Potências de p em bases da forma $2p$

Powers of p in bases of the form $2p$

Potencias de p en bases de la forma $2p$

Laerte Bemm[1]
Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, PR, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-0326-7662, http://lattes.cnpq.br/9359010385810831

Priscila Costa Ferreira de Jesus Bemm[2]
Maringá, PR, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-1998-5973, http://lattes.cnpq.br/1838223042728028

Resumo: Nesse trabalho, vamos explorar o cálculo de potências de p em bases da forma $2p$. Veremos que se p é par e $n \geq 2$, então a potência p^n (na base $2p$), tem o algarismo da unidade igual a 0. Para o caso em que p é ímpar da forma $p = 2q + 1$, com q par, a potência p^n (na base $2p$), tem o algarismo da unidade igual a p e o algarismo de segunda ordem igual a q. Mais ainda, veremos que tais potências podem ser obtidas recursivamente por meio de uma divisão por 2 e acréscimo de algarismos específicos a direita desse quociente.

Palavras-chave: Recorrências; Potenciação; Bases Numéricas Pares.

Abstract: In this work, we will explore the calculation of powers of p in bases of the form $2p$. We will see that if p is even and $n \geq 2$, then the power p^n (in base $2p$) has the unit digit equal to 0. In the case in which p is odd of the form $p = 2q + 1$, with q even, the power p^n (in base $2p$) has the unit digit equal to p and the second-order digit equal to q. Furthermore, we will see that such powers can be recursively obtained by through a division by 2 and the addition of specific digits to the right of this quotient.

Keywords: Recurrence Relation; Powers; Even Numerical Bases.

Resumen: En este trabajo exploraremos el cálculo de potencias de p en bases de la forma $2p$. Veremos que si p es par y $n \geq 2$, entonces la potencia p^n (en la base $2p$), tiene el dígito de la unidad igual a 0. Para el caso donde p es impar en la forma $p = 2q + 1$, siendo q par, la potencia p^n (en base $2p$), tiene el dígito unitario igual a p y el dígito de segundo orden igual a q. Además, veremos que tales potencias se pueden obtener recursivamente dividiendo por 2 y sumando dígitos específicos a la derecha de este cociente.

[1]**Currículo sucinto**: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria, mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá, doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, docente da Universidade Estadual de Maringá. **Contribuição de autoria**: Análise formal, Conceituação, Escrita – Primeira redação, Escrita – Revisão e edição, Investigação, Metodologia, Supervisão. **Contato**: lbemm2@uem.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licenciada e mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Atuou como cientista de dados na empresa Adaction Internet S. A. **Contribuição de autoria**: Análise formal, Conceituação, Escrita – Revisão e edição, Investigação, Metodologia. **Contato**: priscila.dejesus@gmail.com.

Palabras clave: Recurrencias; Potenciación; Bases Numéricas Pares.

Data de submissão: 20 de março de 2023.

Data de aprovação: 12 de junho de 2023.

1 Introdução

A potenciação de números inteiros é um conceito matemático fundamental, pois ele nos permite escrever certos produtos de maneira sucinta. Um exemplo disso é a notação científica, muito utilizada na Física. Em Teoria de Grupos e Teoria de Anéis, a potenciação é utilizada para definir, por exemplo, os conceitos de nilpotência e idempotência. A potenciação é um assunto vasto e complexo que apresenta muitas propriedades e aplicações interessantes. Um exemplo de sua aplicação é o Teorema Fundamental da Aritmética que afirma: todo número inteiro maior que 1 ou é primo ou pode ser escrito de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto finito de potência de números primos (HEFEZ, 2016, Teorema 7.3).

Como o nosso intuito é estudar potências de números inteiros, vamos relembrar esse conceito. Para todos os efeitos, nós sempre vamos considerar que 0 é um número natural.

Dado um número inteiro $a \neq 0$ e um número natural n, define-se a **potência** a^n da seguinte forma:

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ a, & \text{se } n = 1 \\ a^{n-1} \cdot a, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Isso significa que toda potência natural maior que 1 de um número inteiro a é calculada de forma recursiva, via a multiplicação da potência anterior por a. Define-se $0^n = 0$, para todo $n \geq 0$ e 0^0 não é definido.

As potências de números inteiros são ricas em propriedades. Por exemplo, na Seção 3.1 de Hefez (2016) encontramos os seguintes três resultados a respeito de divisibilidade de somas e diferenças de potências. O número n é chamado **expoente**.

Proposição 1.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e n um número natural. Então:*

1. *$a - b$ divide $a^n - b^n$, sempre que $n \geq 1$;*

2. *$a + b$ divide $a^{2n+1} + b^{2n+1}$;*

3. $a+b$ *divide* $a^{2n}+b^{2n}$*, sempre que* $n \geq 1$*.*

Mais ainda, na Seção 6.2 de Hefez (2016), encontramos diversos resultados que determinam o máximo divisor comum entre somas e diferenças de potências de números inteiros. Outro resultado importante e que merece destaque é o seguinte resultado devido a Euler, cuja demonstração pode ser encontrada em Hefez (2016, p. 197).

Teorema 1.2. *Sejam* $a, m \in \mathbb{Z}$ *com* $m > 1$ *e* $mdc(a, m) = 1$*. Então,* m *divide* $a^{\varphi(m)} - 1$*, em que* $\varphi(m)$ *denota a quantidade números naturais entre* 0 *e* $m-1$ *que são coprimos com* m*.*

Uma das mais importantes aplicações da potenciação é sua utilização nos sistemas de numeração. Segundo Milies e Coelho (2006, Seção 2.2), os mais antigos sistemas numéricos escritos que temos conhecimento são dos antigos egípcios e sumérios que datam de 3.500a.C. Gregos e hebreus desenvolveram sistemas de numeração que atribuíam valores numéricos às letras. O sistema de numeração romano (que hoje utilizamos para numerar séculos, capítulos de livros etc.) mostra a influência grega no uso de letras para denotar números. Porém, atualmente utilizamos um sistema de numeração muito mais elegante que os anteriores. Ele foi desenvolvido na Índia, aproximadamente no final do século V e consiste em uma coleção de dez símbolos (chamados **algarismos**) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ e 9, com os quais pode-se escrever qualquer número inteiro positivo como uma sequência desses algarismos. A posição do algarismo no número indica seu peso: o algarismo mais a direita tem peso 0, o próximo tem peso 10, o seguinte peso 10^2 e assim por diante. Dito de maneira formal, todo número inteiro positivo a pode ser escrito de modo único na forma

$$a = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i,$$

com $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, k$. Tal sistema é chamado **posicional decimal**.

Na antiguidade haviam povos que faziam uso de outras bases para seus sistemas de numeração. Por exemplo, os babilônios adotavam o sistema sexagesimal, que ainda hoje é usada para medir ângulos e marcar o tempo. A civilização pré-colombiana maia adotava o sistema vigesimal. Mais recentemente, com o advento da eletrônica e da computação, os sistemas de numeração binário, octal e hexadecimal passaram a serem usadas por essas áreas.

De modo geral, (MILIES; COELHO, 2006, Teorema 2.2.1) se $\beta \geq 2$ é um inteiro (chamado **base numérica**), então todo número inteiro positivo a pode ser escrito de modo único na forma

$$a = a_k\beta^k + a_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i\beta^i,$$

em $a_i \in \{0, 1, \ldots, \beta-1\}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, k$. Nesse caso, escrevemos $a = (a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_\beta$ e diremos que essa é a **expansão β-ésimal** de a. Quando trabalharmos com a base 10, escreveremos simplesmente $a = a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ e diremos que esta é a **expansão decimal** de a. Os números $a_0, a_1, \ldots, a_k$ são chamados de **algarismos** de a. O algarismo a_i é dito ser de **ordem** $(i+1)$.

Essa forma de escrita nos permite desenvolver algoritmos para as operações elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros. Na escola básica aprendemos tais algoritmos para a expansão decimal, mas eles podem ser naturalmente estendidos para expansões β-ésimais quaisquer (FOMÍN, 1975, p. 14-16; ROCHA, 2019, cap. 2). Em Kumayama (1991), consta um algoritmo alternativo para a multiplicação de inteiros na expansão decimal.

Em Coxford e Shulte (1988, p. 206-211), os autores utilizam a expansão decimal para demonstrar alguns fatos curiosos sobre os números inteiros, dentre os quais destacamos os seguintes:

(i) Se um número inteiro que possui uma quantidade par de algarismos, for somado ao seu reverso, o resultado será um múltiplo de 11. Por exemplo, $2745 + 5472 = 11 \cdot 747$.

(ii) O produto dois números inteiros de dois algarismos, que tem a mesma dezena e a soma das unidades é 10, pode ser obtido da seguinte forma: concatena-se o produto da dezena pelo seu sucessor com o produto das unidades. Por exemplo, $53 \cdot 57 = (5 \cdot 6)(3 \cdot 7) = 3021$.

Note que (i) e (ii) não têm grandes aplicações práticas, mas a busca por padrões, fórmulas e algoritmos (coisas inerentes ao universo matemático), nos levantam uma questão natural: os itens (i) e (ii) são válidos para expansões β-ésimas gerais? Ou seja, são verdadeiras as seguintes afirmações?

(i') Se um número inteiro, escrito na base β, que possui uma quantidade par de algarismos, for somado ao seu reverso, o resultado será um múltiplo de $\beta + 1$.

(ii'') O produto dois números inteiros com dois algarismos, ambos escritos na base β, que tem o mesmo algarismo de 2ª ordem e a soma dos algarismos da 1ª ordem é β, pode ser obtido da seguinte forma: concatena-se o produto do algarismo de 2ª ordem pelo seu sucessor, com o produto dos algarismos de 1ª ordem.

Vamos provar o item (i'), para números com 4 algarismos, pois o caso geral é análogo. Considere $(abcd)_\beta$. Então,

$$\begin{aligned}(abcd)_\beta + (dcba)_\beta &= (a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d) + (d\beta^3 + c\beta^2 + b\beta + a)\\ &= (a+d)(\beta^3+1) + (b+c)(\beta^2+\beta)\\ &= (a+d)(\beta^2-\beta+1)(\beta+1) + (b+c)\beta(\beta+1)\\ &= [(a+d)(\beta^2-\beta+1) + (b+c)\beta](\beta+1),\end{aligned}$$

que é um múltiplo de $\beta+1$.

Para provarmos (ii'), denotemos por a o algarismo de 2ª ordem que é comum aos dois números. Se b denota o algarismo de 1ª ordem de um dos números, então o algarismo de 1ª ordem do outro número é $\beta - b$. Assim, um dos números é escrito como $a\beta + b$ e o outro como $a\beta + (\beta - b)$. O produto deles é:

$$\begin{aligned}(a\beta+b)(a\beta+(\beta-b)) &= (a\beta+b)(a\beta+\beta-b)\\ &= a^2\beta^2 + a\beta^2 - ab\beta + ab\beta + b\beta - b^2\\ &= a(a+1)\beta^2 + b(\beta-b),\end{aligned}$$

como queríamos.

Em Machado (1998), há o seguinte algoritmo que determina o quadrado de um número terminado em 5 no sistema decimal:

(iii) Separa-se o algarismo 5 da unidade do número e multiplica-se o número restante por seu sucessor; em seguida, concatena-se esse produto com 25. Por exemplo, $75^2 = (7\cdot 8)25 = 5625$.

Em particular, podemos calcular as seguintes potências de 5 no sistema decimal:

$$\begin{aligned}5^2 &= (0\cdot 1)25 = 25;\\ 5^4 &= (25)^2 = (2\cdot 3)25 = 625;\\ 5^8 &= (625)^2 = (62\cdot 63)25 = 390625.\end{aligned}$$

Embora possamos utilizar (iii) para calcular as potências 5^{2^n} na base decimal, não é possível utilizá-lo para calcular as potências ímpares, por exemplo.

Na próxima seção, traremos o Algoritmo 2.1 que nos permite calcular as potências de 5 recursivamente por meio de uma divisão por 2 e uma concatenação. A descoberta de tal algoritmo ocorreu de forma totalmente involuntária, enquanto tentávamos provar (por indução) que toda potência de 5 termina em 25 (veja o Lema 2.2). Devido à estrutura de resolução desse problema, percebemos o padrão descrito no Algoritmo 2.1. Como $5 = \dfrac{10}{2}$ havia sido importante, naturalmente surgiu a seguinte pergunta: podemos determinar um algoritmo semelhante para outras bases pares? Essa foi a motivação para que considerássemos bases do tipo $\beta = 2p$, em que p é um inteiro e estudássemos as potências naturais de p. O fruto desse estudo encontra-se no presente trabalho, no qual vamos mostrar que as potências p^n, com $n \geq 2$, podem ser obtidas recursivamente via uma divisão por 2, em vez de uma multiplicação por p.

Embora os estudos em bases não decimal seja muito incomum, nosso trabalho não é alheio à literatura. De fato, há trabalhos em que os autores consideram bases diferentes da decimal em seus estudos. Dentre eles, destacamos Costa e Santos (2022), que estudam os números de Ball generalizados. É mostrado nesse trabalho, entre outras coisas, que há uma forte relação entre esses números e a sequência de Fibonacci.

Para uma melhor organização do nosso trabalho, nós o dividimos em seções. Na seção 2, estudamos as potências de 5 na base 10 e apresentamos um algoritmo que permite calcular recursivamente as potências de 5 na base 10. Escolhemos começar com essa base por ser a que mais estamos acostumados. Também escolhemos ela por ter sido a inspiração para o estudo das potências nas demais bases. Nas seções 3 e 4, estudamos as potências de 2 na base 4, as potências de 4 na base 8 e as potências de 6 na base 12, e apresentamos algoritmos que permitem calcular potências de 2, 4 e 6 nas bases 4, 8 e 12, respectivamente. Na Seção 5, estudamos as potências de 3 na base 6. Na seção 6, generalizamos os algoritmos obtidos nas seções 3 e 4 para bases da forma $2p$, em que p é par. Para finalizar, generalizamos o algoritmo da Seção 2 para bases da forma $2p$, em que p é um número ímpar da forma $2q + 1$, com q sendo um número par.

2 Potências de 5 na base 10

Nesta seção, vamos explorar as potências de 5 na base $10 = 2 \cdot 5$. Veremos que para cada número natural $n \geq 2$, a potência 5^n pode ser obtida da potência anterior 5^{n-1}, por meio de uma divisão por 2. Dessa forma, para calcular a potência 5^n, não é preciso multiplicar 5^{n-1} por 5.

Observe as potências de 5 a seguir:

$$\begin{aligned} 5^0 &= 1; & 5^1 &= 5; \\ 5^2 &= 25; & 5^3 &= 125; \\ 5^4 &= 625; & 5^5 &= 3125; \\ 5^6 &= 15625 & 5^7 &= 78125. \end{aligned}$$

Isso nos leva ao seguinte algoritmo:

Algoritmo 2.1. *Na base 10, cada potência 5^n, com $n \geq 2$, pode ser obtida aplicando os seguintes passos:*

1. *Na potência 5^{n-1}, elimine o algarismo 5 da unidade;*
2. *Divida o número restante por 2;*
3. *A direita do número obtido no item anterior, escreva o número 25.*

Por exemplo, sabendo que $5^5 = 3125$, usando o algoritmo anterior, temos que

$$5^6 = \left(\frac{312}{2}\right) 25 = 15625.$$

Vamos analisar o porquê disso acontecer. Note que:

$$\begin{aligned} 5^6 &= 5^5 \times 5 \\ &= (3120 + 5) \times 5 \\ &= (312 \cdot 10 + 5) \times 5 \\ &= 312 \cdot 10 \times 5 + 5 \times 5 \\ &= 312 \cdot 10 \times \frac{10}{2} + 25 \\ &= \frac{312}{2} \cdot 100 + 25 \\ &= 156 \cdot 100 + 25 \\ &= 15625. \end{aligned}$$

Observe que o algoritmo se aplica para a potência 5^2, pois eliminando a unidade 5 da potência 5^1, obtemos 0. Como $\frac{0}{2} = 0$, o algoritmo nos dá que $5^2 = 025 = 25$, o que está correto.

Nosso objetivo é mostrar que o Algoritmo 2.1 é verdadeiro. Para tanto, precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.2. *Para todo número natural $n \geq 2$, a potência 5^n termina em 25.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução do n. O resultado é óbvio para $n = 2$. Suponha que 5^n termina em 25. Nesse caso, $5^n = a_k \cdots a_2 25 = a_k 10^k + \cdots + a_2 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$, em que $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para todo $i = 2, \ldots, k$. Disso segue que

$$\begin{aligned} 5^{n+1} &= 5^n \times 5 \\ &= (a_k 10^k + \cdots + a_2 10^2 + 2 \cdot 10 + 5) \times 5 \\ &= (a_k 10^k + \cdots + a_2 10^2 + 2 \cdot 10) \times 5 + 5 \times 5 \\ &= (5a_k 10^k + \cdots + 5a_2 10^2 + 10 \cdot 10) + 25 \\ &= (5a_k 10^k + \cdots + (1 + 5a_2) 10^2) + 25. \end{aligned}$$

É claro que o somando $5a_k 10^k + \cdots + (1 + 5a_2)10^2$ não contribui para a dezena e a unidade de 5^{n+1}. Portanto, na expansão decimal, 5^{n+1} termina em 25. □

Observação 2.3. *Seguindo com a notação da demonstração anterior, note que para todo $n \geq 2$, se a_2 é um número par, então $5a_2$ é múltiplo de 10. Nesse caso, o resto da divisão de $1 + 5a_2$ por 10 é 1, ou seja, o algarismo da centena de 5^{n+1} é 1. Por outro lado, se a_2 é um número ímpar da forma $a_2 = 2q + 1$, então $1 + 5a_2 = 10q + 6$. Nesse caso, o resto da divisão de $1 + 5a_2$ por 10 é 6, ou seja, o algarismo da centena de 5^{n+1} é 6. Logo, para todo $n \geq 2$, a potência 5^{n+1} termina em 125 ou em 625, dependendo da paridade do algarismo da centena de 5^n.*

Vamos mostrar agora que o Algoritmo 2.1 é válido. Já mostramos que ele vale para $n = 2$. Por isso, seja $n \geq 2$ um número natural e suponha que na base 10, temos

$$5^n = a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 25,$$

em que $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para todo $i = 2, \ldots, k$. Note que 5^n termina em 25, pelo Lema 2.2. Assim,

$$\begin{aligned} 5^{n+1} &= 5^n \times 5 \\ &= (a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 20 + 5) \times 5 \\ &= (a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 2 \cdot 10 + 5) \times 5 \\ &= a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 2 \cdot 10 \times 5 + 5 \times 5 \\ &= a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 2 \cdot 10 \times \frac{10}{2} + 25 \\ &= \frac{a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 2}{2} \cdot 10^2 + 25. \end{aligned}$$

Como $a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 2$ é um número par, temos que $\frac{a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 2}{2}$ é um número inteiro. Se esse número for escrito, na base 10, como

$$\frac{a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 2}{2} = b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0,$$

em que $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$, então

$$5^{n+1} = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0) \cdot 100 + 25 = b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 25.$$

Isso garante que o Algoritmo 2.1 é válido.

3 Potências de 2 na base 4 e de 4 na base 8

Nesta seção, vamos estudar as potências de 2 na base 4 e de 4 na base 8. Veremos que embora um algoritmo semelhante ao Algoritmo 2.1 valha, essas potências têm um padrão de formação muito peculiar.

Comecemos calculando as potências de 2 na base 4. Temos que:

$$\begin{array}{lllllll} 2^0 & = & (1)_4; & \quad & 2^1 & = & (2)_4; \\ 2^2 & = & (10)_4; & & 2^3 & = & (20)_4; \\ 2^4 & = & (100)_4; & & 2^5 & = & (200)_4; \\ 2^6 & = & (1000)_4; & & 2^7 & = & (2000)_4. \end{array}$$

Podemos perceber um padrão de formação dessas potências: na base 4, as potências 2^{2n} são obtidas acrescentando n algarismos 0 à direita do algarismo 1 e as potências 2^{2n+1} são obtidas acrescentando n algarismos 0 à direita do algarismo 2. Isso nos leva ao seguinte resultado:

Lema 3.1. *Para todo número natural n,*

$$\begin{aligned} 2^{2n} &= (1\underbrace{0\cdots0}_{n})_4; \qquad (1) \\ 2^{2n+1} &= (2\underbrace{0\cdots0}_{n})_4. \qquad (2) \end{aligned}$$

Em particular, para todo $m \geq 2$, a potência de 2^m na base 4 termina em 0.

Demonstração. Vamos provar (1) e (2) por indução sobre n, começando por (1). Como $2^0 = (1)_4$, segue que $2^0 = 2^{2\cdot 0}$ é obtido acrescentando-se 0 algarismos 0 à direita do algarismo 1. Agora, suponha que $2^{2n} = (1\underbrace{0\cdots 0}_{n})_4$. Então,

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} &= 2^{2n}\cdot 2^2 \\ &= (1\underbrace{0\cdots 0}_{n})_4\cdot 4 \\ &= (1\cdot 4^n + 0\cdot 4^{n-1} + \cdots + 0\cdot 4^2 + 0\cdot 4 + 0)\cdot 4 \\ &= 1\cdot 4^{n+1} + 0\cdot 4^n + \cdots + 0\cdot 4^2 + 0\cdot 4 + 0 \\ &= (1\underbrace{0\cdots 0}_{n+1})_4. \end{aligned}$$

Isso prova a igualdade (1).

Vamos provar (2). Como $2^1 = (2)_4$, segue que $2^1 = 2^{2\cdot 0+1}$ é obtido acrescentando-se 0 algarismos 0 à direita do algarismo 2. Se $2^{2n+1} = (2\underbrace{0\cdots 0}_{n})_4$, então

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)+1} &= 2^{2n+1}\cdot 2^2 \\ &= (2\underbrace{0\cdots 0}_{n})_4\cdot 4 \\ &= (2\cdot 4^n + 0\cdot 4^{n-1} + \cdots + 0\cdot 4^2 + 0\cdot 4 + 0)\cdot 4 \\ &= 2\cdot 4^{n+1} + 0\cdot 4^n + \cdots + 0\cdot 4^2 + 0\cdot 4 + 0 \\ &= (2\underbrace{0\cdots 0}_{n+1})_4. \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (2) também é válida. □

Observação 3.2. *Na demonstração anterior, poderíamos ter procedido da seguinte forma:*

$$2^{2(n+1)} = 2^{2n}\cdot 2^2 = (1\underbrace{0\cdots 0}_{n})_4\cdot (10)_4 = (1\underbrace{0\cdots 0}_{n+1})_4,$$

$$2^{2(n+1)+1} = 2^{2n+1}\cdot 2^2 = (2\underbrace{0\cdots 0}_{n})_4\cdot (10)_4 = (2\underbrace{0\cdots 0}_{n+1})_4.$$

Observação 3.3. *Pelo lema anterior, toda potência de 2 na base 4 é um número par, ou seja, divisível por 2.*

Algoritmo 3.4. *Na base 4, cada potência 2^n, com $n \geq 2$, pode ser obtida da potência anterior, aplicando o seguinte algoritmo:*

1. *Divida a potência* 2^{n-1} *por* 2*;*

2. *À direita do número obtido no item anterior, escreva* 0*.*

Por exemplo, sabendo que $2^5 = (200)_4$ e que $\dfrac{(200)_4}{2} = (100)_4$, usando o algoritmo anterior, temos que $2^6 = (1000)_4$.

Vamos mostrar agora que o Algoritmo 3.4 é válido. Uma vez que $2^1 = (2)_4$, dividindo-o por 2, obtemos 1. Acrescentando 0 à direita de 1, obtemos $(10)_4 = 2^2$. Isso mostra que o algoritmo vale para $n = 2$. Seja $n \geq 2$ um número natural e suponha que, na base 4, temos

$$2^n = (a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 0)_4,$$

em que $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, para todo $i = 1, \ldots, k$. O Lema 3.1 garante que 2^n termina em 0. Assim,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n \times 2 \\ &= (a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 0)_4 \times \frac{(10)_4}{2} \\ &= \frac{(a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 0)_4}{2} \cdot (10)_4. \end{aligned}$$

Como $(a_k a_{k-1} \cdots a_3 a_2 a_1 0)_4$ é divisível por 2, temos que $\dfrac{(a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 0)_4}{2}$ é um número inteiro. Se, na base 4, esse número é escrito na forma:

$$\frac{(a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 0)_4}{2} = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_4,$$

em que $b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$, então

$$2^{n+1} = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_4 \cdot (10)_4 = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 0)_4.$$

Isso mostra que o Algoritmo 3.4 é válido.

Vamos analisar agora as potências de 4 na base 8. Note que

$$\begin{array}{lllllllll} 4^0 &=& (1)_8; & 4^1 &=& (4)_8; & 4^2 &=& (20)_8; \\ 4^3 &=& (100)_8; & 4^4 &=& (400)_8; & 4^5 &=& (2000)_8; \\ 4^6 &=& (10000)_8; & 4^7 &=& (40000)_8; & 4^8 &=& (200000)_8; \\ 4^9 &=& (1000000)_8; & 4^{10} &=& (4000000)_8; & 4^{11} &=& (20000000)_8. \end{array}$$

Nesse caso, podemos obter as potências de 4 na base 8, aplicando o seguinte algoritmo, que é igual ao Algoritmo 3.4.

Algoritmo 3.5. *Na base 8, cada potência 4^n, com $n \geq 2$, pode ser obtida da anterior, aplicando o seguinte algoritmo:*

1. *Divida a potência 4^{n-1} por 2;*

2. *À direita do número obtido no item anterior, escreva 0.*

A demonstração de que esse algoritmo é válido, é análoga à demonstração do Algoritmo 3.4, desde que nós provemos que, na base 8, para todo $n \geq 2$, 4^n termina em 0.

Lema 3.6. *Para todo número natural $n \geq 2$, a potência 4^n, na base 8, termina em 0. Em particular, para todo $n \geq 1$, 4^n na base 8, é par.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n, observando que essa propriedade vale para $n = 2$. Suponha que para $n \geq 2$, 4^n termine em 0, ou seja, $4^n = (a_k \cdots a_2 a_1 0)_8 = a_k 8^k + \cdots + a_2 8^2 + a_1 8$, em que $a_i \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Então,

$$\begin{aligned} 4^{n+1} &= 4^n \times 4 \\ &= (a_k 8^k + \cdots + a_2 8^2 + a_1 8) \times 4 \\ &= 4a_k 8^k + \cdots + 4a_2 8^2 + 4a_1 8. \end{aligned}$$

Se essa soma for escrita como uma expansão 8-ésimal, o algoritmo das unidades será nulo. Isso mostra que o algarismo das unidades de 4^{n+1} é nulo, ou seja, 4^{n+1} termina em 0. □

Observando as potências $4^0 = (1)_8, 4^1 = (4)_8, 4^2 = (20)_8, \ldots, 4^{11} = (20000000)_8$, que calculamos antes, percebemos que há outra maneira de determinar as potências de 4 na base 8:

Proposição 3.7. *Para todo número natural n,*

$$\begin{aligned} 4^{3n} &= (1\underbrace{0\cdots0}_{2n})_8; && (3) \\ 4^{3n+1} &= (4\underbrace{0\cdots0}_{2n})_8; && (4) \\ 4^{3n+2} &= (2\underbrace{0\cdots0}_{2n+1})_8. && (5) \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos provar (3) por indução sobre n. Como $4^0 = (1)_8$, segue que $4^0 = 4^{3\cdot 0}$ é obtido acrescentando-se 0 algarismos 0 à direita do algarismo 1. Agora, suponha que $4^{3n} = (1\underbrace{0\cdots 0}_{2n})_8$. Então,

$$\begin{aligned} 4^{3(n+1)} &= 4^{3n}\cdot 4^3 \\ &= (1\underbrace{0\cdots 0}_{2n})_8 \cdot 8^2 \\ &= (1\cdot 8^{2n} + 0\cdot 8^{2n-1} + \cdots + 0\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 0)\cdot 8^2 \\ &= 1\cdot 8^{2n+2} + 0\cdot 8^{2n+1} + \cdots + 0\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 0 \\ &= (1\underbrace{0\cdots 0}_{2(n+1)})_8. \end{aligned}$$

Isso prova que (3) é válida. A prova da igualdade (4) é análoga.

Vamos provar (5), novamente por indução sobre n. Como $4^2 = (20)_8$, segue que $4^2 = 4^{3\cdot 0+2}$ é obtido acrescentando-se um algarismo 0 à direita do algarismo 2. Agora, suponha que $4^{3n+2} = (2\underbrace{0\cdots 0}_{2n+1})_8$. Então,

$$\begin{aligned} 4^{3(n+1)+2} &= 4^{3n+2}\cdot 4^3 \\ &= (2\underbrace{0\cdots 0}_{2n+1})_8 \cdot 8^2 \\ &= (2\cdot 8^{2n+1} + 0\cdot 8^{2n} + \cdots + 0\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 0)\cdot 8^2 \\ &= 2\cdot 8^{2n+3} + 0\cdot 8^{2n+2} + \cdots + 0\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 0 \\ &= (2\underbrace{0\cdots 0}_{2(n+1)+1})_8. \end{aligned}$$

Logo, o resultado segue. □

Observação 3.8. *Na demonstração da Proposição 3.7, poderíamos ter procedido da seguinte forma:*

$$4^{3(n+1)} = 4^{3n}\cdot 4^3 = (1\underbrace{0\cdots 0}_{2n})_8 \cdot (100)_8 = (1\underbrace{0\cdots 0}_{2n+2})_8 = (1\underbrace{0\cdots 0}_{2(n+1)})_8;$$

$$4^{3(n+1)+2} = 4^{3n+2}\cdot 4^3 = (2\underbrace{0\cdots 0}_{2n+1})_8 \cdot (100)_8 = (2\underbrace{0\cdots 0}_{2n+2})_8 = (2\underbrace{0\cdots 0}_{2(n+1)+1})_8.$$

BEMM, Laerte; BEMM, Priscila Costa Ferreira de Jesus. Potências de p em bases da forma $2p$. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e3003, 29 de setembro de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6625.

4 Potências de 6 na base 12

Para a base 12, também temos um algoritmo semelhante aos anteriores para determinar as potências de 6. Os algarismos da base 12 são $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A$ e B, em que A e B indicam, respectivamente, as quantidades de 10 e 11 unidades. Da mesma forma que nas seções anteriores, vamos calcular algumas potências de 6 para observarmos se ocorre algum padrão. Temos:

$$
\begin{array}{lllllll}
6^0 & = & (1)_{12}; & \quad & 6^1 & = & (6)_{12}; \\
6^2 & = & (30)_{12}; & & 6^3 & = & (160)_{12}; \\
6^4 & = & (900)_{12}; & & 6^5 & = & (4600)_{12}; \\
6^6 & = & (23000)_{12}; & & 6^7 & = & (116000)_{12}.
\end{array}
$$

Lema 4.1. *Para todo número natural $n \geq 2$, a potência 6^n, na base 12, termina em 0.*

Demonstração. De fato, pelas potências que acabamos de calcular, o resultado é válido para $n = 2$. Suponha que $6^n = (a_k \cdots a_2 a_1 0)_{12} = a_k 12^k + \cdots + a_2 12^2 + a_1 12 + 0$, em que $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9, A, B\}$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Lembramos que A e B indicam, respectivamente, as quantidades de 10 e 11 unidades. Nesse caso,

$$
\begin{aligned}
6^{n+1} &= 6^n \times 6 \\
&= (a_k 12^k + \cdots + a_2 12^2 + a_1 12 + 0) \times 6 \\
&= 6a_k \cdot 12^k + \cdots + 6a_2 \cdot 12^2 + 6a_1 \cdot 12 + 0.
\end{aligned}
$$

Isso mostra que os algarismos da unidade é nulo, ou seja, 6^{n+1} termina em 0. $\square$

Algoritmo 4.2. *Na base 12, cada potência 6^n, com $n \geq 2$, pode ser obtida da potência anterior, aplicando o seguinte algoritmo:*

1. *Divida a potência 6^{n-1} por 2;*

2. *À direta do número obtido no item anterior, escreva 0.*

A prova da validade desse algoritmo é análoga à prova do Algoritmo 3.4.

5 Potências de 3 na base 6

Para analisarmos as potências de 3 na base 6, vamos calcular as potências $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^9$, para descobrirmos se há um padrão. Temos:

$$\begin{array}{rclrcl} 3^0 & = & (1)_6; & 3^1 & = & (3)_6; \\ 3^2 & = & (13)_6; & 3^3 & = & (43)_6; \\ 3^4 & = & (213)_6; & 3^5 & = & (1043)_6; \\ 3^6 & = & (3213)_6; & 3^7 & = & (14043)_6; \\ 3^8 & = & (50213)_6; & 3^9 & = & (231043)_6. \end{array}$$

Lema 5.1. *As potências de 3 na base 6 satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) *Para todo $n \geq 1$, 3^n termina em 3;*

(2) *Para todo $n \geq 1$, 3^{2n} termina em 13;*

(3) *Para todo $n \geq 1$, 3^{2n+1} termina em 43;*

(4) *Para todo $n \geq 2$, 3^{2n} termina em 213;*

(5) *Para todo $n \geq 2$, 3^{2n+1} termina em 043.*

Demonstração. Faremos as demonstrações dos cinco itens por indução sobre n.

Comecemos por (1). Como $3^1 = (3)_6$, o resultado vale para $n = 1$. Agora, suponha que para $n \geq 1$, 3^n termine em 3, ou seja,

$$3^n = (a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 3)_6 = a_k 6^k + a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + a_1 6 + 3,$$

em que $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3^n \times 3 \\ &= (a_k 6^k + a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + a_1 6 + 3) \times 3 \\ &= (a_k 6^k + a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + a_1 6) \times 3 + 3 \times 3 \\ &= 3a_k 6^k + 3a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + 3a_2 6^2 + 3a_1 6 + 6 + 3 \\ &= 3a_k 6^k + 3a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + 3a_2 6^2 + (3a_1 + 1)6 + 3. \end{aligned}$$

Isso mostra que o algarismo das unidades de 3^{n+1} é 3, ou seja, 3^{n+1} termina em 3.

Vamos mostrar o item (2), que claramente é válido para $n = 1$. Se vale para $n \geq 1$, então

$$3^{2n} = (a_k a_{k-1} \cdots a_2 13)_6 = a_k 6^k + a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + 1 \cdot 6 + 3,$$

em que $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, para todo $i = 2, \ldots, k$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)} &= 3^{2n} \times 3^2 \\
&= (a_k 6^k + a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + 1 \cdot 6 + 3) \times (6 + 3) \\
&= (a_k 6^k + a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + 1 \cdot 6 + 3) \times 6 + \\
&\quad + (a_k 6^k + a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + 1 \cdot 6 + 3) \times 3 \\
&= (a_k 6^{k+1} + a_{k-1} 6^k + \cdots + a_2 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6) + \\
&\quad + (3a_k 6^k + 3a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + 3a_2 6^2 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3) \\
&= (a_k 6^{k+1} + a_{k-1} 6^k + \cdots + a_2 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6) + \\
&\quad + (3a_k 6^k + 3a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + 3a_2 6^2 + 3 \cdot 6 + 6 + 3) \\
&= a_k 6^{k+1} + (3a_k + a_{k-1}) 6^k + \cdots + (3a_2 + 1) 6^2 + (3 + 3) \cdot 6 + 6 + 3 \\
&= a_k 6^{k+1} + (3a_k + a_{k-1}) 6^k + \cdots + (3a_2 + 1) 6^2 + 6^2 + 6 + 3 \\
&= a_k 6^{k+1} + (3a_k + a_{k-1}) 6^k + \cdots + (3a_2 + 2) 6^2 + 1 \cdot 6 + 3. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Isso mostra que $3^{2(n+1)}$ termina em 13.

Vamos mostrar agora que o item (3) é válido, ou seja, para todo $n \geq 1$, 3^{2n+1} termina em 43. Isso claramente é válido para $n = 1$. Se vale para $n \geq 1$, então

$$3^{2n+1} = (a_k a_{k-1} \cdots a_2 43)_6 = a_k 6^k + a_{k-1} 6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + 4 \cdot 6 + 3,$$

em que $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, para todo $i = 2, \ldots, k$. Nesse caso,

$$
\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1} &= 3^{2n+1} \times 3^2 \\
&= (a_k 6^k + a_{k-1}6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + 4\cdot 6 + 3) \times (6+3) \\
&= (a_k 6^k + a_{k-1}6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + 4\cdot 6 + 3) \times 6 + \\
&\quad +(a_k 6^k + a_{k-1}6^{k-1} + \cdots + a_2 6^2 + 4\cdot 6 + 3) \times 3 \\
&= (a_k 6^{k+1} + a_{k-1}6^{k} + \cdots + a_2 6^3 + 4\cdot 6^2 + 3\cdot 6) + \\
&\quad +(3a_k 6^k + 3a_{k-1}6^{k-1} + \cdots + 3a_2 6^2 + 4\cdot 3\cdot 6 + 3\cdot 3) \\
&= (a_k 6^{k+1} + a_{k-1}6^{k} + \cdots + a_2 6^3 + 4\cdot 6^2 + 3\cdot 6) + \\
&\quad +(3a_k 6^k + 3a_{k-1}6^{k-1} + \cdots + 3a_2 6^2 + 2\cdot 6\cdot 6 + 6 + 3) \\
&= (a_k 6^{k+1} + a_{k-1}6^{k} + \cdots + a_2 6^3 + 4\cdot 6^2 + 3\cdot 6) + \\
&\quad +(3a_k 6^k + 3a_{k-1}6^{k-1} + \cdots + 3a_2 6^2 + 2\cdot 6^2 + 6 + 3) \\
&= a_k 6^{k+1} + (3a_k + a_{k-1})6^k + \cdots + (3a_2 + 6)6^2 + 4\cdot 6 + 3. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Isso mostra que $3^{2(n+1)+1}$ termina em 43.

Para demonstrarmos o item (4), basta considerarmos $a_2 = 2$ na demonstração do item (2). Dessa forma, por $(*)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
3^{2(n+1)} &= a_k 6^{k+1} + (3a_k + a_{k-1})6^k + \cdots + (3\cdot 2 + 2)6^2 + 1\cdot 6 + 3 \\
&= a_k 6^{k+1} + (3a_k + a_{k-1})6^k + \cdots + 2\cdot 6^2 + 1\cdot 6 + 3,
\end{aligned}
$$

em que a última igualdade é válida, pois $(3\cdot 2 + 2)6^2 = 6^3 + 2\cdot 6^2$. Isso mostra que toda potência 3^{2n} $(n \geq 2)$ na base 6, termina em 213.

Finalmente, para demonstrarmos o item (5), basta considerarmos $a_2 = 0$ na demonstração do item (3). Assim, de $(**)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1} &= a_k 6^{k+1} + (3a_k + a_{k-1})6^k + \cdots + (3\cdot 0 + 6)6^2 + 4\cdot 6 + 3 \\
&= a_k 6^{k+1} + (3a_k + a_{k-1})6^k + \cdots + 0\cdot 6^2 + 4\cdot 6 + 3,
\end{aligned}
$$

em que a última igualdade é válida, pois $(3\cdot 0 + 6)6^2 = 6^3 + 0\cdot 6^2$. Portanto, toda potência 3^{2n+1} $(n \geq 2)$ na base 6, termina em 043. $\square$

Algoritmo 5.2. *Na base 6, cada potência 3^n, com $n \geq 3$, pode ser obtida de 3^{n-1}, aplicando-se o seguinte algoritmo:*

1. *Na potência 3^{n-1}, elimine 43, se n é par, e elimine 13, se n é ímpar;*

https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6625.

2. *Divida o número restante por* 2*;*

3. *À direta do número obtido no item anterior, escreva* 213*, se* n *é par, e escreva* 043*, se* n *é ímpar.*

Exemplo 5.3. *Vamos calcular* 3^9 *na base* 6*, sabendo que* $3^8 = (50213)_6$*. Como* n *é ímpar, eliminamos* 13 *em* 3^8*, restando* $(502)_6$*. Vamos dividir* $(502)_6$ *por* 2*. Temos:*

$$\begin{aligned}\frac{(502)_6}{2} &= \frac{5\cdot 6^2+0\cdot 6+2}{2}\\ &= \frac{4\cdot 6^2+(1\cdot 6^2+0\cdot 6)+2}{2}\\ &= \frac{4\cdot 6^2+6\cdot 6+2}{2}\\ &= 2\cdot 6^2+3\cdot 6+1\\ &= (231)_6.\end{aligned}$$

Logo, temos que $3^9 = (231043)_6$*.*

Exemplo 5.4. *Vamos calcular* 3^{10} *na base* 6*. Pelo exemplo anterior,* $3^9 = (231043)_6$*. Como* n *é par, eliminamos* 43 *em* 3^9*, restando* $(2310)_6$*. Devemos dividir* $(2310)_6$ *por* 2*. Temos:*

$$\begin{aligned}\frac{(2310)_6}{2} &= \frac{2\cdot 6^3+3\cdot 6^2+1\cdot 6}{2}\\ &= \frac{2\cdot 6^3+2\cdot 6^2+1\cdot 6^2+1\cdot 6}{2}\\ &= \frac{2\cdot 6^3+2\cdot 6^2+6\cdot 6+6}{2}\\ &= 1\cdot 6^3+1\cdot 6^2+3\cdot 6+3\\ &= (1133)_6.\end{aligned}$$

Logo, temos que $3^{10} = (1133213)_6$*.*

Vamos mostrar que o Algoritmo 5.2 é válido, começando com $n = 3$. Eliminando 13 em $3^2 = (13)_6$, obtemos $(0)_6$. Dividindo $(0)_6$ por 2, obtemos $(0)_6$. Acrescentando 043 à direita, obtemos $(0043)_6 = (43)_6 = 3^3$. Isso mostra que o algoritmo vale para $n = 3$. Agora, seja $n \geq 3$ um número natural. Pelo Lema 5.1, há duas possibilidades:

(1°) $3^n = (a_k a_{k-1} \cdots a_3 043)_6$;

(2°) $3^n = (a_k a_{k-1} \cdots a_3 213)_6$, em que $a_i \in \{0,1,2,3,4,5\}$, para todo $i = 3, \ldots, k$.

Se $3^n = (a_k a_{k-1} \cdots a_3 043)_6$, temos

$$\begin{aligned}
3^{n+1} &= 3^n \times 3 \\
&= (a_k a_{k-1} \cdots a_3 043)_6 \times 3 \\
&= [(a_k a_{k-1} \cdots a_3 000)_6 + (43)_6] \times 3 \\
&= [(a_k a_{k-1} \cdots a_3 0)_6 \cdot (100)_6 + (43)_6] \times 3 \\
&= (a_k a_{k-1} \cdots a_3 0)_6 \cdot (100)_6 \times 3 + (43)_6 \times 3 \\
&= (a_k a_{k-1} \cdots a_3 0)_6 \cdot (100)_6 \times \frac{(10)_6}{2} + (213)_6 \times 3 \\
&= \frac{(a_k a_{k-1} \cdots a_3 0)_6}{2} \cdot (1000)_6 + (213)_6.
\end{aligned}$$

Como $(a_k a_{k-1} \cdots a_3 0)_6$ é um número par, temos que $\dfrac{(a_k a_{k-1} \cdots a_3 0)_6}{2}$ é um número inteiro. Se esse número for escrito, na base 6, como

$$\frac{(a_k a_{k-1} \cdots a_3 0)_6}{2} = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_6,$$

em que $b_i \in \{0,1,2,3,4,5\}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$, então

$$\begin{aligned}
3^{n+1} &= (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_6 \cdot (1000)_6 + (213)_6 \\
&= (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 000)_6 + (213)_6 \\
&= (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 213)_6.
\end{aligned}$$

Ou seja, para o (1°) caso, o algoritmo vale.

Se $3^n = (a_k a_{k-1} \cdots a_3 213)_6$, temos

$$\begin{aligned}
3^{n+1} &= 3^n \times 3 \\
&= (a_k a_{k-1} \cdots a_3 213)_6 \times 3 \\
&= [(a_k a_{k-1} \cdots a_3 200)_6 + (13)_6] \times 3 \\
&= [(a_k a_{k-1} \cdots a_3 2)_6 \cdot (100)_6 + (13)_6] \times 3 \\
&= (a_k a_{k-1} \cdots a_3 2)_6 \cdot (100)_6 \times 3 + (13)_6 \times 3 \\
&= (a_k a_{k-1} \cdots a_3 2)_6 \cdot (100)_6 \times \frac{(10)_6}{2} + (43)_6 \\
&= \frac{(a_k a_{k-1} \cdots a_3 2)_6}{2} \cdot (1000)_6 + (43)_6.
\end{aligned}$$

Como $(a_k a_{k-1} \cdots a_3 2)_6$ é um número par, temos que $\dfrac{(a_k a_{k-1} \cdots a_3 2)_6}{2}$ é um número inteiro. Se esse número for escrito, na base 6, como

$$\frac{(a_k a_{k-1} \cdots a_3 2)_6}{2} = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_6 = b_m 6^m + b_{m-1} 6^{m-1} + \cdots + b_1 6 + b_0,$$

em que $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$, então

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_6 \cdot (1000)_6 + (43)_6 \\ &= (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 000)_6 + (43)_6 \\ &= (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 043)_6. \end{aligned}$$

Isso mostra que o Algoritmo 5.2 também vale para o (2°) caso.

6 Generalizações para bases $2p$ em que p é par

Lembramos que os algoritmos 3.4, 3.5 e 4.2 podem ser usados para calcular as potências de $2, 4$ e 6 nas bases $4, 8$ e 12, respectivamente. Mais ainda, tais algoritmos são "estruturalmente iguais". Isso se deve, essencialmente, em virtude dos lemas 3.1, 3.6 e 5.1 que garantem: para $p = 2, 4$ e 6 e todo número natural $n \geq 2$, a potência p^n, na base $2p$, termina em 0. Como veremos na sequência, isso é válido para qualquer p par. Como consequência, para p par, conseguimos um algoritmo análogo aos algoritmos 3.4, 3.5 e 4.2.

Lema 6.1. *Seja $\beta = 2p$, com p um número inteiro positivo par. Então, para todo número natural $n \geq 2$, $p^n = (a_n \cdots a_1 0)_\beta$, ou seja, na base β, a potência p^n termina em 0.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n. Sendo $p > 0$ um número par, temos que $p = 2q$, para algum inteiro positivo q. Assim,

$$p^2 = p \cdot (2q) = q(2p) = q\beta.$$

Como $q = \dfrac{p}{2} < \beta$, temos que $p^2 = (q0)_\beta$. Isso mostra que p^2 termina em 0, e o resultado é válido para $n = 2$. Suponha que para $n \geq 2$, a potência p^n termina em 0. Ou seja, suponha que

$$p^n = (a_k \cdots a_1 0)_\beta = a_k \beta^k + \cdots + a_1 \beta,$$

em $a_n, \ldots a_1 \in \{0, \ldots, \beta - 1\}$. Então,

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n \times p \\ &= (a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta) \times p \\ &= pa_k\beta^k + \cdots + pa_1\beta. \end{aligned}$$

Isso mostra que o algarismo da unidade de p^{n+1} é nulo, ou seja, p^{n+1} termina em 0. □

Observação 6.2. *Na demonstração anterior, os fatores $pa_1, \ldots, pa_k$ podem não ser, respectivamente, os algarismos de ordem $2, \ldots, k$ de p^{n+1} na sua expansão β-ésimal. Note que isso não interfere no resultado, pois o importante é que o algarismo da unidade é 0. Isso é garantido pelo fato de cada somando $pa_k\beta^n, \ldots, pa_1\beta$ ter pelo menos um fator β.*

Estamos aptos a provar o seguinte algoritmo que generaliza os algoritmos 3.4, 3.5 e 4.2.

Algoritmo 6.3. *Na base $\beta = 2p$, com $p \geq 1$ par, cada potência p^n, $n \geq 2$, pode ser obtida da potência anterior, aplicando o seguinte algoritmo:*

1. *Divida a potência p^{n-1} por 2;*
2. *À direita do número obtido no item anterior, escreva 0.*

Vamos mostrar que esse algoritmo é válido. Como $p \geq 1$ é par, temos que $p = 2q$, para algum inteiro q, $1 \leq q < \beta$. Uma vez que $p^1 = (p)_\beta$, dividindo-o por 2, obtemos q. Acrescentando 0 à direita de q, obtemos $(q0)_\beta = p^2$. Isso mostra que o algoritmo vale para $n = 2$. Seja $n \geq 2$ um número natural e suponha que na base β, temos

$$p^n = (a_k \cdots a_1 0)_\beta,$$

em que $a_i \in \{0, \ldots, \beta - 1\}$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Note que pelo lema anterior, podemos considerar que p^n termina em 0. Nesse caso,

$$p^{n+1} = p^n \times p = (a_k \cdots a_1 0)_\beta \times \frac{(10)_\beta}{2} = \frac{(a_k \cdots a_1 0)_\beta}{2} \cdot (10)_\beta.$$

Como $(a_k \cdots a_1 0)_\beta = a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta$ é divisível por 2, pois cada somando é par, temos que $\dfrac{(a_k \cdots a_1 0)_\beta}{2}$ é um número inteiro. Suponha que na base β tenhamos

$$\frac{(a_k \cdots a_1 0)_\beta}{2} = (b_m \cdots b_1 b_0)_\beta,$$

https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6625.

em que $b_i \in \{0, \ldots, \beta - 1\}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$. Então

$$p^{n+1} = (b_m \cdots b_1 b_0)_\beta \cdot (10)_\beta = (b_m \cdots b_1 b_0 0)_\beta.$$

Isso mostra que o Algoritmo 6.3 está correto.

Exemplo 6.4. *Vamos considerar a base $\beta = 20$, que era o sistema de numeração adotado pela civilização pré-colombiana Maia. Vamos denotar os algarismos dessa base por $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, \ldots,$ I, J, em que $A, B, \ldots, I, J$ representam, respectivamente, as quantidades de $10, 11, \ldots, 18$ e 19 unidades. Nesse caso, $p = \dfrac{20}{2} = A$ é par. Vamos aplicar o Algoritmo 6.3, para determinar as potências A^2, A^3, A^4, A^5 e A^6, sabendo que $A^1 = A$.*

- *Para calcular A^2, vamos dividir $A = A^1$ por 2 e escrever 0 à direita do resultado:*

$$\frac{A}{2} = (5)_{20} \Rightarrow A^2 = (50)_{20}.$$

- *Para calcular A^3, vamos dividir A^2 por 2 e escrever 0 à direita do resultado:*

$$\frac{A^2}{2} = \frac{(50)_{20}}{2} = \frac{5 \cdot 20}{2} = \frac{4 \cdot 20 + 20}{2} = \frac{4}{2} \cdot 20 + \frac{20}{2} = 2 \cdot 20 + A = (2A)_{20}.$$

Portanto, $A^3 = (2A0)_{20}$.

- *Para calcular A^4, vamos dividir A^3 por 2 e escrever 0 à direita do resultado:*

$$\frac{A^3}{2} = \frac{(2A0)_{20}}{2} = \frac{2 \cdot 20^2 + A \cdot 20}{2} = \frac{2}{2} \cdot 20^2 + \frac{A}{2} \cdot 20 = 1 \cdot 20^2 + 5 \cdot 20 = (150)_{20}.$$

Portanto, $A^4 = (1500)_{20}$.

- *Para calcular A^5, vamos dividir A^4 por 2 e escrever 0 à direita do resultado:*

$$\begin{aligned} \frac{A^4}{2} &= \frac{(1500)_{20}}{2} = \frac{20^3 + 5 \cdot 20^2}{2} = \frac{20 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20^2 + 20^2}{2} = \frac{20}{2} \cdot 20^2 + \frac{4}{2} \cdot 20^2 + \frac{20}{2} \cdot 20 \\ &= A \cdot 20^2 + 2 \cdot 20^2 + A \cdot 20 = (A + 2) \cdot 20^2 + A \cdot 20 = (CA0)_{20} \end{aligned}$$

Portanto, $A^5 = (CA00)_{20}$

- *Para calcular A^6, vamos dividir A^5 por 2 e escrever 0 à direita do resultado. Como C e A são pares e $\dfrac{C}{2} = 6$ e $\dfrac{A}{2} = 5$, temos que $\dfrac{(CA00)_{20}}{2} = (6500)_{20}$. Portanto, $A^6 = (65000)_{20}$.*

7 Potências de p em bases $2p$ em que p é ímpar

Pelo que vimos na seção anterior, para o caso em que p é par, há um algoritmo geral que podemos utilizar para calcular as potências p^n na base $\beta = 2p$. Porém, conforme vimos nas seções 2 e 5, para o caso em que p é ímpar, não há um algoritmo geral para determinar as potências de p na base $2p$. De fato, as potências de 5 na base decimal podem ser calculadas pelo Algoritmo 2.1, enquanto que as potências de 3 na base 6 podem ser calculadas pelo Algoritmo 5.2. É claro que esses dois algoritmos são muito diferentes entre si. Como veremos nesta seção, essa diferença se deve ao fato de p ser ímpar. Contudo, apresentaremos um algoritmo geral para o caso em que p é da forma $2q+1$, com q par. Esse é o caso de $p = 1, 5, 9$ etc. Para tanto, precisamos do resultado a seguir.

Lema 7.1. *Seja $\beta = 2p$, com $p \geq 1$, um número inteiro ímpar da forma $2q+1$, com q par. Então, para todo número natural $n \geq 2$, $p^n = (a_n \dots a_2 qp)_\beta$, ou seja, na base β, p^n termina em qp.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n. Como p é um número ímpar na forma $p = 2q+1$, temos

$$p^2 = p \cdot (2q+1) = q(2p) + p = q\beta + p.$$

Como $0 \leq q = \dfrac{p-1}{2} < \beta$, temos que $p^2 = (qp)_\beta$. Isso mostra que p^2 termina em qp, e o resultado é válido para $n = 2$. Suponha que para $n \geq 2$, a potência p^n termina em qp, ou seja,

$$p^n = (a_n \cdots a_2 qp)_\beta = a_k\beta^k + \cdots + a_2\beta^2 + q\beta + p,$$

em que $a_n, \dots a_1 \in \{0, \dots, \beta - 1\}$. Então,

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n \times p \\ &= (a_k\beta^k + \cdots + a_2\beta^2 + q\beta + p) \times p \\ &= pa_k\beta^k + \cdots + pa_2\beta^2 + pq\beta + p^2 \\ &= pa_k\beta^k + \cdots + pa_2\beta^2 + pq\beta + q\beta + p. \end{aligned}$$

Note que $pq\beta = \dfrac{\beta}{2}q\beta = \dfrac{q}{2}\beta^2$. Como q é par, temos que $\dfrac{q}{2}$ é um número inteiro. Disso e de $p^2 = (qp)_\beta = q\beta + p$, temos:

https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6625.

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= pa_k\beta^k + \cdots + pa_2\beta^2 + \frac{q}{2}\beta^2 + q\beta + p \\ &= pa_k\beta^k + \cdots + \left(pa_2 + \frac{q}{2}\right)\beta^2 + q\beta + p. \end{aligned}$$

Isso mostra que os algarismos da primeira e da segunda ordens são p e q, respectivamente. Ou seja, p^{n+1} termina em qp. □

Algoritmo 7.2. *Na base $\beta = 2p$, em que $p = 2q+1$, com q par, cada potência p^n, $n \geq 2$, pode ser obtida aplicando os seguintes passos:*

1. *Na potência p^{n-1}, elimine o algarismo p da unidade;*
2. *Divida o número restante por 2;*
3. *À direita do número obtido no item anterior, escreva o número qp.*

Vamos mostrar que o Algoritmo 7.2 é válido. Como $p^1 = p = 0p$ e $p^2 = qp$, o algoritmo vale para $n = 2$. Seja $n \geq 2$ um número natural e suponha que na base $\beta = 2p$, temos

$$p^n = (a_k \cdots a_2qp)_\beta = a_k\beta^k + \cdots + a_2\beta^2 + q \cdot \beta + p,$$

em que $a_i \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$, para todo $i = 2, \ldots, k$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n \times p \\ &= (a_k \cdots a_2qp)_\beta \times p \\ &= [(a_k \cdots a_2q0)_\beta + p] \times p \\ &= [(a_k \cdots a_2q)_\beta \cdot (10)_\beta + p] \times p \\ &= [(a_k \cdots a_2q)_\beta \cdot (10)_\beta \cdot p] + p^2 \\ &= \left[(a_k \cdots a_2q)_\beta \cdot (10)_\beta \cdot \frac{(10)_\beta}{2}\right] + (qp)_\beta \\ &= \frac{(a_k \cdots a_2q)_\beta}{2} \cdot (100)_\beta + (qp)_\beta. \end{aligned}$$

Como $(a_k \cdots a_2q)_\beta = a_k\beta^{k-1} + \cdots + a_2\beta + q$ e q e β são números pares, temos que $(a_k \cdots a_2q)_\beta$ é divisível por 2. Portanto, $\dfrac{(a_k \cdots a_2q)_\beta}{2}$ é um número inteiro. Se esse número for escrito, na base β, como

$$\frac{(a_k \cdots a_2q)_\beta}{2} = (b_m \cdots b_1b_0)_\beta,$$

em que $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$, então

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= (b_m \cdots b_1 b_0)_\beta \cdot (100)_\beta + (qp)_\beta \\ &= (b_m \cdots b_1 b_0 00)_\beta + (qp)_\beta \\ &= (b_m \cdots b_1 b_0 qp)_\beta. \end{aligned}$$

Isso mostra que o Algoritmo 7.2 é válido.

Observação 7.3. *Observe que o Algoritmo 7.2 não pode ser aplicado para o caso em que q é ímpar, pois nesse caso $(a_k \cdots a_2 q)_\beta = a_k\beta^{k-1} + \cdots + a_2\beta + q$ não é par. Ou seja, $(a_k \cdots a_2 q)_\beta = a_k\beta^{k-1} + \cdots + a_2\beta + q$ não é divisível por 2. Esse é o caso das bases na forma $8k+6 = 2(2(2k+1)+1)$, tais como $6, 14, 22$ e 30. Embora tivéssemos tentado, para essas bases nós não conseguimos determinar um algoritmo geral nos moldes do algoritmos 6.3 ou 7.2. Para a base 6, que é pequena, nós conseguimos o Algoritmo 5.2, que determina as potências 3^n na base 6. Porém, podemos observar que o procedimento dado por aquele algoritmo é mais complexo e é ligeiramente diferente para n par e para n ímpar. Para a base 14, nós não conseguimos um algoritmo satisfatório. Por isso, optamos em não estender nossos estudos para as bases da forma $8k+6$, além de 6.*

Exemplo 7.4. *Note que podemos aplicar o Algoritmo 7.2 para a base 10. De fato, para essa base temos $p = 5$ e $q = 2$. É fácil ver que, nesse caso, os algoritmos 2.1 e 7.2 coincidem. Outra base que podemos aplicar o Algoritmo 7.2 é a base 18, na qual $p = 9$ e $q = 4$. Vamos denotar os algarismos dessa base por $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, \ldots, G, H$, em que $A, B, \ldots, G, H$ representam, respectivamente, as quantidades de $10, 11, \ldots, 16$ e 17 unidades. Pelo Lema 7.1, para todo $n \geq 2$, $9^n = (a_k \ldots a_2 49)_{18}$, ou seja, 9^n termina em 49. Portanto, pelo Algoritmo 7.2, as potências $9^1, 9^2, \ldots, 9^7$ na base 18 são:*

$$\begin{aligned} 9^1 &= (9)_{18} = (09)_{18} \\ 9^2 &= \frac{(0)_{18}}{2} 49 = (049)_{18} = (49)_{18} \\ 9^4 &= \frac{(4)_{18}}{2} 49 = (249)_{18} \\ 9^5 &= \frac{(24)_{18}}{2} 49 = (1249)_{18} \\ 9^6 &= \frac{(124)_{18}}{2} 49 = (A49)_{18} \\ 9^7 &= \frac{(A24)_{18}}{2} 49 = (51249)_{18}. \end{aligned}$$

8 Conclusão

Apresentamos os algoritmos 3.4, 5.2, 3.5, 2.1 e 4.2 que nos permitem determinar as potências de p na base $2p$, para $p = 2, 3, 4, 5, 6$, respectivamente. Em seguida, apresentamos o Algoritmo 6.3, que nos permitem determinar as potências de p na base $2p$, sempre que p for par. Finalizamos o trabalho com o Algoritmo 7.2, que determina as potências de p na base $2p$, em $p = 2q + 1$ e q é par. Em todos esses algoritmos, vimos que em vez de multiplicações, nós podemos utilizar certas divisões por 2 para determinar tais potências. Em certa medida, isso é surpreendente, pois potências são definidas como sucessivas multiplicações. Vimos que as potências de 2 na base 4, as potências de 4 na base 8 e de 6 na base 12 seguem o mesmo algoritmo, que por fim, foi generalizado no Algoritmo 6.3. Por outro lado, as potências de 5 na base 10 seguem um algoritmo específico e as potências de 3 da base 6 seguem um algoritmo que depende da paridade do expoente. Para as potências de 7 na base 14, não detectamos um padrão de formação e por isso não apresentamos um algoritmo semelhante aos anteriores. Além dos algoritmos, algumas propriedades de potências foram provadas no decorrer do nosso trabalho. Por exemplo, toda potência 5^n $(n > 1)$ na base 10 termina em 25. Mais ainda, toda potência 5^n $(n \geq 3)$ termina ou em 125 ou em 625, dependendo da paridade do expoente. Já as potências 3^n $(n \geq 2)$ na bases 6, terminam em 43 ou 13, a depender da paridade do expoente. Mais geral, mostramos que se p é ímpar, então toda potência p^n na base $\beta = 2p$ $(n \geq 2)$ termina em qp. Para o caso em que p é par, mostramos que toda potência p^n $(n \geq 2)$ termina em 0. Essas propriedades são muito interessantes e curiosas, pois estabelecem padrões, regularidades e relações em potências de bases não decimais. Porém, nossa falta de hábito em trabalhar com tais bases nos leva a desconhecê-las.

Referências

COSTA, E. A.; SANTOS, R. Números de Ball Generalizados. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 7, n. 1, p. 61-85, 2022. DOI: `https://doi.org/10.34179/revisem.v7i1.16202`.

COXFORD A. F.; SHULTE, A. P. **The Ideas of Algebra, K-12**. Yearbook, Reston, VA: NCTM, 1988.

FOMÍN, S. V. **Sistemas de Numeración**. Moscou: MIR-Moscou, 1975.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

KUMAYAMA, H. Algoritmo da multiplicação em uma linha. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 22, 1991. Disponível em: `https://rpm.org.br/cdrpm/22/3.htm`. Acesso em: 10 maio 2023.

MACHADO, P. A. M. A Lei de Alcides. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 37, 1998. Disponível em: `https://rpm.org.br/cdrpm/37/1rpm.htm`. Acesso em: 11 maio 2023.

MILIES, C. F. P. M.; COELHO, S. P. **Números**: Uma Introdução à Matemática. 3. ed. São Paulo: Editora da USP, 2006.

ROCHA, K. F. **Bases numéricas não usuais: um breve estudo**. Orientador: Rogério de Oliveira. 2019. 88 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS, 2019.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores do artigo pelos comentários, críticas e sugestões que culminaram na melhoria do texto e dos resultados. Em especial, agradecemos as sugestões de generalizações dos algoritmos obtidos nas seções 2, 3, 4 e 5.