

Nuances de aspectos teóricos e numéricos do escoamento totalmente desenvolvido em um tubo

Nuances of theoretical and numerical aspects of the fully developed flow in a pipe

Matices de los aspectos teóricos y numéricos del flujo completamente desarrollado en una tubería

Mateus Mitsuo Goto Dakuzaku¹

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Presidente Prudente, SP, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-9583-4547>,  <http://lattes.cnpq.br/7764388744765875>

Caroline Viezel²

Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, SP, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-5091-8296>,  <http://lattes.cnpq.br/2865205239115409>

Gilcilene Sanchez de Paulo³

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Presidente Prudente, SP, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-0146-9367>,  <http://lattes.cnpq.br/5783566438646841>

Resumo: O escoamento totalmente desenvolvido de um fluido Newtoniano em um tubo de seção transversal circular será aplicado para discussões de soluções teóricas e de metodologias numéricas, baseadas na técnica de diferenças finitas. O objetivo é apresentar detalhes da obtenção da solução analítica, das metodologias numéricas utilizadas e da física envolvida, para disseminar um compilado original didático-científico nessa área. O escoamento em questão é modelado por uma equação diferencial parcial elíptica sujeita a uma condição de Dirichlet na fronteira. A fronteira do tubo não coincide com a malha da discretização que é retangular uniforme. Portanto, uma técnica de extrapolação linear será empregada. O sistema linear resultante é resolvido pelos métodos clássicos de Jacobi e Gauss-Seidel para comparação. Um processo de refinamento da malha demonstra que a solução numérica converge para a analítica com ordem $O(h^3)$. A relação entre a quantidade de iterações dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel e o número de condição da matriz do sistema linear corrobora que o método de Jacobi exige aproximadamente o dobro de iterações que o método de Gauss-Seidel para convergir. Resultados sobre a influência dos parâmetros físicos do modelo e

¹**Currículo sucinto:** Engenheiro Civil pela Universidade do Oeste Paulista, licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, pós-graduado em Gerenciamento de Projetos pela Universidade Estadual de Maringá, mestrando do Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista. **Contribuição de autoria:** análise formal, conceituação, curadoria de dados, escrita — primeira redação e edição, investigação, software, validação e visualização. **Contato:** mateus.mitsuo@unesp.br.

²**Currículo sucinto:** Licenciada em Matemática e mestra em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual Paulista, doutora em Ciências da Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo. **Contribuição de autoria:** administração do projeto, análise formal, conceituação, curadoria de dados, escrita — revisão e edição, metodologia, supervisão e visualização. **Contato:** carol.viezel@gmail.com.

³**Currículo sucinto:** Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, mestra em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá, doutora em Ciências da Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo, pós-doutorado na área de Matemática Aplicada pela Universidade do Porto, Portugal. Atualmente, é docente na Universidade Estadual Paulista. **Contribuição de autoria:** administração do projeto, análise formal, conceituação, curadoria de dados, escrita — revisão e edição, metodologia, obtenção de financiamento, recursos, supervisão. **Contato:** gilcilene.sanchez@unesp.br.



a relação entre velocidades média e máxima do escoamento são averiguados. Mostra-se, analiticamente, que o valor absoluto do gradiente de pressão é diretamente proporcional à velocidade, enquanto a viscosidade é inversamente proporcional à essa grandeza, além disso, a relação de proporcionalidade entre as velocidades média e máxima do escoamento é demonstrada teoricamente e aplicada para outras verificações numéricas.

Palavras-chave: diferenças finitas; geometria circular; métodos iterativos; equação de Poisson; solução analítica.

Abstract: The fully developed flow of a Newtonian fluid in a circular cross-section tube will be applied to discussions of theoretical solutions and numerical methodologies, based on the finite difference technique. The objective is to present details of obtaining the analytical solution, the numerical methodologies used and the physics involved, in order to disseminate an original didactic-scientific compilation in this area. The flow in deal is modeled by an elliptic partial differential equation subject to a Dirichlet condition at the boundary. The boundary of the tube does not coincide with the computational mesh which is uniform rectangular. Therefore, a linear extrapolation technique will be employed. The resulting linear system is solved by classical Jacobi and Gauss-Seidel methods for comparison. A mesh refinement process demonstrates that the numerical solution converges to the analytical solution with order $O(h^3)$. The relationship between the number of iterations of the Jacobi and Gauss-Seidel methods and the condition number of the matrix of the linear system corroborates that the Jacobi method requires approximately twice as many iterations as the Gauss-Seidel method to converge. Results about the influence of the physical parameters of the model and the relationship between average and maximum velocities are investigated. It is shown, analytically, that the absolute value of the pressure gradient is directly proportional to the velocity, while the characteristics are inversely proportional to this variable, furthermore, the proportionality relationship between the average and maximum flow velocities is theoretically demonstrated and applied for other numerical verifications.

Keywords: finite differences; circular geometry; iterative methods; Poisson equation; analytical solution.

Resumen: En este estudio, se aplicará a discusiones de soluciones teóricas y metodologías numéricas, basadas en la técnica de diferencias finitas, el flujo completamente desarrollado de un fluido newtoniano en un tubo de sección circular. El objetivo es presentar detalles de la obtención de la solución analítica, las metodologías numéricas utilizadas y las físicas involucradas, para difundir una recopilación didáctico-científica original en esta área. El flujo en cuestión se modela mediante una ecuación diferencial parcial elíptica sujeta a una condición de Dirichlet en la frontera. El límite del tubo no coincide con la malla de discretización, que es uniformemente rectangular. Por lo tanto, se empleará una técnica de extrapolación lineal. El sistema lineal resultante se resuelve mediante los métodos clásicos de Jacobi y Gauss-Seidel a modo de comparación. Un proceso de refinamiento de malla demuestra que la solución numérica converge a la analítica con orden $O(h^3)$. La relación entre el número de iteraciones de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel y el número de condición de la matriz del sistema lineal corrobora que el método de Jacobi requiere aproximadamente el doble de iteraciones que el método de Gauss-Seidel para converger. Se investigan los resultados sobre la influencia de los parámetros físicos del modelo y la relación entre las velocidades de flujo promedio y máxima.



Se demuestra, analíticamente, que el valor absoluto del gradiente de presión es directamente proporcional a la velocidad, mientras que la viscosidad es inversamente proporcional a esta cantidad, además, se demuestra teóricamente y se aplica la relación de proporcionalidad entre las velocidades media y máxima del flujo otras comprobaciones numéricas.

Palabras clave: diferencias finitas; geometría circular; métodos iterativos; ecuación de Poisson; solución analítica.

Data de submissão: 31 de março de 2023.

Data de aprovação: 2 de outubro de 2023.

1 Introdução

O escoamento de um fluido Newtoniano totalmente desenvolvido em um tubo é modelado por uma equação diferencial parcial elíptica. Os problemas de equilíbrio em duas ou três dimensões normalmente também dão origem às equações elípticas. Problemas relacionados à difusão e pressão, elasticidade, camada limite e problemas de vibração de membranas são alguns exemplos. Os problemas elípticos tem como característica a propagação de suas propriedades físicas em todas as direções coordenadas indistintamente, diferentemente das equações parabólicas e hiperbólicas que tem essas propriedades propagadas em uma direção preferencial. Consequentemente os problemas elípticos tem as condições de fronteiras especificadas por toda a fronteira, constituindo assim um problema bem posto (Cuminato; Meneguette Junior, 2013).

Determinar soluções analíticas de problemas matemáticos não é uma tarefa fácil. Em geral, nem mesmo possuem soluções. Uma estratégia para resolver esse tipo de problema é obter uma solução aproximada calculada pela aplicação de métodos numéricos, como por exemplo, os métodos de diferenças finitas. Os métodos de diferenças finitas quando aplicados em uma equação diferencial fornecem uma nova equação denominada equação de diferenças que será aplicada em cada ponto de uma malha construída sobre o domínio computacional. Aplicar a equação de diferenças em malhas cartesianas uniformes e regulares, em que os contornos da geometria coincidem com os nós da malha não é uma tarefa muito complexa, a complexidade maior consiste em estabelecer um tipo de tratamento numérico capaz de considerar as condições de contorno em geometrias em que os pontos da fronteira não coincidem com os pontos de uma malha regular. Alguns métodos foram desenvolvidos com o objetivo de fornecer uma solução aproximada para problemas elípticos em domínios irregulares. Podemos citar métodos baseados em pontos fantasmas (*Ghost Fluid Method*), introduzido inicialmente por Fedkiw *et al.* (1999) para estudar a dinâmica de gases, ou métodos de fronteiras imersas (*Immersed Boundary Method*), proposto pela primeira vez em 1972 por Peskin, para simular escoamento de sangue em mecanismos cardíacos (Peskin, 1972, 1977), e modificado



por LeVeque e Li (1994) para considerar condições de interfaces mais gerais, sendo denominado método de interfaces imersas (*Immersed Interface Method*). Desde então, diferentes autores buscaram aperfeiçoar esses métodos e propor outras técnicas para resolver problemas em que os pontos da fronteira não coincidem com o *stencil* do método aplicado para resolver equações diferenciais parciais do tipo elípticas. Podemos citar alguns autores: Aftosmis, Berger e Melton (1998), Jomaa e Macaskill (2005), Li (1996), Li e Ito (2006), Liu, Fedkiw e Kang (2000) e Mittal e Iaccarino (2005).

O desenvolvimento de diferentes estratégias para resolver equações diferenciais elípticas em domínios irregulares, como os métodos de fronteiras imersas (Peskin, 1972) e os métodos de pontos fantasmas (Fedkiw *et al.*, 1999; Jomaa; Macaskill, 2005; Liu; Fedkiw; Kang, 2000), tem permanecido no foco dos pesquisadores desde os anos de 1990. Trabalhos publicados recentemente desenvolveram métodos de diferenças finitas de alta ordem e analisaram a ordem de convergência quando considerado algum tipo de método de interfaces imersas para resolver equações elípticas em domínios irregulares com descontinuidade (Colnago; Casaca; Souza, 2020; Reis *et al.*, 2013; Zapata; Balam; Montalvo-Urquizo, 2023). Esses trabalhos se preocupam e resolvem muito bem os problemas elípticos cujos contornos não coincidem com a malha. Entretanto, até onde conhecemos dessas e outras literaturas, elas não utilizam a modelagem do escoamento totalmente desenvolvido em um tubo circular como um estudo de caso.

Portanto, considerando a relevância do desenvolvimento e aperfeiçoamento dos métodos numéricos no estudo de fenômenos da área da Mecânica dos Fluidos, este artigo tem como objetivo aplicar uma dessas técnicas de tratamento numérico das condições de contorno para fronteiras que não coincidem com a malha e apresentar resultados obtidos para o problema do escoamento totalmente desenvolvido em um tubo de seção transversal circular (Figura 1) de um fluido Newtoniano, o qual é modelado por uma equação elíptica. Adicionalmente, este artigo vem contribuir com a valorização de uma técnica matemática para obtenção de solução analítica a fim de aplicá-la à análise da metodologia numérica desenvolvida. Por fim, destaca-se também, alguns estudos numéricos de sensibilidade dos parâmetros do modelo à luz da Física e suas interpretações que estão de acordo com as expressões analíticas.

Nas seções a seguir serão apresentadas a formulação matemática do problema, especificando qual o modelo que será resolvido, no caso uma equação diferencial do tipo elíptica; a solução analítica que será utilizada para determinar a ordem de convergência do método numérico; a metodologia numérica detalhando a técnica utilizada para acoplamento das condições de contorno do domínio circular que não coincidem com os nós da malha e os resultados numéricos, juntamente com uma breve análise e discussão sobre aspectos numéricos relevantes, como por exemplo, a ordem de convergência do método de diferenças finitas e o condicionamento da matriz do sistema



linear resultante da aplicação da equação de diferenças em cada ponto interno da malha; e os estudos sobre a influência dos parâmetros do modelo no escoamento. Por fim, são apresentadas as considerações finais.

2 Formulação matemática do problema

As equações de Navier-Stokes para escoamentos de fluidos Newtonianos, isotérmicos, incompressíveis, são modeladas pelas equações da continuidade (1) e da quantidade de movimento (2),

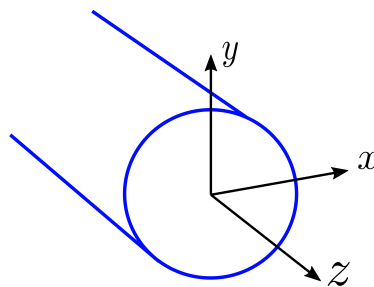
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \tag{2}$$

em $\Omega \times [0, T]$, $T > 0$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto; $t \in [0, T]$ é a variável independente temporal; $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \Omega$ um campo vetorial que representa a velocidade do escoamento em cada $(x, y, z, t) \in \Omega \times [0, T]$, $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$; $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar que mede a pressão em cada $(x, y, z, t) \in \Omega \times [0, T]$ do escoamento, $p = p(x, y, z, t)$, \mathbf{g} o campo gravitacional, e $\rho, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ representam densidade e a viscosidade do fluido, respectivamente.

Neste artigo será considerado um escoamento unidirecional (na direção z) totalmente desenvolvido em um tubo circular reto movido por um gradiente de pressão constante $\frac{\partial p}{\partial z} = \Delta p < 0$, que representa uma queda de pressão ao longo do tubo (ver Figura 1).

Figura 1 – Geometria do problema



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Para esse escoamento específico, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (0, 0, w(x, y))$, e as equações (1) e (2) simplificam-se na equação de Poisson dada por (3),

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, & \text{em } \Omega, \\ w(x, y) = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

em que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e será assumido que a velocidade na parede do tubo é nula, ou seja, condição de fronteira de Dirichlet nula em $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

3 Solução analítica

Nesta seção, uma técnica com base no princípio do máximo, da teoria de equações diferenciais elípticas para a equação de Laplace, será aplicada para obtenção da solução analítica para escoamentos totalmente desenvolvidos em um tubo circular reto (Evans, 1998; Papanastasiou; Georgiou; Alexandrou, 2000).

Seja a equação de Laplace

$$\Delta w = 0, \text{ em } \Omega, \tag{4}$$

com apropriada condição de contorno na fronteira de Ω , $\partial\Omega$. Na equação (4), $w : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função incógnita, Ω é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Definição 3.1. Quando uma função de classe $C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, satisfaz a equação (4) diz-se que a função é harmônica.

Teorema 3.2. (Princípio do Máximo Forte) Seja $w : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica em Ω um conjunto aberto e limitado. Suponha que $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

(i) Então, $\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w$.

(ii) Se, além disso, Ω é conexo e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $w(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} w$, então, w é constante em Ω .

Trocando w por $-w$ e \max por \min obtém-se a versão do Princípio do Mínimo Forte.

Para determinar uma solução para o escoamento totalmente desenvolvido em um tubo circular reto, ou seja, uma solução da equação de Poisson (3), considere o seguinte problema de Laplace bidimensional em coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ em } \Omega, \tag{5}$$

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Admita que a solução da equação de Poisson (3), possa ser escrita como

$$w(x, y) = \hat{w}(x, y) + k_1 x^2 + k_2 y^2, \tag{6}$$

em que k_1 e k_2 são constantes a serem determinadas pela condição de velocidade nula na parede do tubo e de modo que $\hat{w}(x, y)$ seja uma solução do problema de Laplace (5) com condição de contorno constante.



Substituindo a equação (6) na equação (3), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial y^2} + 2k_1 + 2k_2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \text{ em } \Omega. \quad (7)$$

Para que $\widehat{w}(x, y)$ seja uma solução do problema de Laplace (5), a primeira imposição para determinar as constantes k_1 e k_2 é que

$$2k_1 + 2k_2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (8)$$

Por outro lado, na parede do tubo a velocidade é nula, então,

$$0 = w(x, y) = \widehat{w}(x, y) + k_1 x^2 + k_2 y^2, \text{ em } \partial\Omega, \quad (9)$$

ou seja,

$$\widehat{w}(x, y) = -k_1 \left[x^2 + \frac{k_2}{k_1} y^2 \right], \text{ em } \partial\Omega. \quad (10)$$

Agora, a segunda imposição a ser feita para obtenção das constantes k_1 e k_2 é que a condição de contorno para o problema de Laplace (5) seja constante. Sendo assim, de acordo com a equação (10) é suficiente que $k_1 = k_2$, pois $x^2 + y^2 = 1$ na fronteira de Ω . Como consequência,

$$\widehat{w}(x, y) = -k_1, \text{ em } \partial\Omega, \quad (11)$$

e a equação (8), considerando $k_1 = k_2$, fornece

$$k_1 = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (12)$$

Assim, o Teorema 3.2 aplicado ao problema de Laplace (5) garante que \widehat{w} assume seus valores máximo e mínimo na fronteira do problema e, portanto, decorre da equação (11) que a solução deste problema de Laplace é constante $-k_1$, ou seja, $\widehat{w}(x, y) = -k_1$ para todo $(x, y) \in \overline{\Omega}$.

Reescrevendo a equação (6), segue que a solução analítica para o escoamento totalmente desenvolvido em um tubo circular reto, em que a velocidade do escoamento é nula na parede, é dada por:

$$w(x, y) = \frac{-1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (1 - x^2 - y^2). \quad (13)$$

3.1 A relação da velocidade média com o gradiente de pressão e com a velocidade máxima

A velocidade média do escoamento totalmente desenvolvido em um tubo circular reto de raio $R = 1$ será calculada aplicando a Propriedade do Valor Médio para Integrais ao perfil de velocidade $w(x, y)$, representado pela equação (13),

$$\iint_{\Omega} w(x, y) \, dx dy = w_{méd} \cdot \iint_{\Omega} dx dy, \quad (14)$$



em que $w_{méd}$ é o valor médio da velocidade em Ω e $\iint_{\Omega} dx dy$ representa a área de Ω , que por tratar-se de um círculo de raio $R = 1$, tem-se que $\iint_{\Omega} dx dy = \pi$.

Dessa forma, manipulando a equação (14), a velocidade média deste escoamento ($w_{méd}$) pode ser calculada por:

$$w_{méd} = \frac{-1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} (1 - x^2 - y^2) dx dy . \tag{15}$$

A integral dupla da equação (15) é rapidamente resolvida adotando a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, com polo na origem. Seja a transformação $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$, então, o domínio Ω , que é um círculo unitário centrado na origem, é reescrito em coordenadas polares como $\Omega_{\rho\theta} = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$, e o módulo do determinante Jacobiando desta transformação é dado por $|J| = \rho$. Logo,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (1 - x^2 - y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \{1 - \rho^2[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]\} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} , \end{aligned} \tag{16}$$

e, então, substituindo este resultado (16) na equação (15), obtém-se

$$w_{méd} = \frac{-1}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} . \tag{17}$$

A equação (17) diz que a velocidade média do escoamento totalmente desenvolvido em um tubo circular reto é diretamente proporcional ao módulo do gradiente de pressão e inversamente proporcional à viscosidade do fluido.

Note que, para gerar esse escoamento, é necessário impor um gradiente de pressão. Dependendo da aplicação, caso o escoamento tenha que atingir uma certa velocidade média, então é possível ajustar o gradiente de pressão por meio da equação (17) da seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -8 w_{méd} \mu . \tag{18}$$

Por outro lado, ao analisar a solução analítica dada pela equação (13), é possível perceber que quanto menor o valor de $x^2 + y^2$, maior a velocidade, ou seja,

$$w(x, y) = \frac{-1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} [1 - (x^2 + y^2)] \leq \frac{-1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = w(0, 0) ,$$

para todo $(x, y) \in \Omega$. Logo, a velocidade máxima se dará no ponto $(0, 0)$ pela expressão

$$w_{máx} = w(0, 0) = \frac{-1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} . \tag{19}$$

Combinando as equações (17) e (19), nota-se que a velocidade máxima do escoamento totalmente desenvolvido em um tubo circular reto é sempre o dobro da sua velocidade média, ou



seja, a razão entre as velocidades $w_{máx}$ e $w_{méd}$ é sempre 2:

$$\frac{w_{máx}}{w_{méd}} = 2 . \tag{20}$$

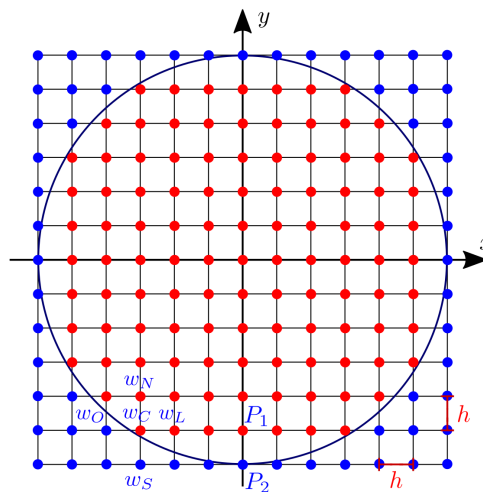
Esses resultados analíticos, dados pelas equações (13), (17) – (20), serão muito úteis na etapa de verificação da metodologia numérica que será apresentada na próxima seção.

4 Metodologia numérica

A metodologia numérica empregada para resolver escoamentos totalmente desenvolvidos de fluidos Newtonianos em um tubo circular reto é baseada na técnica de diferenças finitas adotando uma malha cartesiana bidimensional.

O domínio circular $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ será inscrito em um quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ para definição da malha computacional. Essa malha será construída nas coordenadas cartesianas, com segmentos de retas paralelas aos eixos x e y , de forma que o espaçamento entre estes segmentos tanto na direção x , quanto na direção y será sempre um valor definido h . Os nós dessa malha serão denotados por (x_i, y_j) , com $i = 0, 1, \dots, N$ e $j = 0, 1, \dots, N$ e estão representados em vermelho e azul na Figura 2.

Figura 2 – Malha cartesiana sobre o domínio circular, onde w_k é a velocidade w na célula k



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

A equação de diferenças finitas centrada, de segunda ordem, será utilizada para aproximação da equação de Poisson (3):

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{h^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z},$$

em que $w_{i,j} \approx w(x_i, y_j)$. Reescrevendo a equação de diferenças, tem-se

$$\frac{w_{i+1,j} + w_{i-1,j} - 4w_{i,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}}{h^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z},$$



e multiplicando os dois lados da igualdade por $-h^2$, obtém-se:

$$-w_{i+1,j} - w_{i-1,j} + 4w_{i,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1} = -\frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{21}$$

Seja $w_{i,j} = w_C$ a velocidade no ponto central, como mostra a Figura 2. Tem-se que $w_{i+1,j}$ é a velocidade no ponto vizinho à direita (leste) dele, ou seja, w_L ; sendo assim, ao manter esse padrão, pode-se reescrever a equação (21) da forma:

$$b \cdot w_L + a \cdot w_C + b \cdot w_O + b \cdot w_N + b \cdot w_S = -\frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{22}$$

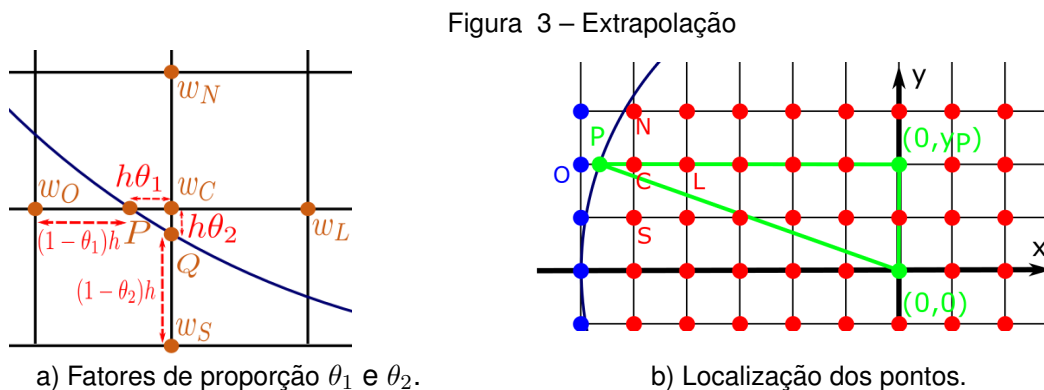
em que $a = 4$, $b = -1$, e as variáveis w_C , w_O , w_L , w_S , w_N são, respectivamente, os valores aproximados da componente da velocidade nos pontos central (C), oeste (O), leste (L), sul (S) e norte (N), que compõem a célula computacional, como pode ser observado na Figura 2.

Os nós da malha, em geral, não coincidem com a fronteira $\partial\Omega$ que é circular (como na Figura 2), então a imposição da condição de contorno de Dirichet irá requerer um tratamento especial.

A subseção 4.1 traz os detalhes da estratégia numérica utilizada para tratar a fronteira circular sobre uma malha cartesiana.

4.1 Tratamento da condição de contorno de fronteira circular em malha cartesiana

Neste artigo, adotam-se uma extrapolação linear e informações da descrição matemática da fronteira $\partial\Omega$, seguindo as ideias de Cuminato e Meneguette Junior (2013), para obter expressões para aproximar w_O e w_S em função do valor w_C , visto na Figura 3 a), em que os pontos O e S não pertencem ao domínio Ω e nem à fronteira $\partial\Omega$. O termo extrapolação é utilizado, pois o ponto desconhecido O, por exemplo, não está entre os pontos conhecidos P e C (ver Figura 3 b)), ou seja, em relação à direção x tem-se que $x_O < x_P < x_C$.



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

A fim de estimar w_O , considere o polinômio interpolador de Lagrange passando pelos pontos x_P e x_C ,



$$\mathcal{W}_x(x) = w_P \cdot \left(\frac{x - x_C}{x_P - x_C} \right) + w_C \cdot \left(\frac{x - x_P}{x_C - x_P} \right).$$

Reescrevendo, vem que

$$\mathcal{W}_x(x) = [w_P \cdot (x - x_C) - w_C \cdot (x - x_P)] \cdot \left(\frac{1}{x_P - x_C} \right). \tag{23}$$

Como deseja-se encontrar uma aproximação para w_O , então a equação (23) avaliada no ponto x_O fornece

$$\mathcal{W}_x(x_O) = [w_P \cdot (x_O - x_C) - w_C \cdot (x_O - x_P)] \cdot \left(\frac{1}{x_P - x_C} \right), \tag{24}$$

e o valor $\mathcal{W}_x(x_O)$ será o valor w_O , simplesmente, $w_O = \mathcal{W}_x(x_O)$.

A questão que ainda precisa ser solucionada é como encontrar a posição exata dos pontos P e Q . Neste artigo, será possível encontrar tais posições exatamente, pois a descrição analítica da fronteira é conhecida.

Para tanto, considere o fator de proporção θ_1 , em que $\theta_1 h$ é a distância entre x_P e x_C , $(1 - \theta_1)h$ é a distância entre x_P e x_O (conforme Figura 3 a)), e $0 < \theta_1 \leq 1$. Conseqüentemente, $x_C - x_O = h$, $x_P - x_O = (1 - \theta_1) \cdot h$ e $x_C - x_P = h \cdot \theta_1$. Então, a equação (24), reduz-se a

$$w_O = \left(\frac{1}{\theta_1} \right) \cdot [w_P - w_C \cdot (1 - \theta_1)], \tag{25}$$

e do fato que $x_C - x_P = h \cdot \theta_1$, tem-se que

$$\theta_1 = \frac{x_C - x_P}{h}. \tag{26}$$

Como o ponto P pertence a uma fronteira circular, então, conforme Figura 3 b),

$$x_P^2 + y_P^2 = r^2. \tag{27}$$

Note ainda que os pontos P e C possuem a mesma ordenada, ou seja, $y_P = y_C$. Com isso, a equação (27) fornece

$$x_P = \pm \sqrt{r^2 - y_C^2}. \tag{28}$$

Se a posição $x_C < 0$, então seu vizinho P também terá o valor x_P negativo. Caso contrário, $x_P > 0$ e será útil para tratar a fronteira localizada nos primeiro e quarto quadrantes para a aproximação de w_L .

Assim, substituindo a equação (28) na equação (26), obtém-se uma expressão para θ_1 que só depende de valores conhecidos, a expressão (29):

$$\theta_1 = \frac{x_C - \sqrt{r^2 - y_C^2}}{h}. \tag{29}$$



Para o problema a ser resolvido neste artigo, da condição de contorno e da definição de $\partial\Omega$, tem-se que $w_P = 0$ e $r = 1$, e, então, as equações (29) e (25) reduzem-se a

$$\theta_1 = \frac{x_C - \sqrt{1 - y_C^2}}{h}, \quad w_O = w_C \cdot \frac{(\theta_1 - 1)}{\theta_1}. \quad (30)$$

Portanto, o valor de w_O na equação de diferenças finitas (22) será calculado conforme (30), sempre que o ponto O não coincidir com a fronteira circular $\partial\Omega$.

Note que o sistema (30) ainda é válido nos casos em que o ponto O coincide com a fronteira, $O = P$, em que os valores $\theta_1 = 1$ e $w_O = 0 = w_P$.

Em relação à direção y , tem-se que $y_S < y_Q < y_C$; então, obtém-se uma aproximação para w_S de maneira análoga, ou seja, $w_S = \mathcal{W}_y(y_S)$, sendo $\mathcal{W}_y(y)$ o polinômio interpolador de Lagrange que passa pelos pontos y_C e y_Q . É evidente que esses casos são estendidos analogamente para as aproximações de w_L e w_N , nas direções x e y , respectivamente, quando necessário.

Ao aplicar a equação (22) para todos os pontos internos do domínio Ω , com o tratamento especial nos pontos necessários próximos ao contorno, obtém-se então um sistema linear que será descrito na subseção 4.2.

4.2 Sistema linear resultante

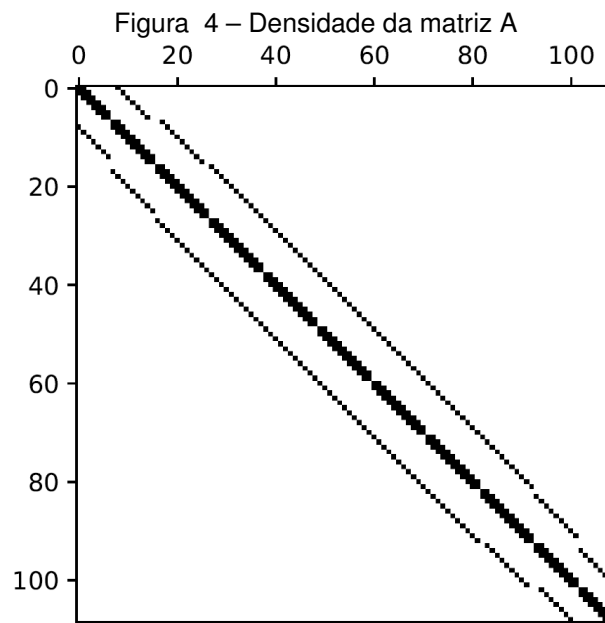
A discretização por diferenças finitas da equação de Poisson (3) gera um sistema linear da forma $A \cdot W = B$, em que B é um vetor conhecido, W é o vetor incógnita e A é a matriz formada pelos coeficientes da equação de diferenças. Quando a malha coincide com a fronteira, que está sob a condição de Dirichlet homogênea, gera um sistema linear cuja matriz associada é pentadiagonal.

Neste artigo, como a fronteira quase sempre não coincide com os nós da malha, a matriz A associada à discretização do problema é uma matriz esparsa, tipo pentadiagonal, pois os valores de A associados aos pontos S e N não estão exatamente alinhados, pelo fato do número de nós na direção x não ser exatamente o mesmo a cada nível na direção y .



coeficiente b , com exceção dos tratamentos especiais nos pontos O e L , nos quais os coeficientes de A tornam-se 0 (zero) no lugar do b ; e existem mais diagonais um pouco mais distantes da diagonal principal com os coeficientes b dispostos em formato “zig-zag” devido aos tratamentos especiais de contorno para os pontos N e S , somado ao fato do número de nós i na direção x não ser o mesmo em todos os níveis j na direção y .

A Figura 4 dispõe os elementos da matriz A com dimensão 109×109 , em que a cor preta representa os valores não nulos e a branca os nulos, sendo possível visualizar a sua esparsidade, bem como o formato das suas diagonais.



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

A matriz A é esparsa; simétrica; diagonalmente dominante, pois $|a_{ii}| = |a| = 4 \geq \sum_{j=1}^{N-1} |a_{ij}|$ para cada $i = 1, \dots, N-1$ (ver (31)); e definida-positiva, sendo que tal característica é uma tendência que foi monitorada numericamente no Python™ por meio do comando `numpy.linalg.eigvals`, que retorna os autovalores de A .

Sabe-se que a matriz dessa mesma discretização da equação de Poisson para domínios quadrados é uma matriz pentadiagonal, simétrica, definida-positiva e mal-condicionada (LeVeque, 2007). No caso deste artigo, em que o domínio é circular, a matriz A mantém-se simétrica, definida-positiva e também mal-condicionada, como veremos na tendência numérica. Lembrando que o número de condição de uma matriz é dado por $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, em que o escalar $cond(A) \geq 1$. Valores próximos de 1, valores mais baixos, mostram que a matriz é bem condicionada. A matriz é dita mal-condicionada quando esse valor estiver por volta de 10^4 , tornando o resultado não confiável. Maiores detalhes podem ser visto em Franco (2006). O valor $cond(A)$ também foi monitorado numericamente em Python™ utilizando o comando `numpy.linalg.cond`.

As soluções numéricas do sistema linear $A \cdot W = B$ serão apresentadas e discutidas na próxima seção. A matriz A é diagonal dominante, então o método de Jacobi é convergente para qualquer chute inicial (Golub; Van Loan, 1996). O fato da matriz ser simétrica e definida-positiva também garante a convergência do método de Gauss-Seidel para qualquer chute inicial (Golub; Van Loan, 1996). Ambos os métodos, Jacobi e Gauss-Seidel, serão convergentes para este problema e, portanto, podem ser aplicados para resolver o sistema linear resultante. É importante ressaltar esse fato, pois, embora esses métodos pertençam a uma mesma família de métodos iterativos, a convergência de um não implica necessariamente a convergência do outro (Franco, 2006).

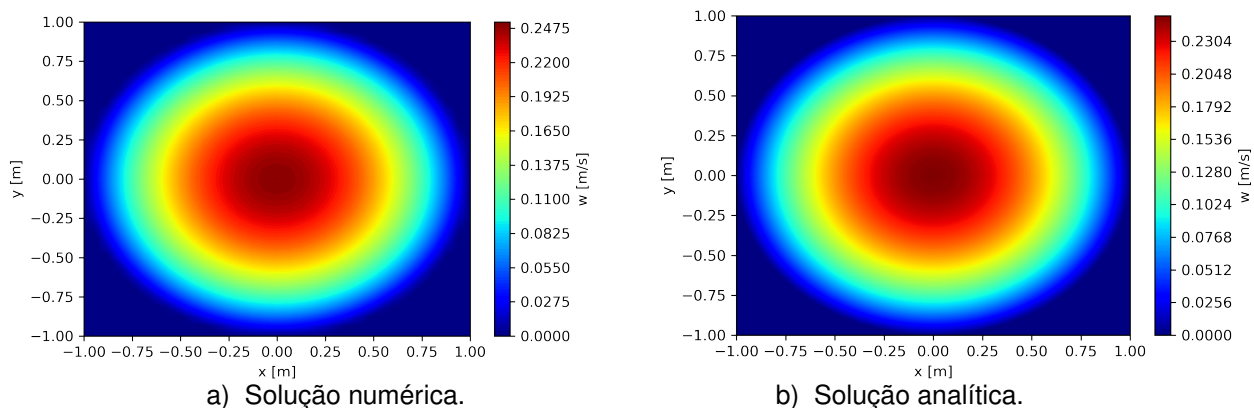
5 Resultados numéricos e discussão

As soluções numéricas para o escoamento totalmente desenvolvido em um tubo circular reto foram obtidas pela implementação da metodologia desenvolvida na seção 4 em linguagem PythonTM de programação. Primeiramente, serão apresentados estudos numéricos que corroboram com a convergência, acurácia e robustez que se espera da metodologia numérica empregada. As soluções analíticas apresentadas na seção 3 serão utilizadas para as comparações com as soluções numéricas. Em seguida, serão apresentados resultados de simulações com o propósito de mostrar a influência de cada parâmetro do modelo no perfil de velocidade do escoamento.

5.1 Análise de convergência

Para iniciar, serão apresentados resultados de comparações entre as soluções numérica (Gauss-Seidel) e analítica de modo qualitativo. A simulação computacional foi realizada considerando: $h = \frac{1}{16} m$, $\frac{\partial p}{\partial z} = -0,1 Pa/m$, $\mu = 0,1 N.s/m^2$.

Figura 5 – Contorno da velocidade w no domínio Ω

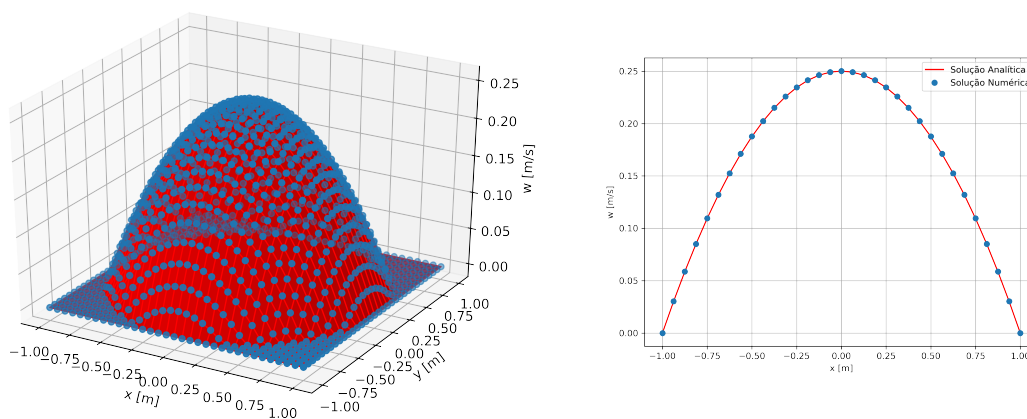


Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Os gráficos dos contornos das soluções numérica e analítica são apresentados, respectivamente, nas Figuras 5 a) e 5 b) para a verificação qualitativa. Pode-se observar que quanto mais ao centro, maior a velocidade do fluido, o que está coerente com a solução analítica.

A Figura 6 a) apresenta a superfície tridimensional com respeito ao domínio Ω , em que a superfície em vermelho é a solução analítica e os símbolos azuis representam a solução numérica. A Figura 6 b) mostra o perfil de w restrito a $y = 0$ e $-1 \leq x \leq 1$. Note que, qualitativamente, o comportamento da solução numérica esta condizente com a solução exata.

Figura 6 – Gráfico da velocidade w



a) w em Ω .

b) w em $y = 0$ e $-1 \leq x \leq 1$.

Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Diante das análises qualitativas satisfatórias, outra análise importante para garantir a robustez das soluções numéricas é quantificar a acurácia e a taxa de convergência do método numérico desenvolvido. Para essas análises quantitativas, será necessário realizar um refinamento de malha.

Para ilustrar o efeito do refinamento da malha na solução numérica e no tratamento da fronteira, considera-se, inicialmente, duas malhas com espaçamentos $h = \frac{1}{16} m$ e $h = \frac{1}{32} m$. Realiza-se uma comparação entre a solução numérica $w_{i,j}$, obtida via método de Gauss-Seidel, e a solução analítica $w(x_i, y_j)$, efetuando ponto a ponto o cálculo do erro $e_{i,j} = |w_{i,j} - w(x_i, y_j)|$.

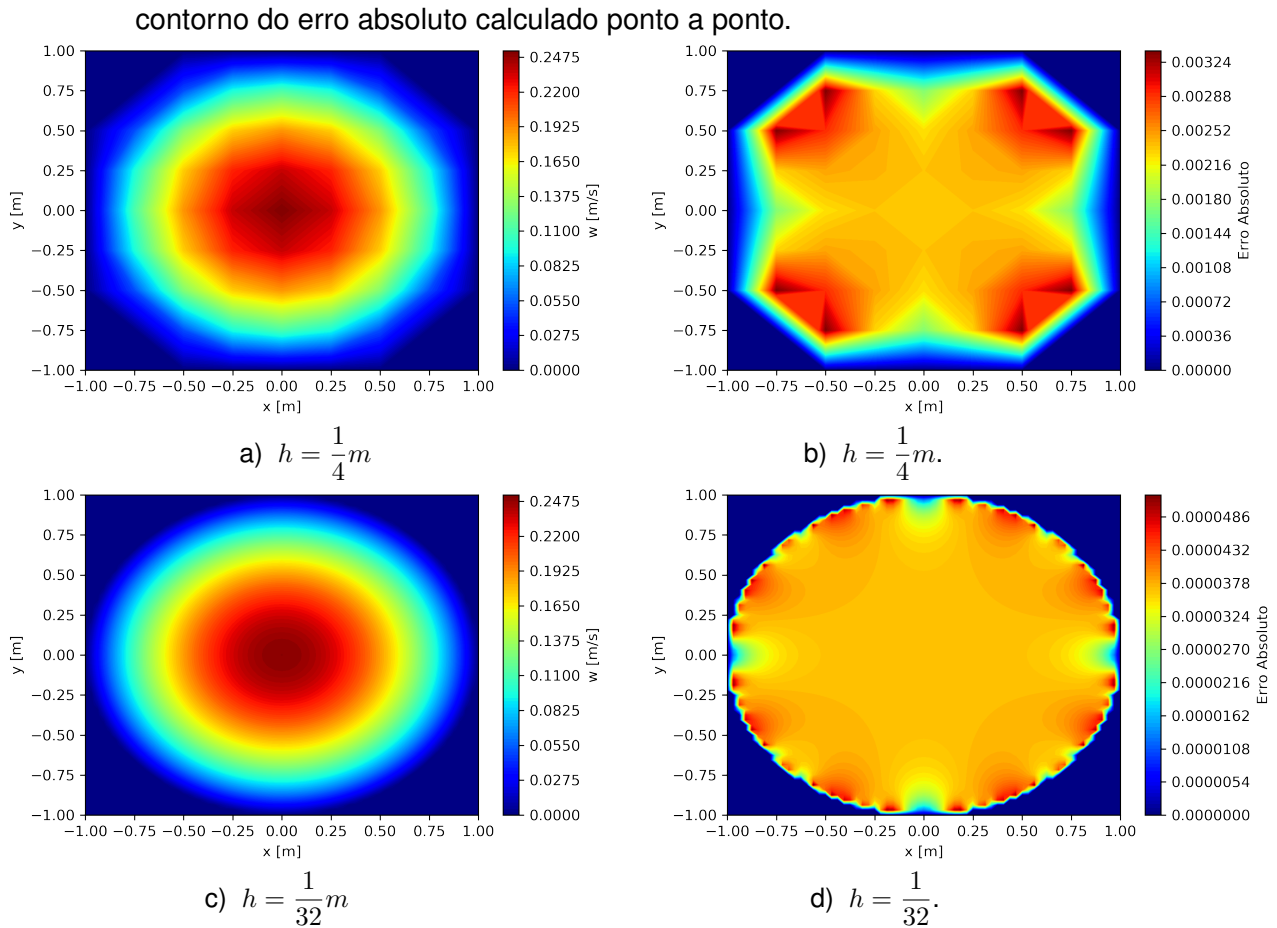
A coluna à esquerda da Figura 7 mostra que, com o refinamento da malha, a solução numérica se aproxima bem mais da solução analítica visualizada na Figura 5 b). Além disso, a coluna à direita da Figura 7 mostra que o maior erro cometido nessa aproximação se dá próximo à fronteira, o que enfatiza a importância desses estudos que envolvem a necessidade de interpolações.

A fim de estimar a acurácia do método numérico, refinamentos da malha foram considerados para verificação do decaimento do erro. Adotou-se o erro relativo considerando a norma-2 que é expresso por $E_2 = \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2}$, em que $e = W - w$ é a diferença entre as soluções numérica W e analítica w , e o erro absoluto na norma-2 é dado por $\|e\|_2 = \left(h^2 \sum_i \sum_j |e_{i,j}|^2\right)^{1/2}$. Com o refinamento da



malha é possível calcular numericamente a ordem de convergência p do método, $p \approx \frac{\log(E_2^{h_1}/E_2^{h_2})}{\log(h_1/h_2)}$, em que h_1 e h_2 são os diferentes espaçamentos adotados no refinamento de malha, e $E_2^{h_1}$, $E_2^{h_2}$ representam o erro relativo na norma-2 para os casos das malhas de espaçamento h_1 e h_2 , respectivamente. Maiores detalhes são encontrados em LeVeque (2007).

Figura 7 – Coluna à esquerda: solução numérica do contorno da velocidade w . Coluna à direita:



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Veja na Tabela 1 que, ao diminuir o espaçamento h , o erro relativo decai, o que indica a convergência do método numérico (Gauss-Seidel). A taxa de convergência obtida é de aproximadamente 3. Acompanhe a mesma análise exposta na Figura 8 a), que mostra o decaimento do erro relativo com o refinamento da malha, na escala log-log pois assim o gráfico se assemelha a uma reta de coeficiente angular 3 ($O(h^3)$), visto que este é o valor aproximado da ordem de convergência obtido na Tabela 1.

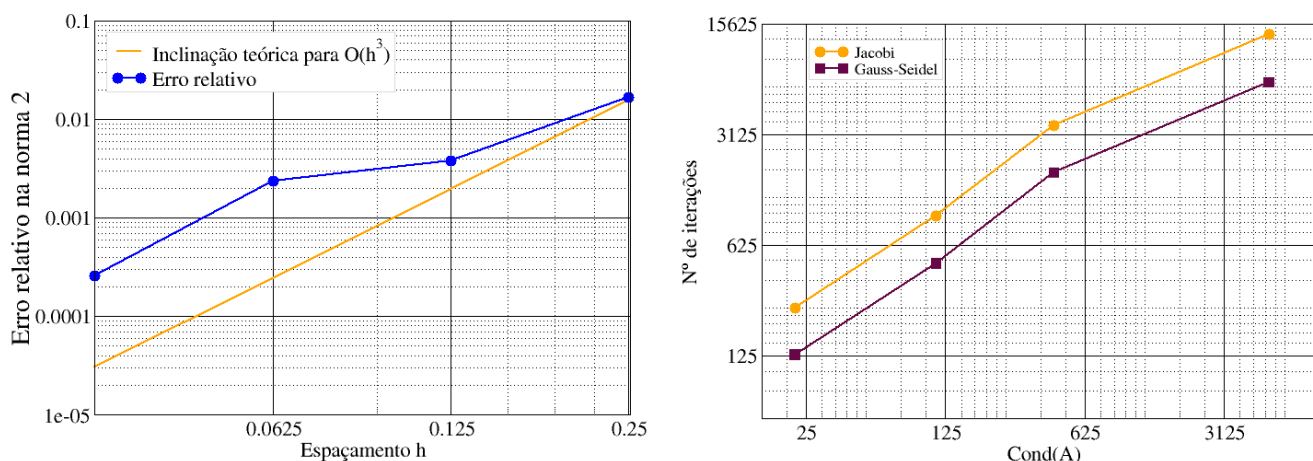
Tabela 1 – Erro relativo e ordem de convergência

Valores de h	Erro relativo	Ordem de convergência
1/4	1,68 e-02	-
1/8	3,78 e-03	3,15
1/16	1,17 e-03	2,69
1/32	2,57 e-04	3,19

Fonte: Elaboração dos autores (2022).



Figura 8 – Refinamento da malha



a) Erro relativo na norma-2, sendo W obtido via método de Gauss-Seidel.

b) Número de iterações e condição da matriz A .

Fonte: Elaboração dos autores (2022).

5.1.1 Discussão da solução do sistema linear

A seguir, serão apresentados resultados numéricos sobre o desempenho dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel em função do número de condição da matriz envolvida nessa discretização por diferenças. Os resultados podem ser observados na Tabela 2, bem como na Figura 8 b).

Tabela 2 – Número de condição da matriz e número de iterações para solução do sistema linear

Valores de h	$cond(A)$	Iterações Jacobi	Iterações Gauss-Seidel
1/4	21,96	251	127
1/8	111,92	954	479
1/16	435,43	3582	1793
1/32	5222,75	13360	6682

Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Com o refinamento da malha, a dimensão da matriz aumenta e o valor de $cond(A)$ também aumenta, comportamento semelhante à formulação em que a malha coincide com o contorno (Cuminato; Meneguette Junior, 2013). Observa-se nos dados da Tabela 2 e na Figura 8 b) que o número de iterações necessárias é mais alto ao refinar a malha, para ambos os métodos. Para corroborar com a discussão desse fato, da teoria sabe-se que o erro relativo para esses casos é estimado pelo número de condição da matriz por $E = \frac{\|W^{(k)} - w\|}{\|w\|} \leq cond(A) \frac{\|B - A \cdot W^{(k)}\|}{\|B\|}$ (Burden; Faires; Burden, 2015), em que k representa o número de iterações. Assim, para $cond(A)$ cada vez mais alto, o erro relativo E pode precisar de um número maior de iterações para satisfazer o critério de parada.



Para finalizar, é interessante destacar que o método de Jacobi utiliza aproximadamente o dobro do número de iterações quando comparado ao desempenho do método de Gauss-Seidel (Tabela 2 e Figura 8 b)), fato presente na literatura para o sistema linear semelhante, resultante da formulação em que a malha coincide com o contorno (Cuminato; Meneguette Junior, 2013).

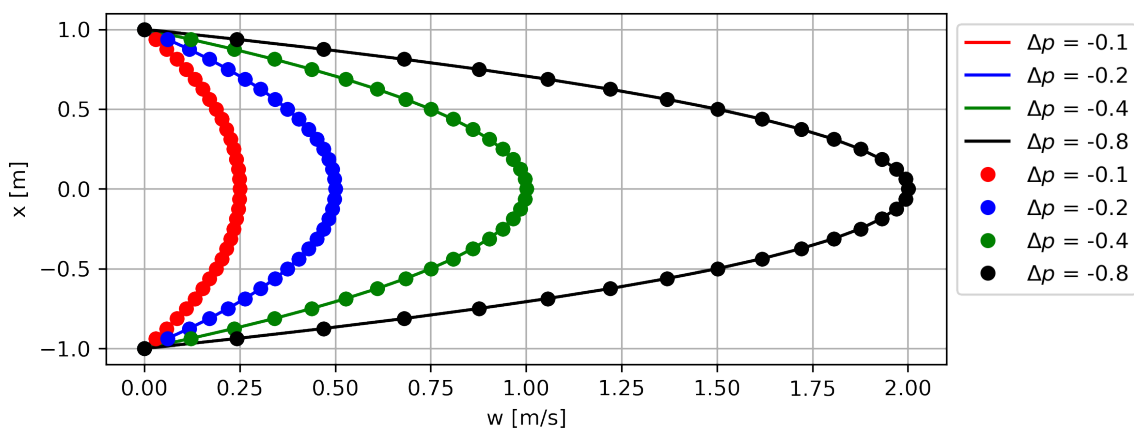
5.2 Influência dos parâmetros no escoamento

A modelagem do escoamento totalmente desenvolvido em tubo circular reto apresenta duas constantes importantes: o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial z}$ e a viscosidade do fluido μ . A fim de compreender os efeitos dessas constantes, serão realizadas simulações computacionais para diversos valores dessas constantes. Além disso, os resultados numéricos serão comparados com as respectivas soluções analíticas, como mais uma forma de corroborar que o método é robusto.

Primeiramente, estudaremos a influência do gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial z}$ no perfil de velocidade w . Para essas simulações, serão utilizados os seguintes dados: malha em que $h = \frac{1}{16}m$ e $\mu = 0,1 N.s/m^2$; diferentes valores do gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial z} = -0,1; -0,2; -0,4; e -0,8 Pa/m$.

A Figura 9 apresenta todos os perfis de velocidade w em função de diferentes valores de $\frac{\partial p}{\partial z}$. É possível perceber que ao aumentar o gradiente de pressão (aumento em valor absoluto), a velocidade do fluido aumenta.

Figura 9 – Influência do gradiente de pressão na velocidade do escoamento restrito a $y = 0$ e $-1 \leq x \leq 1$. Linhas contínuas representam a solução analítica, círculos representam a solução numérica e $\frac{\partial p}{\partial z} = \Delta p$.



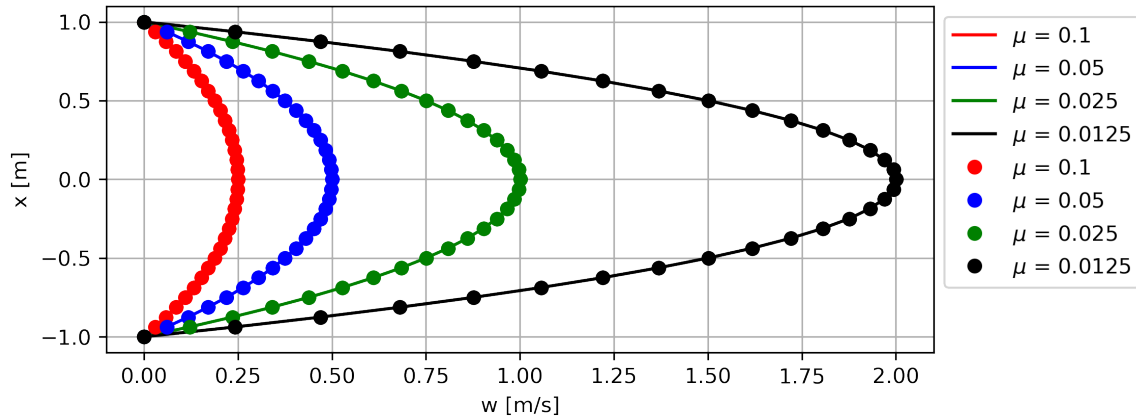
Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Para finalizar, será estudado o efeito da viscosidade do fluido μ no perfil de velocidade w desse escoamento. Os dados de entrada para as simulações computacionais são: malha em que $h = \frac{1}{16}m$; gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial z} = -0,1 Pa/m$; diversos valores para a viscosidade do fluido, $\mu = 0,1; 0,05; 0,025; e 0,0125 N.s/m^2$.



A Figura 10 apresenta os diferentes perfis da velocidade w em função da viscosidade. É possível perceber que, ao diminuir a viscosidade do fluido μ , a velocidade do fluido aumenta.

Figura 10 – Influência da viscosidade do fluido na velocidade do escoamento restrito a $y = 0$ e $-1 \leq x \leq 1$. Linhas contínuas representam a solução analítica e círculos representam a solução numérica.



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Os resultados numéricos estão em boa concordância com as respectivas soluções analíticas, como pode-se ver qualitativamente nas Figuras 9 e 10.

Para não repetir as estratégias de análise de convergência quantitativa da seção 5, outra forma de demonstrar quantitativamente a boa convergência da presente metodologia numérica é calcular numericamente as velocidades média e máxima e comparar com as expressões analíticas. Considere a seguinte simulação: espaçamento $h = \frac{1}{16} m$, $\frac{\partial p}{\partial z} = -0,1 Pa/m$, $\mu = 0,1 N.s/m^2$. Os resultados numéricos obtidos foram: $w_{méd} \approx 0,126$ e $w_{máx} \approx 0,250$. A razão entre esses valores resulta em $\frac{w_{máx}}{w_{méd}} = 1,981 \approx 2$, que está de acordo com a previsão teórica dada pela equação (20).

Para finalizar as observações de concordância, observe que o valor numérico da velocidade máxima, de aproximadamente $0,25 m/s$, também pode ser visto na Figura 9 (ou também na Figura 10), gráfico em vermelho, no ponto $x = 0$, o que está de acordo com a equação (19).

6 Considerações finais

O presente artigo conseguiu reunir questões teóricas, numéricas e físicas, utilizando uma modelagem por equação diferencial parcial do tipo elíptica para o escoamento totalmente desenvolvido, no estado estacionário incompressível e isotérmico de um fluido Newtoniano em um tubo infinitamente longo de seção transversal circular.

Os detalhes da obtenção da solução analítica para o problema abordado podem despertar o interesse de muitos estudiosos em explorar e contribuir mais com essa área. Um fato interessante



dos problemas que envolvem uma geometria circular é que eles exigem um tratamento especial nos pontos da fronteira que não coincidem com os pontos da malha retangular uniforme. Para o presente artigo, o tratamento escolhido foi a extrapolação linear. Aplicando esse procedimento numérico ao problema elíptico que modela o referido escoamento, podemos elencar as principais conclusões:

- Vimos tanto analiticamente quanto numericamente que a velocidade máxima é o dobro da velocidade média e ela pode ser representada na forma:

$$w_{m\acute{a}x} = w(0,0) = \frac{-1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} .$$

- A análise qualitativa nos permitiu observar que a solução numérica é condizente com a solução analítica. Vimos também que uma comparação ponto a ponto, $e_{i,j}$, nos permitiu observar que, com o refinamento da malha, a solução numérica se aproxima cada vez mais da solução analítica (Figura 7).
- A análise quantitativa do erro relativo (Tabela 1) nos mostrou a convergência do método numérico, com taxa de convergência de aproximadamente 3.
- A escolha do método iterativo deve ser feita observando as características da matriz. Sua escolha interfere no número de iterações necessárias, o que muitas vezes pode interferir na velocidade do cálculo computacional. Observou-se que o método de Jacobi necessita do dobro de iterações ao ser comparado com o método de Gauss-Seidel, neste contexto. É importante observar também o condicionamento da matriz para que a solução seja considerada confiável.
- Analisando a influência do gradiente de pressão, percebemos que o aumento em valor absoluto desse parâmetro causa um aumento na velocidade do fluido.
- Analisando a influência da viscosidade do fluido, verificamos que quanto menor a viscosidade do fluido, maior sua velocidade de escoamento, considerando que os demais parâmetros sejam iguais e estejam fixos.

Pelos detalhes expostos em cada uma das vertentes, teórica, numérica e física, espera-se que este texto original possa ser um instrumento didático-científico para auxiliar na formação de recursos humanos nesta área.



Referências

- AFTOSMIS, M. J.; BERGER, M. J. ; MELTON, J. E. Robust and efficient Cartesian mesh generation for component-based geometry. **AIJA Journal**, v. 36, n. 6, p. 952-960, 1998. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.464>.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J.; BURDEN, A. M. **Análise Numérica**. 3. ed. São Paulo: Cengage, Leaning, 2015.
- COLNAGO, M.; CASACA, W.; SOUZA, L. F. de. A high-order immersed interface method free of derivative jump conditions for Poisson equations on irregular domains. **Journal of Computational Physics**, v. 423, 2020. DOI: https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2020JCoPh.42309791C/doi:10.1016/j.jcp.2020.109791.
- CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JUNIOR, M. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. Coleção Matemática Aplicada. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- EVANS, Lawrence C. **Partial differential equations**. Graduate Studies in Mathematics. v. 19. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.
- FEDKIW, R. P.; ASLAM, T.; MERRIMAN, B.; OSHER, S. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). **Journal of Computational Physics**, v. 152, n. 2, p. 457-492, 1999.
- FRANCO, N. M. B. **Cálculo Numérico**. 1. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- GOLUB , G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations**. 3. ed. London: Johns Hopkins University Press, 1996.
- JOMAA, Z.; MACASKILL, C. The embedded finite difference method for the Poisson equation in a domain with an irregular boundary and Dirichlet boundary conditions. **Journal of Computational Physics**, v. 202, n. 2, p. 488-506, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.07.011>.
- LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems**. Philadelphia: SIAM, 2007.
- LEVEQUE, R. J.; LI, Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 31, n. 4, p. 1019-1044, 1994. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2158113>. Acesso em: 16 mar. 2024.
- LI, Z. A note on immersed interface method for three-dimensional elliptic equations. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 31, n. 3, p. 9-17, 1996. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(95\)00202-2](https://doi.org/10.1016/0898-1221(95)00202-2).
- LI, Z.; ITO, K. **The immersed interface method: numerical solutions of PDEs involving interfaces and irregular domains**. Philadelphia: SIAM, 2006.
- LIU, X.-D.; FEDKIW, R. P.; KANG, M. A boundary condition capturing method for Poisson's equation on irregular domains. **Journal of Computational Physics**, v. 160, n. 1, p. 151-178, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6444>.



MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 37, p. 239-261, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>.

PAPANASTASIOU, T. C.; GEORGIU, G. C.; ALEXANDROU, A. N. **Viscous Fluid Flow**. Florida: CRC Press LLC, 2000.

PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: a numerical method. **Journal of Computational Physics**, v. 10, n. 2, p. 252-271, 1972. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(72\)90065-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(72)90065-4).

PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. **Journal of Computational Physics**, v. 25, n. 3, p. 220-252, 1977. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(77\)90100-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(77)90100-0).

REIS, G. A. dos; TASSO, I. V. M.; SOUZA, L. F. de; CUMINATO, J. A. Fast and precise solution for the Poisson equation in the presence of interfaces with discontinuities. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 22., 2013, Ribeirão Preto. **Anais [...]**. Ribeirão Preto: ABCM, 2013. p. 1464-1471. Disponível em: <https://abcm.org.br/app/webroot/anais/cobem/2013/PDF/328.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2024.

ZAPATA, M. U.; BALAM, R. I.; MONTALVO-URQUIZO, J. A compact sixth-order implicit immersed interface method to solve 2D Poisson equations with discontinuities. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 210, p. 384-407, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.03.012>.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (Processo 2022/00403-7).

