíbrio espacial estacionário no longo prazo; e $s = 0, 2 > s_c$, caso no qual a economia apresenta crescimento persistente do capital *per capita* no interior da economia ao longo do tempo, sendo este sempre nulo na fronteira hostil. Note que nos casos em que a economia não colapsa, o nível máximo de capital *per capita* ocorre sempre no centro geográfico da economia espacial, $x = \frac{l}{2} = 5$, com o valor mínimo de $k(x, t) = 0$ ocorrendo na fronteira, $x = 0$ e $x = l = 10$.

Na Figura 3, apresentamos gráficos com a evolução espaço-temporal do capital *per capita*, $k(x, t)$ (primeira coluna), e evolução temporal do capital *per capita* agregado, $k_a(t)$ (segunda coluna), para o modelo AK espacial com condições de contorno Neumann homogêneas, com $s = 0, 02 < \hat{s}_c$, caso em que a economia colapsa; $s = 0, 05 = \hat{s}_c$, caso em que a economia tende a um *steady state* estacionário espacialmente homogêneo, com $k_a(t)$ permanecendo constante; $s = 0, 1 > \hat{s}_c$, cenário no qual a economia cresce persistentemente ao longo do tempo. Note que em todos os casos a heterogeneidade espacial da distribuição inicial do capital *per capita* é suavizada ao longo do tempo, sendo totalmente eliminada no longo prazo. Na coluna da direita podemos verificar que a evolução do capital *per capita* agregado da economia coincide para os modelos AK espacial e não-espacial (com condição inicial equivalente $k(0) = 1$), ilustrando o fato deste caso ser uma generalização espacial natural para o modelo AK não-espacial.



Finalmente, na Figura 4, apresentamos gráficos com a evolução espaço-temporal do capital *per capita*, $k(x, t)$ (primeira coluna), e evolução temporal do capital *per capita* agregado, $k_a(t)$ (segunda coluna), para o modelo AK espacial com condições de contorno mistas homogênea, com $s = 0,06 < \tilde{s}_c$, caso no qual a economia tende ao colapso; $s = 0,074 \dots = \tilde{s}_c$, caso em que a economia tende a um steady state estacionário, apresentando valor máximo para o capital *per capita* na fronteira isolada, $x = 0$, e decrescente na direção da fronteira hostil, $x = 10$, onde se anula; e $s = 0,1 > \tilde{s}_c$, cenário no qual a economia apresenta crescimento persistente para as localidades $x \in [0, 10)$.

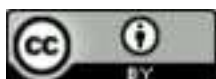
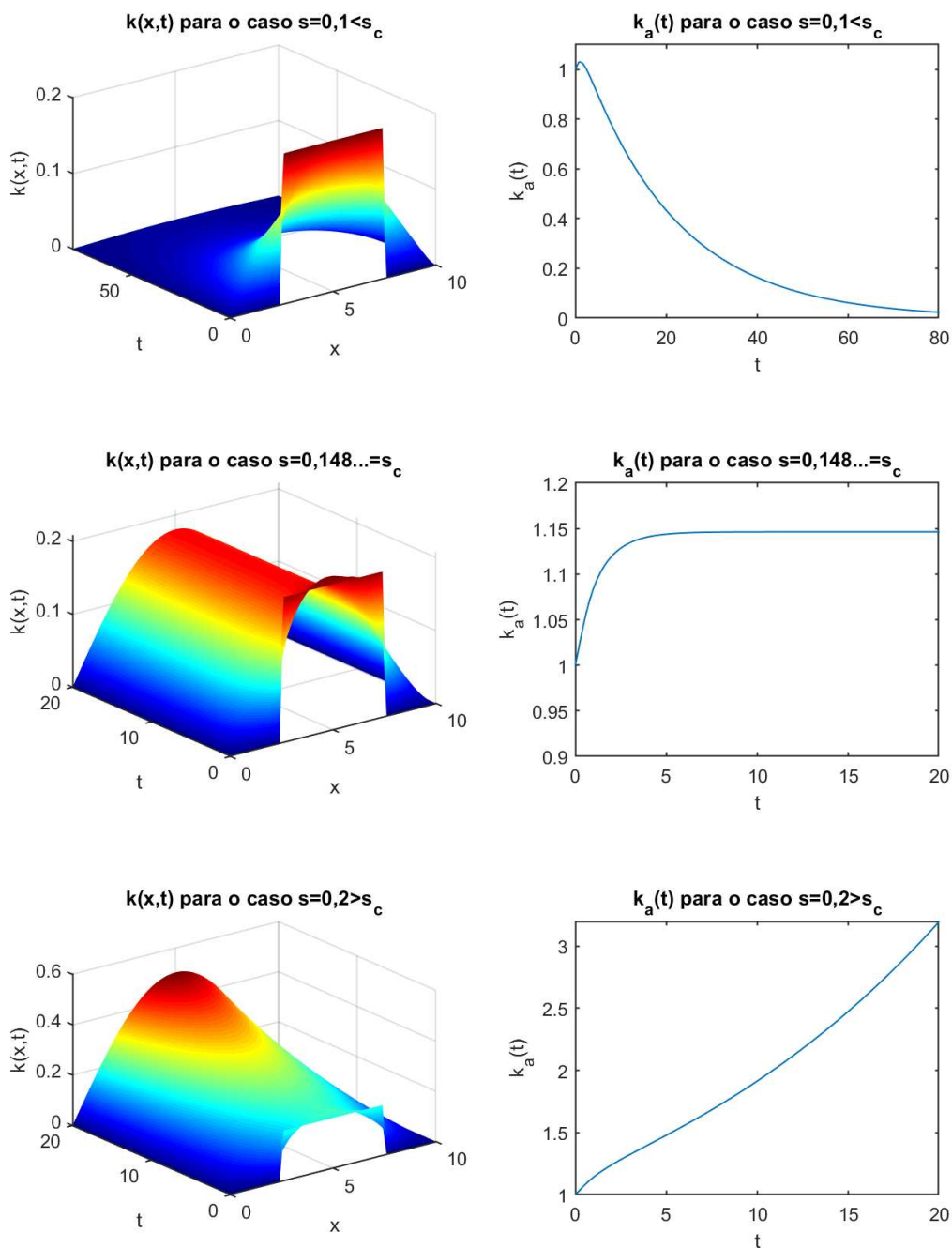


Figura 2 – Evolução espaço-temporal do capital *per capita*, $k(x, t)$, e do capital *per capita* agregado, $k_a(t)$, para o modelo AK espacial com condições de contorno Dirichlet homogêneas, com

$$s = 0, 1 < s_c, s = 0, 148 \dots = s_c \text{ e } s = 0, 2 > s_c$$



Fonte: Elaborado pelo autor.

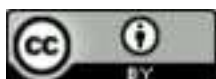
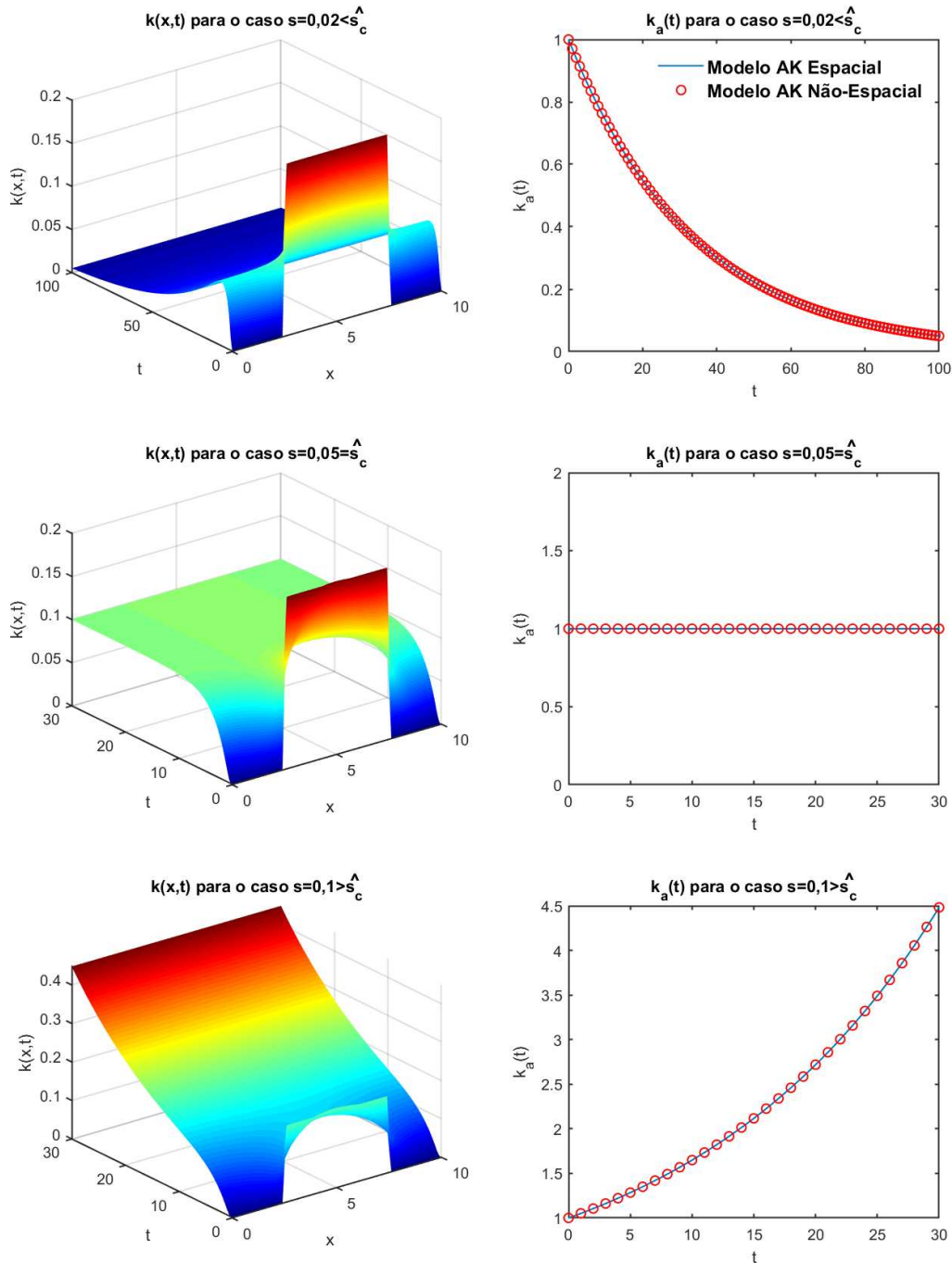


Figura 3 – Evolução espaço-temporal do capital *per capita*, $k(x, t)$, e do capital *per capita* agregado, $k_a(t)$, para o modelo AK espacial com condições de contorno Neumann homogêneas,

com $s = 0,02 < \hat{s}_c$, $s = 0,05 = \hat{s}_c$ e $s = 0,1 > \hat{s}_c$



Fonte: Elaborado pelo autor.

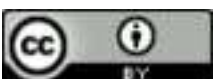
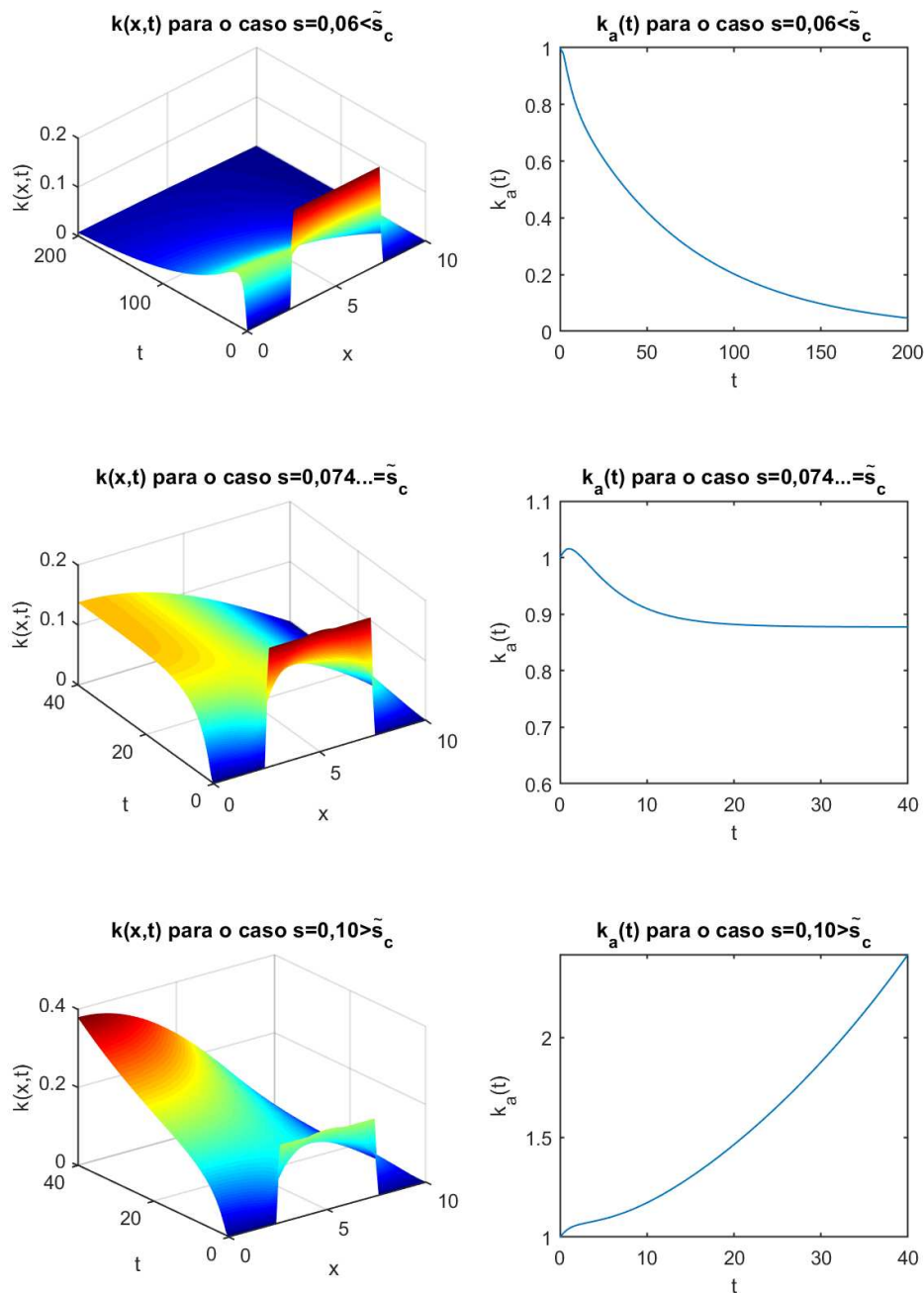
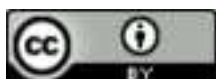


Figura 4 – Evolução espaço-temporal do capital *per capita*, $k(x, t)$, e do capital *per capita* agregado, $k_a(t)$, para o modelo AK espacial com condições de contorno mistas homogênea, com

$$s = 0,06 < \tilde{s}_c, s = 0,074 \dots = \tilde{s}_c \text{ e } s = 0,1 > s_c$$



Fonte: Elaborado pelo autor.



5 Considerações finais

Neste trabalho propomos uma generalização espacial do modelo de crescimento econômico AK em uma dimensão espacial, obtendo soluções em série de Fourier para a distribuição de capital *per capita* da economia para condições de contorno de Dirichlet homogêneas, de Neumann homogêneas e mistas homogêneas, assim como expressões para o capital *per capita* agregado da economia como função do tempo, apresentando exemplos numéricos para esses três tipos de condições de contorno.

Como principais resultados, obtivemos valores críticos mínimos para o tamanho geográfico e para a taxa de poupança da economia, de forma a garantir o crescimento persistente do capital *per capita* da economia no longo prazo. Em particular, o modelo com condições de contorno Neumann homogêneas apresenta o menor valor necessário de taxa de poupança para garantir crescimento econômico persistente da economia, sendo que neste caso esta taxa de poupança mínima independe do tamanho geográfico da economia. Na sequência, em ordem crescente de valores críticos mínimos para a taxa de poupança, temos as condições mistas homogêneas, com perda de capital em apenas um lado da fronteira e as condições de Dirichlet homogêneas, com perda de capital nos dois lados da fronteira, esta última apresentando a maior taxa. Nestes dois últimos casos a taxa de poupança mínima é inversamente proporcional ao tamanho geográfico da economia. Também mostramos que o modelo espacial proposto com condições de contorno do tipo de Neumann homogêneas apresenta a mesma evolução temporal para o capital *per capita* agregado da economia que o modelo AK não-espacial, constituindo desta forma generalização espacial natural para este modelo.

Por fim, o modelo AK espacial aqui proposto constitui exemplo de aplicação de equações diferenciais parciais na área de Economia, além de fortalecer conexões multidisciplinares entre as áreas de Economia, Matemática e Ecologia Matemática. Possibilidades de pesquisa futura incluem considerar o modelo com mão de obra não-constante, com condições de contorno não-homogêneas, com alguns parâmetros econômicos dependentes do espaço, tal como a taxa de poupança, além da extensão do modelo proposto para duas dimensões espaciais.



Referências

- ARAKI, T.; MOLLO NETO, M. Explorando a construção computacional de sinais periódicos contínuos como combinação linear de sinais senoidais harmonicamente relacionados. **Revista Engenho**, v. 5, n. 8, p. 1-24, 2013. Disponível em: <https://revistas.anchieta.br/index.php/RevistaEngenho/article/view/832>. Acesso em: 28 dez. 2023.
- AURAY, S.; EYQUEM, A.; JOUNEAU-SION, F. Wars and capital destruction. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 41, p. 224-240, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2014.01.023>.
- BARRO, R. J.; SALA-I-MARTIN, X. **Economic growth**. 2. ed. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2004.
- BOUCEKKINE, R.; CAMACHO, C.; FABBRI, G. Spatial dynamics and convergence: The spatial AK model. **Journal of Economic Theory**, v. 148, n. 6, p. 2719-2736, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jet.2013.09.013>.
- BOUCEKKINE, R.; FABBRI, G.; FEDERICO, S.; GOZZI, F. Growth and agglomeration in the heterogeneous space: a generalized AK approach. **Journal of Economic Geography**, v. 19, n. 6, p. 1287-1318, 2019. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/oup/jecgeo/v19y2019i6p1287-1318..html>. Acesso em: 28 dez. 2023.
- BALLESTRA, L. V. The spatial AK model and the Pontryagin maximum principle. **Journal of Mathematical Economics**, v. 67, p. 87-94, 2016. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/mateco/v67y2016icp87-94.html>. Acesso em: 28 dez. 2023.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Trad.: Valéria de Magalhães Lório. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2010.
- BRITO, P. A Spatial Solow Model with Unbounded Growth. Universidade Técnica de Lisboa. 2005. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123735483>. Acesso em: 28 dez. 2023.
- CAMACHO, C.; ZOU, B. The spatial Solow model. **Economics Bulletin**, v. 18, n. 2, p. 1-11, 2004. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eb1/ecbull/eb-04r10001.html>. Acesso em: 28 dez. 2023.
- CHAPRA, S. C. **Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2013.
- COBB, C. W.; DOUGLAS, P. H. A Theory of Production. **American Economic Review**, v. 18, n. 1, p. 139-165, 1928.
- FARLOW, S. J. **Partial differential equations for scientists and engineers**. New York: Dover Publications, 2016.
- FEIGENBAUM, J. ; LEE, J.; MEZZANOTTI, F. Capital Destruction and Economic Growth: The Effects of Sherman's March, 1850-1920. **American Economic Journal: Applied Economics**, v.



14, n. 4, p. 301-342, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1257/app.20200397>.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais**. Projeto Euclides. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.

HU, H.; LAI, S. Spatio-Temporal Dynamics of the Spatial AK Model with Trade Costs. **Journal of Mathematical Finance**, v. 11, n. 3, p. 398-415, 2021. DOI: <https://doi.org/10.4236/jmf.2021.113023>.

IÓRIO, V. de M. **EDP: um curso de graduação**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

JONES, C. I. **Introdução à teoria do crescimento econômico**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2000.

JUCHEM NETO, J. P.; CLAEYSSEN, J. C. R. Capital-Induced Labor Migration in a Spatial Solow Model. **Journal of Economics**, v. 115, p. 25-47, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00712-014-0404-6>.

KIERSTEAD, H.; SLOBODKIN, L. B. The size of water masses containing plankton blooms. **Journal of Marine Research**, v. 12, n. 1, p. 141-147, 1953. Disponível em: https://elischolar.library.yale.edu/journal_of_marine_research/788. Acesso em: 28 dez. 2023.

KOT, M. **Elements of mathematical ecology**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2003.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology: I. An Introduction**. v. 17. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

SKELLAM, J. G. Random dispersal in theoretical populations. **Biometrika**, v. 38, n. 1-2, p. 196-218, 1951. DOI: <https://doi.org/10.2307/2332328>.

SOLOW, R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 70, n. 1, p. 65-94, 1956. DOI: <https://doi.org/10.2307/1884513>.

SWAN, T. W. Economic Growth and Capital Accumulation. **Economic Record**, v. 32, n. 2, p. 334-361, 1956. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. v. 2. 3. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

