Estudo acerca dos números cuja soma dos algarismos é igual a 9 via equações diofantinas lineares

Study of numbers whose sum of digits is equal to 9 via linear diophantine equations

Estudio de números cuya suma de dígitos es igual a 9 mediante ecuaciones diofánticas lineales

José Sérgio Domingues[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG), Formiga, MG, Brasil
`https://orcid.org/0000-0003-1949-1519`, `http://lattes.cnpq.br/5357945563318684`

Ana Clara dos Santos Reis[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG), Formiga, MG, Brasil
`https://orcid.org/0009-0008-3491-3074`, `http://lattes.cnpq.br/4111632507168858`

Caroline Helena Costa Souza[3]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG), Formiga, MG, Brasil
`https://orcid.org/0009-0005-2307-3776`, `http://lattes.cnpq.br/5776282060344305`

Alex Eduardo Andrade Borges[4]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG), Formiga, MG, Brasil
`https://orcid.org/0009-0009-8523-0895`, `http://lattes.cnpq.br/4746871549188398`

Resumo: Uma clássica propriedade da tabuada do 9 é que os resultados da multiplicação de 1 a 10 por 9 são, além do 9, números de dois algarismos, xy, tais que $x + y = 9$. Este trabalho tem como principal objetivo utilizar a ideia dessa propriedade para o estudo de condições análogas para números naturais de três e quatro algarismos. Para isso, foram utilizadas equações diofantinas lineares de duas, três e quatro variáveis e suas técnicas de resolução. Como resultados, determinou-se quais e quantos são os números naturais de dois, três e quatro algarismos cujas somas dos algarismos são iguais a 9. Também se verificou que a quantidade de números cuja soma dos algarismos é igual a 9, nos intervalos de 1 a 999, de 1000 a 1999, de 2000 a 2999,

[1]**Currículo sucinto**: Graduado em Matemática pela UNIFEMM, especialista em Matemática pela UFMG, mestre em Modelagem Matemática e Computacional pelo CEFET-MG, doutor em Engenharia Mecânica/Bioengenharia pela UFMG. Professor do IFMG, *Campus* Formiga. **Contribuição de autoria**: Administração do projeto, análise formal, conceituação, curadoria de dados, escrita – primeira redação, escrita – revisão e edição, investigação, metodologia, software, supervisão, validação. **Contato**: `sergio.domingues@ifmg.edu.br`.

[2]**Currículo sucinto**: Graduada em Matemática pelo IFMG. Professora da Rede Estadual de Educação de Minas Gerais. **Contribuição de autoria**: Análise formal, curadoria dos dados, revisão, investigação, metodologia e validação. **Contato**: `anasantosreis262@gmail.com`.

[3]**Currículo sucinto**: Graduada em Matemática pelo IFMG. **Contribuição de autoria**: Análise formal, curadoria dos dados, revisão, investigação, metodologia e validação. **Contato**: `carol.helena04@gmail.com`.

[4]**Currículo sucinto**: Graduado e mestre em Matemática pela USP. Professor do IFMG, *Campus* Formiga. **Contribuição de autoria**: Análise formal, curadoria dos dados, revisão, investigação, metodologia e validação. **Contato**: `alex.borges@ifmg.edu.br`.

DOMINGUES, José Sérgio; REIS, Ana Clara dos Santos; SOUZA, Caroline Helena Costa; BORGES, Alex Eduardo Andrade. Estudo acerca dos números cuja soma dos algarismos é igual a 9 via equações diofantinas lineares. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e3009, 27 de dezembro de 2023. `https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6679`.

e assim sucessivamente até o intervalo dos números de 9000 a 9999, obedece à sequência decrescente dos 10 primeiros números triangulares.

Palavras-chave: tabuada do 9; equações diofantinas lineares; múltiplos de 9; modelagem matemática; teoria dos números.

Abstract: A classic property of the 9 times table is that the results of multiplying 1 to 10 by 9 are, in addition to 9, two-digit numbers, xy, such that $x + y = 9$. This work has as main objective to use the idea of this property for the study of analogous conditions for natural numbers of three and four digits. For this, linear Diophantine equations of two, three and four variables and their resolution techniques were used. As a result, it was determined which and how many are the natural numbers of two, three and four digits whose sum of digits are equal to 9. It was also verified that the number of numbers whose sum of digits is equal to 9, in the ranges from 1 to 999, from 1000 to 1999, from 2000 to 2999, and so on until the range of 9000 to 9999 obeys the descending sequence of the first 10 triangular numbers.

Keywords: table of 9; linear diophantine equations; multiples of 9; mathematical modeling; number theory.

Resumen: Una propiedad clásica de la tabla 9 es que los resultados de multiplicar de 1 a 10 por 9 son, además de 9, números de dos dígitos, xy, tales que $x + y = 9$. Este trabajo tiene como principal objetivo utilizar la idea de esta propiedad para el estudio de condiciones análogas para números naturales de tres y cuatro cifras. Para ello se utilizaron ecuaciones diofánticas lineales de dos, tres y cuatro variables y sus técnicas de resolución. Como resultado se determinó cuáles y cuántos son los números naturales de dos, tres y cuatro dígitos cuya suma de dígitos es igual a 9. También se verificó que el número de números cuya suma de dígitos es igual a 9, en los rangos de 1 a 999, de 1000 a 1999, de 2000 a 2999, y así sucesivamente hasta el rango de 9000 a 9999 obedece a la secuencia descendente de los primeros 10 números triangulares.

Palabras clave: mesa de 9; ecuaciones diofánticas lineales; múltiplos de 9; modelo matematico; teoría de los números.

Data de submissão: 13 de abril de 2023.

Data de aprovação: 10 de agosto de 2023.

1 Introdução

Uma clássica propriedade da tabuada do 9 é que os resultados da multiplicação dos números de 1 a 10 por 9 são, além do 9, números cuja soma dos algarismos é sempre igual a 9, como pode ser observado na Tabela 1.

Tabela 1 – Tabuada do 9 e a soma dos algarismos dos resultados

Tabuada do 9	**Soma dos algarismos**
$1 \cdot 9 = 9$	–
$2 \cdot 9 = 18$	$1 + 8 = 9$
$3 \cdot 9 = 27$	$2 + 7 = 9$
$4 \cdot 9 = 36$	$3 + 6 = 9$
$5 \cdot 9 = 45$	$4 + 5 = 9$
$6 \cdot 9 = 54$	$5 + 4 = 9$
$7 \cdot 9 = 63$	$6 + 3 = 9$
$8 \cdot 9 = 72$	$7 + 2 = 9$
$9 \cdot 9 = 81$	$8 + 1 = 9$
$10 \cdot 9 = 90$	$9 + 0 = 9$

Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Matematicamente, têm-se que os resultados são, além do 9, números da forma xy, com $0 < x \leq 9$ e $0 \leq y \leq 9$, tais que $x + y = 9$. Esta curiosa característica da tabuada do 9 é muito utilizada por professores para prender a atenção dos alunos em sala de aula. Contudo, mesmo sendo muito conhecida, apenas uma referência que discute e demonstra essa propriedade foi encontrada (Reis; Souza; Domingues, 2022). Uma apresentação reduzida dessa demonstração será apresentada na próxima seção deste trabalho, em que se mostra que os únicos números naturais de dois algarismos cuja soma entre eles é igual a 9 são, exatamente, os resultados da Tabela 1.

Utilizando esta simples propriedade como motivação, pode-se pensar em determinar quantos e quais são os números naturais de três ou quatro algarismos cujas somas desses algarismos também sejam iguais a 9, além de analisar se alguma característica interessante pode ser observada para os resultados a serem encontrados.

Neste trabalho, todas estas análises foram realizadas, e seus resultados discutidos detalhadamente. A modelagem para cada caso foi feita por equações diofantinas lineares (EDLs) de duas, três e quatro variáveis, de forma que suas resoluções permitiram determinar quais são e, consequentemente, quantos são, os números com as características procuradas. Além disso, a análise da cardinalidade de números com essas características em intervalos de 1000 em 1000 números, a saber, de 1 a 999, de 1000 a 1999, de 2000 a 2999, e assim sucessivamente, até o intervalo de 9000 a 9999, demonstrou que a quantidade de números cuja soma dos algarismos é igual a 9, em cada intervalo, decresce pela sequência decrescente dos 10 primeiros números triangulares.

Também se fez a análise para intervalos de 100 em 100 números, considerando separadamente os casos de números com três ou quatro algarismos. Para o primeiro caso (números com três algarismos) a quantidade de números em cada intervalo decresce pela sequência $9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$. Para o segundo caso (números com quatro algarismos) ocorre uma variação diferente da quantidade de números em cada intervalo, gerando uma matriz $A_{10\times 9}$ em que $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$, e com sequências decrescentes em cada linha para os elementos a_{ij} com $i \leq j$.

Para fundamentar as análises a serem apresentadas, a próxima seção tratará da indicação dos principais resultados referentes às EDLs, necessários para o entendimento deste texto.

2 Noções Matemáticas Básicas

A teoria utilizada na realização desse trabalho, especialmente resultados relacionados à soma dos algarismos de um número e resoluções das EDLs de duas, três e quatro variáveis, seguem nesta seção, e podem ser encontrados com mais detalhes, inclusive suas demonstrações, em algumas das principais referências utilizadas (Bernstein, 1968; Fomín, 1975; Rodrigues, 1989; Izmirli, 2014; Hefez, 2016; Vyawahare, 2016; Souza, 2017; Man, 2020; Santos, 2020; Richit; Richit; Richit, 2021; Dario, 2022; Reis; Souza; Domingues, 2022).

Definição 2.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Diz-se que a divide b, e se indica por $a|b$, quando existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $b = at$.*

Teorema 2.2 (Teorema de Bézout)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos. Então, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a, b) = am + bn$.*

O Teorema 2.2 pode ser apresentado para três e quatro inteiros não simultaneamente nulos.

Teorema 2.3 (Teorema de Bézout para três e quatro inteiros)**.** *Dados inteiros a, b, c, segue que existem $m, n, p \in \mathbb{Z}$ tais que $am + bn + cp = mdc(a, b, c)$. Para quatro inteiros a, b, c, d existem $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $am + bn + cp + dq = mdc(a, b, c, d)$.*

Definição 2.4. *Uma Equação Diofantina Linear (EDL) de n variáveis inteiras, $x_1, \ \ldots, \ x_n$, é toda equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = k \tag{1}$$

com coeficientes $a_i \in \mathbb{Z}$ não todos nulos para $1 \leq i \leq n$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Com base na Definição 2.4 as EDLs de duas, três e quatro variáveis podem ser escritas, respectivamente, como

$$ax + by = k, \qquad ax + by + cz = k \qquad \text{e} \qquad ax + by + cz + dw = k,$$

sendo a, b, c, d os coeficientes inteiros não todos nulos e x, y, z, w as variáveis.

Definição 2.5. *Uma solução particular da EDL* (1) *é uma sequência de n inteiros $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = k$. O conjunto de todas as sequências que são soluções dessa equação é denominado solução geral da EDL. Em especial, um par ordenado (x_0, y_0) é solução particular da EDL $ax + by = k$ quando $ax_0 + by_0 = k$.*

Teorema 2.6. *A EDL* (1) *possui solução se, e somente se, $mdc(a_1, a_2, \ldots, a_n)|k$.*

O Teorema 2.6 garante que, em particular, as EDLs de duas, três e quatro variáveis terão solução quando $mdc(a, b)|k$, $mdc(a, b, c)|k$ e $mdc(a, b, c, d)|k$, respectivamente.

Teorema 2.7. *Seja a EDL $ax + by = k$, com uma solução particular (x_0, y_0), e tal que $mdc(a, b) = g$, sendo que $g|k$. Então, o conjunto S de pares ordenados (x, y) é sua solução geral se, e somente se,*

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{b}{g}t,\ y_0 - \frac{a}{g}t \right),\ \ t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Em particular, se $g = mdc(a, b) = 1$ a solução geral dessa EDL é dada por

$$S = \{(x_0 + bt,\ y_0 - at),\ \ t \in \mathbb{Z}\}. \tag{2}$$

Uma forma prática para determinar uma solução particular para uma EDL de duas incógnitas é o Algoritmo Estendido de Euclides, que também pode ser encontrado nas principais referências deste trabalho, especialmente em Souza (2017). Aqui, ele não será discutido nem apresentado, pois pelo formato das EDLs que modelarão os problemas, as soluções particulares podem ser encontradas diretamente, sem a necessidade do método.

3 A Demonstração da Curiosa Tabuada do 9

A demonstração detalhada da curiosidade já mencionada pode ser encontrada em Reis, Souza e Domingues (2022). Aqui, apresenta-se uma rápida explicação, que será útil para a motivação dos novos resultados a que este trabalho pretende.

Basicamente, como todos os resultados da tabuada do 9, a partir do 18, são números com algarismos x, y, tais que a soma entre eles é igual a 9; a demonstração exibirá os resultados de

DOMINGUES, José Sérgio; REIS, Ana Clara dos Santos; SOUZA, Caroline Helena Costa; BORGES, Alex Eduardo Andrade. Estudo acerca dos números cuja soma dos algarismos é igual a 9 via equações diofantinas lineares. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e3009, 27 de dezembro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6679.

todos os números naturais de dois algarismos com esta característica. Em termos matemáticos, isso consiste em resolver a EDL

$$x + y = 9 \tag{3}$$

sujeita às condições $0 < x \leq 9$ e $0 \leq y \leq 9$.

Os coeficientes da EDL (3) são $a = b = 1$ e $k = 9$. Então, $g = mdc(a, b) = mdc(1, 1) = 1|9$, garantindo que ela possui solução. Inclusive, uma solução particular (x_0, y_0) para ela pode ser obtida com uma simples análise visual. Por exemplo, pode-se tomar $(x_0, y_0) = (9, 0)$. Assim, pela solução geral (2), a solução geral da EDL (3) é dada por

$$S = \{(9 + t,\ -t)\,,\ \ t \in \mathbb{Z}\}\,, \tag{4}$$

sendo $x = 9 + t$ e $y = -t$. Aplicando a condição $0 < x \leq 9$ segue que $0 < 9 + t \leq 9$ e, consequentemente, que $-9 < t \leq 0$. Aplicando a condição $0 \leq y \leq 9$ tem-se $0 \leq -t \leq 9$, que implica em $-9 \leq t \leq 0$. Portanto, o conjunto de todos os valores que o parâmetro t pode assumir é $\{-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\}$.

Como são nove valores, significa que existem nove números da forma xy, com $0 < x \leq 9$ e $0 \leq y \leq 9$, tais que $x + y = 9$. Para determinar quais são eles, basta substituir cada um dos valores possíveis de t na solução geral apresentada em (4), conforme pode-se observar na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados após substituições dos valores de t

Parâmetro: t	$x = 9 + t$	$y = 0 - t$	**Resultado:** xy	**Soma:** $x + y$
$t = -8$	$x = 9 + (-8) = 1$	$y = 0 - (-8) = 8$	18	$1 + 8 = 9$
$t = -7$	$x = 9 + (-7) = 2$	$y = 0 - (-7) = 7$	27	$2 + 7 = 9$
$t = -6$	$x = 9 + (-6) = 3$	$y = 0 - (-6) = 6$	36	$3 + 6 = 9$
$t = -5$	$x = 9 + (-5) = 4$	$y = 0 - (-5) = 5$	45	$4 + 5 = 9$
$t = -4$	$x = 9 + (-4) = 5$	$y = 0 - (-4) = 4$	54	$5 + 4 = 9$
$t = -3$	$x = 9 + (-3) = 6$	$y = 0 - (-3) = 3$	63	$6 + 3 = 9$
$t = -2$	$x = 9 + (-2) = 7$	$y = 0 - (-2) = 2$	72	$7 + 2 = 9$
$t = -1$	$x = 9 + (-1) = 8$	$y = 0 - (-1) = 1$	81	$8 + 1 = 9$
$t = \ \ 0$	$x = 9 + (-0) = 9$	$y = 0 - (-0) = 0$	90	$9 + 0 = 9$

Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Sendo assim, fica exibido que apenas estes são números de dois algarismos cuja soma entre eles é igual a 9. Juntamente com o resultado $1 \cdot 9 = 9$, eles são exatamente os resultados da tabuada do 9, como se observa na coluna "**Resultado:** xy" da Tabela 2, totalizando 10 resultados. Então, motivados por esta característica, vamos determinar, na próxima seção, quantos e quais são os números de três e quatro algarismos cuja soma entre esses algarismos também seja igual a 9.

4 Extrapolando a Curiosidade da Tabuada do 9

Já foi provado que os resultados da tabuada do 9 são os únicos números de dois algarismos cuja soma entre eles é sempre igual a 9. Mas quantos e quais são os números com três ou quatro algarismos que também possuem essa propriedade? Esses números possuem alguma característica ou propriedade inerente ao sistema posicional decimal, que é objeto de estudo, além da soma dos algarismos ser sempre igual a 9? Essas perguntas serão respondidas nesta seção.

4.1 Números com três algarismos: xyz

Para determinar os números de três algarismos, xyz, com a mesma característica da curiosidade da tabuada do 9 é necessário resolver a EDL

$$x + y + z = 9, \tag{5}$$

sujeita às condições $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$ e $0 \leq z \leq 9$.

Como os coeficientes da EDL (5) são $a = b = c = 1$, segue que $g = mdc(a, b, c) = mdc(1, 1, 1) = 1$. Também tem-se que $k = 9$. Então, como $1|9$, segue pelo Teorema 2.6 que essa EDL possui solução.

Para determinar a solução geral da EDL (5), isto é, todos os trios ordenados de inteiros (x, y, z) que satisfazem a EDL e suas restrições, será utilizada uma substituição de variável adequada, de forma que ela se torne uma EDL de duas variáveis e, portanto, podendo ser resolvida com base no resultado do Teorema 2.7. Vejamos:

A EDL $x + y + z = 9$ pode ser reescrita como $x + y = 9 - z$. Fazendo-se a mudança de variável $\beta = 9 - z$, ela fica na forma

$$x + y = \beta. \tag{6}$$

DOMINGUES, José Sérgio; REIS, Ana Clara dos Santos; SOUZA, Caroline Helena Costa; BORGES, Alex Eduardo Andrade. Estudo acerca dos números cuja soma dos algarismos é igual a 9 via equações diofantinas lineares. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e3009, 27 de dezembro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6679.

Além disso, pelo fato de $\beta = 9 - z$ pode-se obter uma nova EDL dada por

$$\beta + z = 9. \tag{7}$$

A EDL (7) tem β e z como variáveis, e os coeficientes dessas variáveis são iguais a 1. Portanto o mdc entre eles também é 1, e como $1|9$, ela possui solução. Além disso, facilmente se percebe que o par $(\beta_0, z_0) = (9, 0)$ é uma solução particular para essa EDL. Sendo assim, pelo resultado do Teorema 2.7 segue que a solução geral da EDL (7) é

$$S_1 = \{(9 + t_1,\ -t_1),\ t_1 \in \mathbb{Z}\},$$

sendo que $\beta = 9 + t_1$ e $z = -t_1$. Substituindo $\beta = 9 + t_1$ na Eq. (6) obtém-se a EDL

$$x + y = 9 + t_1, \tag{8}$$

com coeficientes $a = b = 1$ e $k = 9 + t_1$. Logo, como $mdc(1, 1) = 1$ e $1|(9 + t_1)$ para todo $t_1 \in \mathbb{Z}$, segue pelo Teorema 2.6 que a EDL (8) possui solução. Uma família de soluções particulares dessa EDL é o par $(x_0,\ y_0) = (9 + t_1,\ 0)$, pois fazendo $x = 9 + t_1$ e $y = 0$ ela é satisfeita. Sendo assim, o Teorema 2.7 garante que a solução geral da EDL (8) é dada por

$$S_2 = \{(9 + t_1 + t_2,\ -t_2),\ t_2 \in \mathbb{Z}\}, \tag{9}$$

com $x = 9 + t_1 + t_2$ e $y = -t_2$.

Portanto, fica provado que os inteiros $x,\ y$ e z são dados pelas equações paramétricas $x = 9 + t_1 + t_2,\ \ y = -t_2$ e $z = -t_1$. Então, a solução geral da EDL (5) é

$$S = \{(9 + t_1 + t_2,\ -t_2,\ -t_1),\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{Z}\}. \tag{10}$$

Agora, aplicando as condições às quais a EDL (5) está sujeita obtêm-se três condições:

$$0 < x \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 < 9 + t_1 + t_2 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad -9 < t_1 + t_2 \leq 0.$$

$$0 \leq y \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -t_2 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad -9 \leq t_2 \leq 0.$$

$$0 \leq z \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -t_1 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad -9 \leq t_1 \leq 0.$$

As duas últimas condições encontradas restringem os valores de t_1 e t_2 ao conjunto $\{-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\}$. Porém, se $t_1 = -9$ a restrição $-9 < t_1 + t_2 \leq 0$ não é satisfeita, pois ter-se-ia $-9 < -9 + t_2 \leq 0 \ \Rightarrow \ 0 < t_2 \leq 9$, que é um absurdo, pois a segunda restrição garante que deve-se ter $-9 \leq t_2 \leq 0$. Então, chega-se às seguintes condições para os possíveis valores de t_1 e t_2:

$$t_1 \in \{-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\} \quad \text{e} \quad t_2 \in \{-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\}$$

- Se $t_1 = -8$, a primeira restrição permite escrever que $-9 < -8+t_2 \leq 0$ ou seja, $-1 < t_2 \leq 8$. Ora, o único valor inteiro de t_2 que satisfaz essa condição e que está no conjunto de possíveis valores já determinados para esse parâmetro é $t_2 = 0$. Tem-se, então, $t_1 = -8$ e $t_2 = 0$. Substituindo esses valores na solução geral (10) tem-se que
$$x = 9 - 8 + 0 = 1, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = -(-8) = 8.$$

  Portanto, para este valor de t_1, existe apenas um número com as características procuradas, ou seja, da forma xyz com $x + y + z = 9$, que é o número 108.

- Se $t_1 = -7$, a primeira restrição permite escrever que $-9 < -7 + t_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -2 < t_2 \leq 7$. Os valores inteiros que satisfazem $-2 < t_2 \leq 7$ e $-9 \leq t_2 \leq 0$ são $t_2 = -1$ e $t_2 = 0$. Têm-se, então, duas combinações possíveis $(t_1,\ t_2) = (-7,\ -1)$ e $(t_1,\ t_2) = (-7,\ 0)$. Ao substituir a primeira possibilidade chega-se ao número $xyz = 117$ e a segunda possibilidade gera o número $xyz = 207$.

- Se $t_1 = -6$, a primeira restrição permite escrever que $-9 < -6+t_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -3 < t_2 \leq 6$. Os valores inteiros que satisfazem $-3 < t_2 \leq 6$ e $-9 \leq t_2 \leq 0$ são $t_2 = -2$, $t_2 = -1$ e $t_2 = 0$. Então, têm-se três combinações possíveis para $(t_1,\ t_2)$: $(-6,\ -2)$, $(-6,\ -1)$ e $(-6,\ 0)$, que geram xyz iguais a 126, 216 e 306, respectivamente.

Com raciocínio análogo ao realizado para os três menores valores possíveis de t_1, seus demais valores possíveis permitiram determinar todos os outros números da forma xyz em que $x + y + z = 9$. Eles foram agrupados em ordem crescente na Tabela 3.

Tabela 3 – Números da forma xyz em que $x + y + z = 9$

108	153	216	261	333	414	504	603	711
117	162	225	270	342	423	513	612	720
126	171	234	306	351	432	522	621	801
135	180	243	315	360	441	531	630	810
144	207	252	324	405	450	540	702	900

Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Logo, existem 45 números de três algarismos, xyz, com $0 < x \leq 9,\ \ 0 \leq y \leq 9$ e $0 \leq z \leq 9$, e cuja soma entre os algarismos é igual a 9, ou seja, $x + y + z = 9$. Perceba ainda que destes 45 números, 9 estão no intervalo de 100 a 199, 8 deles no intervalo de 200 a 299, 7 deles no intervalo de 300 a 399, e assim sucessivamente, até apenas 1 número com esta característica no intervalo de 900 a 999, que é o próprio número 900. Então, a quantidade de números com esta característica decresce de uma unidade a cada intervalo de 100 em 100 números, desde o intervalo de 100 a 199 até o intervalo de 900 a 999, pela sequência $9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$.

4.2 Números com quatro algarismos: $xyzw$

Para se encontrar quantos e quais são os números de quatro algarismos, $xyzw$, tais que $x + y + z + w = 9$, é necessário resolver a EDL

$$x + y + z + w = 9 \tag{11}$$

sujeita às condições $0 < x \leq 9,\ \ 0 \leq y \leq 9,\ \ 0 \leq z \leq 9$ e $0 \leq w \leq 9$.

Para encontrar a solução geral da EDL (11) serão feitas duas substituições adequadas de variáveis, até que ela seja reduzida a uma EDL de duas variáveis.

Os coeficientes da EDL são $a = b = c = d = 1$ e $k = 9$. Segue que $g = mdc(a, b, c, d) = mdc(1, 1, 1, 1) = 1$, e como $1|9$, pelo Teorema 2.6 ela possui solução.

Fazendo a substituição $k_1 = 9 - w$, a EDL (11) pode ser reescrita como

$$x + y + z = k_1. \tag{12}$$

Além disso, com base na substituição feita pode-se determinar outra EDL

$$k_1 + w = 9. \tag{13}$$

Claramente, uma solução particular para a EDL (13) é o par $(9,\ 0)$. Então, pelo resultado do Teorema (2.7) a solução geral dessa EDL é

$$S_3 = \{(9 + t_1,\ -t_1)\,,\ t_1 \in \mathbb{Z}\}\,,$$

sendo $k_1 = 9 + t_1$ e $w = -t_1$.

Levando $k_1 = 9 + t_1$ na EDL (12) chega-se a

$$x + y + z = 9 + t_1. \tag{14}$$

Agora, fazendo $k_2 = 9 + t_1 - z$ a EDL (14) pode ser reescrita como

$$x + y = k_2. \tag{15}$$

E da substituição realizada pode-se obter uma outra EDL

$$k_2 + z = 9 + t_1, \tag{16}$$

que possui solução com base no Teorema 2.6. Como t_1 representa qualquer número inteiro, ao se fazer $k_2 = 9 + t_1$ e $z = 0$, temos a representação de uma família de soluções particulares para a EDL (16). Logo, com base no Teorema 2.7, a solução geral dessa EDL pode ser escrita como

$$S_4 = \{(9 + t_1 + t_2,\ -t_2),\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{Z}\},$$

sendo $k_2 = 9 + t_1 + t_2$ e $z = -t_2$.

Levando $k_2 = 9 + t_1 + t_2$ na EDL (15) chega-se à EDL

$$x + y = 9 + t_1 + t_2,$$

que possui solução e tem o par $(9 + t_1 + t_2,\ 0)$ como a representação de uma família de soluções particulares. Então o Teorema 2.7 garante que a solução geral da EDL (15) pode ser escrita como

$$S_5 = \{(9 + t_1 + t_2 + t_3,\ -t_3),\ t_1,\ t_2,\ t_3 \in \mathbb{Z}\},$$

sendo $x = 9 + t_1 + t_2 + t_3$ e $y = -t_3$.

Portanto, como de S_5 tem-se que $x = 9 + t_1 + t_2 + t_3$ e $y = -t_3$, de S_4 tem-se que $z = -t_2$, e de S_3 que $w = -t_1$, segue que o conjunto de todas as soluções possíveis da EDL (11), que são as quadras ordenadas $(x,\ y,\ z,\ w)$ de inteiros que a satisfazem, é dado pela solução geral

$$S = \{(9 + t_1 + t_2 + t_3,\ -t_3,\ -t_2,\ -t_1),\ t_1,\ t_2,\ t_3 \in \mathbb{Z}\}. \tag{17}$$

Aplicando as condições às quais a EDL (11) está sujeita, obtêm-se quatro condições:

$$0 \leq w \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -t_1 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad -9 \leq t_1 \leq 0 \;\Rightarrow\; t_1 \in \{-9, -8, -7, -6, -5, \ \ldots, -1, 0\}\,.$$

$$0 \leq z \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -t_2 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad -9 \leq t_2 \leq 0 \;\Rightarrow\; t_2 \in \{-9, -8, -7, -6, -5, \ \ldots, -1, 0\}\,.$$

$$0 \leq y \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -t_3 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad -9 \leq t_3 \leq 0 \;\Rightarrow\; t_3 \in \{-9, -8, -7, -6, -5, \ \ldots, -1, 0\}\,.$$

$$0 < x \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 < 9 + t_1 + t_2 + t_3 \leq 9 \;\Rightarrow\; -9 < t_1 + t_2 + t_3 \leq 0.$$

Perceba que, se $t_1 = -9,$ a última condição determinada fica na forma

$$-9 < -9 + t_2 + t_3 \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 < t_2 + t_3 \leq 9.$$

A condição acima é um absurdo, pois como os valores de t_2 e t_3 são não positivos, a soma entre eles não pode ser positiva. Logo, deve-se ter que $t_1 \neq -9$, o que implica que os valores possíveis desse parâmetro ficam restritos a $t_1 \in \{-8, -7, -6, -5, \ \ldots, -1, 0\}$, e que

$$t_2 + t_3 \leq 0. \tag{18}$$

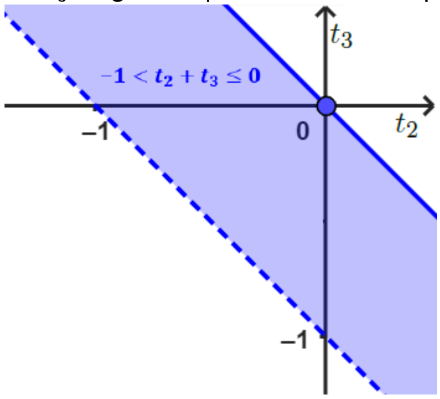
Agora, basta determinar quais são os valores correspondentes para os parâmetros t_2 e $t_3,$ associados a cada valor possível de t_1. Com esses valores números procurados são determinados. Para facilitar a determinação dos parâmetros foi utilizado o método gráfico de resolução.

- Se $t_1 = -8,$ a restrição $-9 < t_1 + t_2 + t_3 \leq 0$ pode ser reescrita como $-1 < t_2 + t_3 \leq 8$. Mas como a inequação (18) também deve ser satisfeita, tem-se que $-1 < t_2 + t_3 \leq 0$. Além disso, pelo fato de t_2 e t_3 serem não positivos, os únicos possíveis pares ordenados de inteiros $(t_2,\ t_3)$ estão restritos ao terceiro quadrante do plano, à origem ou sobre as partes negativas dos eixos t_1 e t_2. Ora, o único par de inteiros que satisfaz estas restrições é a origem, como se observa na Figura 1.

  Logo, quando $t_1 = -8,$ tem-se que $t_2 = t_3 = 0$. Então, substituindo estes valores de parâmetros na solução geral (17) obtém-se que

$$x = 9 + t_1 + t_2 + t_3 = 9 - 8 = 1, \quad y = -t_3 = 0, \quad z = -t_2 = 0 \quad \text{e} \quad w = -t_1 = 8.$$

Figura 1: Solução gráfica para o caso em que $t_1 = -8$

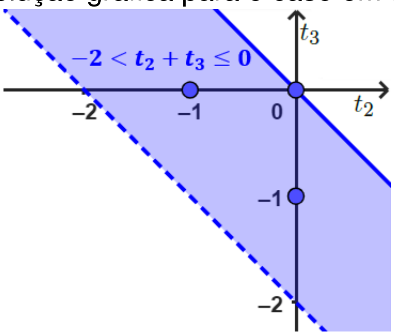


Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Portanto, o único número de quatro algarismos em que a soma desses algarismos é igual a 9, para o caso em que $t_1 = -8$, é o número $xyzw = 1008$.

- Se $t_1 = -7$, a restrição $-9 < t_1 + t_2 + t_3 \leq 0$ pode ser reescrita como $-2 < t_2 + t_3 \leq 7$. Também considerando que deve valer a inequação (18), chega-se a $-2 < t_2 + t_3 \leq 0$. Os pontos $(t_2,\ t_3)$ de inteiros que satisfazem as condições impostas estão destacados na solução gráfica da Figura 2.

Figura 2: Solução gráfica para o caso em que $t_1 = -7$



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Logo, quando $t_1 = -7$, tem-se que as únicas possibilidades para os pares $(t_2,\ t_3)$ são: $(-1,\ 0)$, $(0,\ 0)$ e $(0,\ -1)$. Substituindo estes valores de parâmetros na solução geral (17) obtém-se, respectivamente

$x = 9+t_1+t_2+t_3 = 9-7-1 = 1,\ \ y = -t_3 = 0,\ \ z = -t_2 = 1$ e $w = -t_1 = 7 \ \Rightarrow\ xyzw = 1017.$

$x = 9+t_1+t_2+t_3 = 9-7 = 2,\ \ y = -t_3 = 0,\ \ z = -t_2 = 0$ e $w = -t_1 = 7 \ \Rightarrow\ xyzw = 2007.$

$x = 9+t_1+t_2+t_3 = 9-7-1 = 1,\ \ y = -t_3 = 1,\ \ z = -t_2 = 0$ e $w = -t_1 = 7 \ \Rightarrow\ xyzw = 1107.$

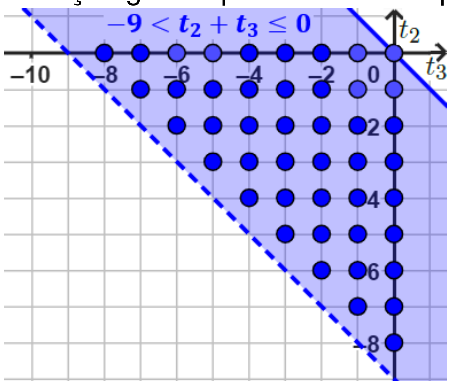
Conclui-se que para $t_1 = -7$ existem exatamente três números de quatro algarismos cuja soma entre eles é igual a 9, são eles $1017,\ 1107$ e 2007.

Para os casos em que $t_1 = -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2$ e -1 as resoluções foram feitas da mesma forma que para os casos anteriores e, por isso, não serão detalhadas no texto. Porém, apresenta-se a resolução detalhada para o caso em que $t_1 = 0$, pois esta é a que mais gerou possibilidades para os pares $(t_2,\ t_3)$ e, consequentemente, implicaram em uma maior quantidade de números de quatro algarismos com a característica procurada.

- Se $t_1 = -6,$ são encontrados seis números: $1026,\ 1116,\ 1206,\ 2016,\ 2106$ e 3006.
- Se $t_1 = -5,$ são encontrados 10 números: $1035,\ 1125,\ 1215,\ 1305,\ 2025,\ 2115,\ 2205,\ 3015,\ 3105,$ e 4005.
- Se $t_1 = -4,$ o total de 15 números são obtidos: $1044,\ 1134,\ 1224,\ 1314,\ 1404,\ 2034,\ 2124,\ 2214, 2304,\ 3024,\ 3114,\ 3204,\ 4014,\ 4104$ e 5004.
- Se $t_1 = -3,$ são 21 números: $1053,\ 1143,\ 1233,\ 1323,\ 1413,\ 1503,\ 2043,\ 2133,\ 2223,\ 2313,\ 2403,\ 3033,\ 3123,\ 3213,\ 3303,\ 4023,\ 4113,\ 4203,\ 5013,\ 5103$ e 6003.
- Se $t_1 = -2,$ são 28 números: $1062,\ 1152,\ 1242,\ 1332,\ 1422,\ 1512,\ 1602,\ 2052,\ 2142,\ 2232,\ 2322,\ 2412,\ 2502,\ 3042,\ 3132,\ 3222,\ 3312,\ 3402,\ 4032,\ 4122,\ 4212,\ 4302,\ 5022,\ 5112,\ 5202,\ 6012,\ 6102$ e 7002.
- Se $t_1 = -1,$ são encontrados 36 números: $1071,\ 1161,\ 1251,\ 1341,\ 1431,\ 1521,\ 1611,\ 1701,\ 2061,\ 2151,\ 2241,\ 2331,\ 2421,\ 2511,\ 2601,\ 3051,\ 3141,\ 3231,\ 3321,\ 3411,\ 3501,\ 4041,\ 4131,\ 4221,\ 4311,\ 4401,\ 5031,\ 5121,\ 5211,\ 5301,\ 6021,\ 6111,\ 6201,\ 7011,\ 7101,$ e 8001.

- Se $t_1 = 0,$ a restrição $-9 < t_1 + t_2 + t_3 \leq 0$ pode ser reescrita como $-9 < t_2 + t_3 \leq 0$. A consideração da inequação (18) não altera esta condição, e os pares $(t_2,\ t_3)$ de inteiros que satisfazem às condições impostas estão apresentados na Figura 3.

Figura 3: Solução gráfica para o caso em que $t_1 = 0$



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Então são 45 combinações possíveis para os pares $(t_2,\ t_3)$, no caso em que $t_1 = 0$. Cada uma delas gera um número da forma $xyzw$ em que $x + y + z + w = 9$. Logo, existem exatamente 45 números com as características procuradas. São eles:

$1080,\ 1170,\ 1260,\ 1350,\ 1440,\ 1530, 1620,\ 1710,\ 1800,\ 2070,\ 2160,\ 2250,\ 2340,\ 2430,\ 2520,\ 2610,\ 2700,\ 3060,\ 3150,\ 3240,\ 3330,\ 3420,\ 3510,\ 3600,\ 4050,\ 4140,\ 4230,\ 4320,\ 4410,\ 4500,\ 5040,\ 5130,\ 5220,\ 5310,\ 5400,\ 6030,\ 6120,\ 6210,\ 6300,\ 7020,\ 7110,\ 7200,\ 8010,\ 8100 \text{ e } 9000.$

Sendo assim, a EDL (11), $x + y + z + w = 9$, estando sujeita às condições $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$ e $0 \leq w \leq 9$, possui exatamente 165 soluções, e todas elas foram determinadas.

Colocando todas as 165 soluções em ordem crescente, com objetivo de verificar com maior facilidade se existe alguma propriedade interessante sobre a quantidade desses números em intervalos de 100 em 100, chega-se à Tabela 4.

DOMINGUES, José Sérgio; REIS, Ana Clara dos Santos; SOUZA, Caroline Helena Costa; BORGES, Alex Eduardo Andrade. Estudo acerca dos números cuja soma dos algarismos é igual a 9 via equações diofantinas lineares. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e3009, 27 de dezembro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6679.

Tabela 4 – Números da forma $xyzw$ em que $x+y+z+w=9$

1008	1143	1323	1602	2070	2250	2601	3132	3411	4122	5004	5310	7011
1017	1152	1332	1611	2106	2304	2610	3141	3420	4131	5013	5400	7020
1026	1161	1341	1620	2115	2313	2700	3150	3501	4140	5022	6003	7101
1035	1170	1350	1701	2124	2322	3006	3204	3510	4203	5031	6012	7110
1044	1206	1404	1710	2133	2331	3015	3213	3600	4212	5040	6021	7200
1053	1215	1413	1800	2142	2340	3024	3222	4005	4221	5103	6030	8001
1062	1224	1422	2007	2151	2403	3033	3231	4014	4230	5112	6102	8010
1071	1233	1431	2016	2160	2412	3042	3240	4023	4302	5121	6111	8100
1080	1242	1440	2025	2205	2421	3051	3303	4032	4311	5130	6120	9000
1107	1251	1503	2034	2214	2430	3060	3312	4041	4320	5202	6201	–
1116	1260	1512	2043	2223	2502	3105	3321	4050	4401	5211	6210	–
1125	1305	1521	2052	2232	2511	3114	3330	4104	4410	5220	6300	–
1134	1314	1530	2061	2241	2520	3123	3402	4113	4500	5301	7002	–

Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Com base nos dados da Tabela 4 e fazendo-se a divisão dos números de quatro algarismos em intervalos de 100 em 100 números, iniciando pelo intervalo de 1000 a 1099, depois passando para o intervalo de 1100 a 1199, em seguida de 1200 a 1299 e assim sucessivamente, até o intervalo de 9900 a 9999, foi possível determinar quantas das soluções encontradas estão em cada um desses intervalos.

No total, do intervalo de 1000 a 1099 até o intervalo de 9900 a 9999 são exatos 90 intervalos. Para os nove primeiros deles, ou seja, de 1000 a 1099 até de 1800 a 1899, a quantidade de números em cada um ocorre pela mesma sequência que aparece no caso de números de três algarismos, isto é, $9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$.

Para o próximo conjunto de nove intervalos, de 1900 a 1999 até de 2700 a 2799, as soluções encontradas não ocorrem no primeiro dos intervalos, e do segundo em diante se distribuem por meio de uma sequência decrescente semelhante à anterior, mas começando pelo número 8. A sequência é: $0,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$.

No conjunto de nove intervalos, de 2800 a 2899 até de 3600 a 3699, as soluções encontradas não ocorrem nos dois primeiros intervalos, e do terceiro em diante se distribuem por meio de uma sequência decrescente, que é semelhante à anterior, mas começando pelo número 7. A sequência é: $0,\ 0,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$.

Esse padrão de comportamento das quantidades de soluções em cada intervalo se mantém até o último deles, ou seja, até o intervalo de 9900 a 9999. Todas essas distribuições de soluções, em forma de sequências numéricas, foram colocadas em uma matriz A de ordem 10×9, em que a linha i é a sequência encontrada para o $i-$*ésimo* conjunto de nove intervalos.

Por exemplo, a linha 3 dessa matriz representa a sequência formada pelas quantidades de soluções que estão no terceiro conjunto de 9 intervalos, a saber, do intervalo de 2800 a 2899 até o intervalo de 3600 a 3699. Sendo que os dois primeiros não possuem soluções, no intervalo de 3000 a 3099 existem 7 soluções, no intervalo de 3100 a 3199 existem 6 soluções, e assim sucessivamente, até o intervalo de 3600 a 3699 que possui apenas uma das soluções em seu interior.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que a matriz A é tal que $a_{ij} = 0 \; \forall \; i > j$ e, assim, ao se considerar apenas até o intervalo de 9000 a 9099, que é último que possui pelo menos uma das soluções encontradas, a última linha da matriz A pode ser desconsiderada, gerando uma matriz triangular superior.

4.3 Análise para todas as soluções encontradas

Considerando o número 9 e todas as soluções encontradas para os casos de números de dois, três e quatro algarismos, cuja soma entre os algarismos é igual a 9, tem-se $1 + 9 + 45 + 165 = 220$ soluções.

Distribuindo todos esses resultados em intervalos de 1000 em 1000, sendo o primeiro aquele que vai de 1 a 999, o segundo de 1000 a 1999, e assim sucessivamente até o último, que vai de 9000 a 9999, obtêm-se exatos 10 intervalos. No primeiro desses intervalos estão alocadas 55 das soluções encontradas, no segundo intervalo estão 45 das soluções, no terceiro estão 36 delas, no quarto são 28, no quinto 21, no sexto 15, no sétimo 10, no oitavo são seis, no nono intervalo estão alocadas três soluções e o último intervalo tem apenas uma das soluções. A consolidação dessa característica em relação à distribuição das soluções está na Tabela 5.

Tabela 5 – Distribuição das soluções para cada intervalo

Intervalo	N° de soluções
1 a 999	55
1000 a 1999	45
2000 a 2999	36
3000 a 3999	28
4000 a 4999	21
5000 a 5999	15
6000 a 6999	10
7000 a 7999	6
8000 a 8999	3
9000 a 9999	1

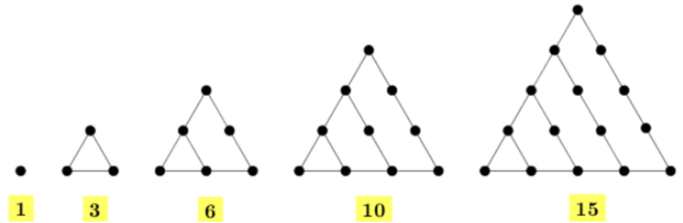
Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Portanto, as 220 soluções encontradas se distribuem nos 10 intervalos de acordo com a seguinte sequência decrescente de dez termos:

$$55,\ 45,\ 36,\ 28,\ 21,\ 15,\ 10,\ 6,\ 3,\ 1.$$

É possível observar que a sequência encontrada corresponde aos 10 primeiros números triangulares dispostos em ordem decrescente, que são os números que podem ser representados por pontos do plano arranjados na forma de triângulos equiláteros, com exceção do número 1, que por conveniência é definido como o primeiro número triangular (Cobb; Patterson; Lemma, 2008; OBMEP, 2023). A Figura 4 apresenta os cinco primeiros números triangulares, mostrando que do segundo em diante é possível agrupar a quantidade de pontos igual ao número, em arranjos triangulares equiláteros.

Figura 4 – Ilustração dos cinco primeiros números triangulares



Fonte: Adaptado de OBMEP (2023).

A sequência crescente infinita de números triangulares pode ser expressa por

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots,\ \tfrac{n(n+1)}{2},\ \ldots$$

O termo geral é dado por $T_n = n(n+1)/2$ pelo fato de que o n-ésimo elemento da sequência corresponde à soma dos n primeiros naturais não nulos, ou seja,

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n.$$

A soma T_n é conhecida como soma de Gauss, e seus termos correspondem a uma progressão aritmética (PA), com primeiro e n-ésimo termos respectivamente iguais a $a_1 = 1$ e $a_n = n$. Logo, como demonstrado em Nascimento *et al.* (2023), ela é dada por

$$T_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}.$$

Então, a sequência encontrada, que representa a quantidade de números cuja soma dos seus algarismos é igual a 9, nos intervalos $[9000, 9999],\ [8000, 8999],\ [7000, 7999],\ \ldots,\ [2000, 2999],\ [1, 999]$, respectivamente, pode ser obtida pela lei de formação

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

sendo n qualquer número natural tal que $1 \leq n \leq 10$.

5 Considerações Finais

Com a motivação da simples característica da tabuada do 9, cujos resultados são números de dois algarismos, ocorreu a motivação do estudo de números maiores, com três e quatro algarismos, e que possuem a mesma característica, que é a soma dos seus algarismos ser igual a 9. Também se propôs a investigar se a forma como os resultados encontrados se distribuíam em intervalos de 100 em 100 números e também de 1000 em 1000, permitiam visualizar alguma característica ainda não analisada na literatura.

Ao se efetuar os estudos e as análises mencionadas, foi possível determinar quantos e quais são os números naturais de três e quatro algarismos cuja soma entre os algarismos seja sempre igual a 9. Para isso, a modelagem realizada para se obter as equações que deveriam ser resolvidas foi feita com uso de equações diofantinas lineares de duas, três e quatro variáveis.

DOMINGUES, José Sérgio; REIS, Ana Clara dos Santos; SOUZA, Caroline Helena Costa; BORGES, Alex Eduardo Andrade. Estudo acerca dos números cuja soma dos algarismos é igual a 9 via equações diofantinas lineares. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e3009, 27 de dezembro de 2023. `https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6679`.

Pela tabuada do 9 e os resultados apresentados, temos o 9 e apenas 9 números de dois algarismos cuja soma entre eles é 9. Também foram encontrados 45 números de três algarismos e 165 com quatro algarismos com esta mesma característica, totalizando 220 números menores que 9999 em que a soma dos seus algarismos é sempre igual a 9.

Considerando intervalos de 100 em 100 números foi possível observar que os resultados determinados se distribuem nos intervalos mencionados de acordo com sequências específicas e, até mesmo, podem gerar uma matriz triangular superior em que as partes não nulas de cada linha são sequências decrescentes. Para intervalos de 1000 em 1000, considerando todos os 220 resultados, a distribuição segue a sequência decrescente dos 10 primeiros números triangulares.

Não foram encontrados na literatura relatos de estudos similares ao realizado neste trabalho, o que garante seu ineditismo. Além disso, o estudo pode ser expandido para números com quantidades maiores de algarismos, possibilitando observar novas características e, até mesmo, utilizar outras técnicas de análise dos dados, como Teoria Combinatória dos Números.

Referências

BERNSTEIN, Leon. **The linear Diophantine equation in variables and its application to generalized Fibonacci numbers**. The Fibonacci Quarterly, v. 6, n. 3, p. 1-63, 1968. Disponível em: https://www.fq.math.ca/Scanned/6-3/bernstein.pdf. Acesso em: 5 dez. 2023.

COBB, Stacy; PATTERSON, Natasha; LEMMA, Mulatu. The fascinating mathematical beauty of triangular numbers. **Georgia Journal of Science**, v. 66, n. 2, article 9, p. 158-168, 2008. Disponível em: https://digitalcommons.gaacademy.org/gjs/vol66/iss2/9. Acesso em: 5 dez. 2023.

DARIO, Ronie Peterson. Equações diofantinas e alocação otimizada de recursos financeiros de pequenos investidores no mercado acionário brasileiro. **REMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 1, p. e3007, jun. 2022. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2022v8i1id5674.

FOMÍN, Serguei Vasil'evich. **Sistemas de numeración**. Lecciones Populares de Matemáticas. Trad.: Carlos Vega. Moscú, Spanish: Editorial MIR, 1975.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

IZMIRLI, Ilhan M. On some properties of digital roots. **Advances in Pure Mathematics**. v. 4, n. 6, p. 295-301, 2014. DOI: https://doi.org/10.4236/apm.2014.46039.

MAN, Yiu-Kwong. A forward approach for solving linear Diophantine equation. **Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. v. 51, n. 8, p. 1284-1288, 2020. DOI:

https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1745915.

NASCIMENTO, Érick Caetano Alves do; SILVA FILHO, Marcos Miguel da; TANAKA, Thiago Yukio; ARAÚJO, Jogli Gidel da Silva. Do termo geral à soma de Gauss: uma abordagem olímpica sobre progressões aritméticas. **REMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3001, jan. 2023. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id5727.

OBMEP. Clubes de Matemática da OBMEP: Disseminando o estudo da Matemática. **Números triangulares**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-leitura-numeros-triangulares/. Acesso em: 3 mar. 2023.

REIS, Ana Clara dos Santos; SOUZA, Caroline Helena Costa; DOMINGUES, José Sérgio. Modelagem matemática para uma propriedade aritmética da tabuada de multiplicação do 9. *In*: SEMINÁRIO DE PESQUISA E INOVAÇÃO, 5., 2022, Formiga. **Anais** [...]. Formiga: IFMG, *Campus* Formiga, 2022. Disponível em: https://www.formiga.ifmg.edu.br/documents/2022/Seminarios%202022/6%20-%20Modelagem%20matematica.pdf. Acesso em: 5 dez. 2023.

RICHIT, Luiz Augusto; RICHIT, Adriana; RICHIT, Andriceli. Solução particular de equações diofantinas lineares $ax + by = c$ via abordagem por substituição progressiva do algoritmo de Euclides. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Itabaiana, SE, v. 6, n. 3, p. 97-122, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/15046. Acesso em: 5 dez. 2023.

RODRIGUES, Flávio Wagner. A prova dos nove: como e por que funciona (ao menos quase sempre). **Revista do Professor de Matemática**, n. 14, p. 17-20, 1989. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/14/3.htm. Acesso em: 5 dez. 2023.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

SOUZA, Romario Sidrone de. **Equações diofantinas lineares, quadráticas e aplicações**. Orientadora: Carina Alves. 2017. 75 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2017. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pos-Graduacao44/programasdepos/souza_rs_me_rcla.pdf. Acesso em: 5 dez. 2023.

VYAWAHARE, Anant. The digital root. **At Right Angles**, v. 5, n. 2, p. 42-44, 2016. Disponível em: https://publications.azimpremjiuniversity.edu.in/1435/1/08-TheDigitalRoot.pdf. Acesso em: 5 dez. 2023.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Secretaria de Extensão, Pesquisa e Pós-Graduação (SEPPG) do IFMG – *Campus* Formiga que, por meio de edital de Iniciação Científica Voluntária (PIVIC), possibilitou a realização deste trabalho.