Integração em finitos termos: o princípio de Liouville e o método de Ostrowski

Integration in finite terms: the Liouville principle and the Ostrowski method

Integración en términos finitos: principio de Liouville y método de Ostrowski

Allan Kenedy Santos Silva[1]
Universidade Federal de Alagoas (Ufal), Maceió, AL, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-8889-3899, http://lattes.cnpq.br/5548949525339076

Resumo: Desde os primórdios do Cálculo Diferencial e Integral, muitos matemáticos dedicaram anos de suas vidas no desenvolvimento dessa disciplina. Eles aprimoraram diversas técnicas para efetuar o cálculo de integrais de várias classes de funções, mas havia algumas delas que eles não conseguiam calcular em termos de funções elementares (funções expressas por uma quantidade finita de polinômios, radicais, exponenciais, logaritmos e funções trigonométricas, usando uma quantidade finita de operações algébricas e composições de funções). Surgiu o questionamento se tais integrais eram de fato elementares. Isso levou o matemático francês Joseph Liouville a desenvolver uma teoria de integração em finitos termos. Será exposto, neste artigo, o raciocínio genial de Liouville e uma generalização devida ao matemático ucraniano Alexander Ostrowski. Também apresentam-se possíveis aplicações de seus resultados no cálculo de algumas integrais.

Palavras-chave: integração elementar; integração em finitos termos; princípio de Liouville; teorema de Liouville; teorema de Ostrowski.

Abstract: Since the beginnings of Differential and Integral Calculus, many mathematicians have dedicated years of their lives to the development of this subject. They improved several techniques for computing the integrals of various classes of functions, but there were some of them that they could not calculate in terms of elementary functions (functions expressed by a finite number of polynomials, radicals, exponentials, logarithms, and trigonometric functions, using a finite amount of algebraic operations and function compositions). A question then arose about whether such integrals were in fact elementary. This led to the French mathematician Joseph Liouville developing a theory of integration in finite terms. In this paper, we presenting Liouville's brilliant reasoning and a generalization proposed by Ukrainian mathematician Alexander Ostrowski. Besides that, we will also be displaying possible applications of their results in the calculation of some integrals.

Keywords: elementary integration; integration in finite terms; Liouville principle; Liouville theorem; Ostrowski theorem.

Resumen: Desde los inicios del Cálculo Diferencial e Integral, muchos matemáticos han dedicado años de su vida al desarrollo de esta disciplina. Mejoraron varias técnicas para calcular integrales de varias clases de funciones, pero había algunas que no podían calcular en términos de funciones elementales (funciones expresadas por un número finito de polinomios, radicales, exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas, usando un número finito de operaciones algebraicas y composiciones de funciones). Surgió la pregunta: ¿estas integrales eran en realidad elementales? Esto llevó al matemático francés Joseph Liouville a desarrollar una teoría de la integración en términos finitos. En este artículo, se expondrá el brillante razonamiento de Liouville y una generalización debida al matemático ucraniano Alexander Ostrowski. También veremos aplicaciones de sus resultados en el cálculo de algunas integrales.

Palabras clave: integración elemental; integración en términos finitos; principio de Liouville; teorema de Liouville; el teorema de Ostrowski.

Data de submissão: 30 de janeiro de 2023.

Data de aprovação: 7 de dezembro de 2023.

[1] **Currículo sucinto**: Bacharel em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Alagoas, mestre e doutorando em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas. **Contribuição de autoria**: Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: allan.santos@im.ufal.br.

1. Introdução

Quando começamos a estudar o Cálculo Diferencial e Integral, inicialmente aprendemos a calcular limites e derivadas de funções de uma variável. Posteriormente, estudamos o processo inverso ao da diferenciação, que é a integração. Estudamos diversas técnicas para encontrar a primitiva de diversas classes de funções. Contudo, existem certas classes de funções que são difíceis, senão, impossíveis de serem integradas, pelo menos em uma representação em quantidade finita de polinômios, radicais, exponenciais, logaritmos e funções trigonométricas, todas elas relacionadas entre si por meio de operações algébricas e composição. Um colega certa vez me contou uma peça que alunos mais avançados pregaram nos alunos iniciantes em cálculo integral, que era mais ou menos o seguinte: “calcule $\int e^{x^2}dx$”, ou, “calcule $\int \frac{\ln x}{x-1}dx$”. Os estudantes, em sua ignorância, tentaram em vão calcular estas integrais. Daí ocorre um questionamento natural: como sabemos que essas primitivas não podem ser representadas por meio de uma quantidade finita de operações algébricas e composição de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas?

As questões acima começaram a ser respondidas com os trabalhos do matemático francês Joseph Liouville (1809-1882) publicados na década de 1830. Em 1835, Liouville demonstrou que se $y_1, \dots, y_k$ são funções de uma variável complexa x, cujas derivadas são funções algébricas, isto é, soluções de uma equação algébrica com coeficientes polinomiais, e se P é uma função algébrica nas variáveis $x, y_1, \dots, y_k$, cujas primitivas são funções elementares (podem ser expressas como uma combinação finita de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas), então sua primitiva é da forma

$$\int P(x, y_1, \dots, y_k)dx = u_0(x, y_1, \dots, y_k) + \sum_{i=1}^{r} A_i \ln u_i(x, y_1, \dots, y_k), \tag{1}$$

em que $u_0, u_1, \dots, u_r$ são funções algébricas e $A_1, \dots, A_r$ são constantes. Além disso, se P e as derivadas das $y_1, \dots, y_k$ são quocientes de polinômios, então as funções $u_0, u_1, \dots, u_r$ são desse mesmo tipo.

A segunda parte do enunciado do teorema acima não está demonstrada no artigo de Liouville, pois já foi demonstrado em Abel (1829, p. 260-264), como ele próprio apontou:

> A demonstração deste teorema [...] é inteiramente semelhante à que se encontra exposta nas Memórias de Abel, para estabelecer uma verdade da mesma espécie. Veja o Jornal do Mr. Crelle, Volume IV, página 260. Para abreviar, dispensarei reportá-la aqui. (Liouville, 1835, p. 108).

Segundo Hardy (1916, p. 63), o teorema de Liouville era o resultado mais geral de sua época sobre integração em finitos termos. Ritt (1948) apresentou uma exposição das ideias de Liouville sob o ponto de vista analítico.

O ponto chave do raciocínio de Liouville é o seguinte: se encontrarmos uma expressão algébrica em termos de funções não algébricas, então essa expressão é uma identidade com respeito a essas funções. Este é o *princípio de Liouville* e será visto com mais detalhe adiante.

O matemático ucraniano Alexander M. Ostrowski (1893-1986) estendeu os resultados de Liouville para uma classe mais geral de funções, utilizando uma abordagem algébrica que é a extensão sucessiva de corpos (que ele chamou de *extensões Liouvillianas*).

O método de Ostrowski serviu de base para diversas outras generalizações. Alguns exemplos: Rosenlicht (1968) demonstrou uma versão abstrata do teorema de Ostrowski utilizando o conceito de *corpo diferencial*; Cherry (1985) incluiu a função erro no teorema de Rosenlicht; Kaur e Srinivasan (2021) estenderam para funções dilogarítmicas; Risch (1969) desenvolveu um algoritmo para decidir se uma função possui primitiva elementar e calculá-la.

Na próxima seção, definiremos alguns conceitos que servirão para o entendimento do raciocínio de Liouville. Na Seção 3, enunciaremos o princípio de Liouville de forma mais precisa e o empregaremos para demonstrar o seu teorema na Seção 4. Na mesma seção, investigaremos as integrais da forma $\int R(x)e^{S(x)}dx$, em que R e S são funções racionais. Na Seção 5, veremos a generalização do Teorema de Liouville devida a Ostrowski e sua aplicação no cálculo de integrais da forma $\int R(x)\ln S(x)\,dx$, em que R e S são funções racionais.

2. Definições

Definição 2.1. *Uma* função elementar *nas variáveis complexas $x, y_1, \ldots, y_k$ é uma função que pode ser escrita em termos dessas variáveis usando um número limitado de operações algébricas, exponenciais, logarítmicas e composições.*

Definição 2.2. *Uma* função racional *é uma função que pode ser expressa como o quociente entre dois polinômios.*

Definição 2.3. *Uma função $t(x, y_1, \ldots, y_k)$ é* algébrica *se satisfaz uma equação da forma*

$$\mathrm{P_m t^m + P_{m-1}t^{m-1} + \ldots + P_1 t + P_0 = 0}, \tag{2}$$

em que $P_0, P_1, \ldots, P_m$ são funções racionais em $x, y_1, \ldots, y_k$. Uma função é transcendente *se não é algébrica.*

Multiplicando todos os termos da equação *(2)* pelo denominador comum de $P_0, P_1, \ldots, P_m$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $P_0, P_1, \ldots, P_m$ são polinômios.

Exemplo 2.4. *A função exponencial $e^{p(x)}$ é transcendente, em que $p(x)$ é um polinômio. Com efeito, suponha que é algébrica. Então, satisfaz uma equação*

$$\mathrm{P_m e^{mp} + P_{m-1}e^{(m-1)p} + \ldots + P_1 e^p + P_0 = 0}. \tag{3}$$

Suponha que o grau do polinômio líder P_m é o menor possível satisfazendo (3). Derivando ambos os membros em x teremos

https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6556.

$$e^{mp}\left(P_m^{'} + mP_m p^{'}\right) + e^{(m-1)p}\left(P_{m-1}^{'} + (m-1)P_{m-1}p^{'}\right) + \dots + e^{p}\left(P_1^{'} + P_1 p^{'}\right) + P_0^{'} = 0 \qquad (4)$$

Multiplicando (3) por $mp^{'}$ e subtraindo de (4) teremos

$$P_m^{'} e^{mp} + e^{(m-1)p}\left(P_{m-1}^{'} + (m-1)P_{m-1}p^{'} - mp^{'}P_{m-1}\right) + \dots + \left(P_0^{'} - mp^{'}P_0\right) = 0.$$

Essa é uma equação da forma (3) com polinômio líder $P_m^{'}$, cujo grau é menor do que P_m, o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, e^p é transcendente. Usando esse resultado demonstra-se que $\ln p(x)$ é transcendente (Mamede, 2013, Teorema 7).

Definição 2.5. *Diremos que uma função elementar* é transcendente de 1ª ordem *se os argumentos dos termos exponenciais e logarítmicos que nela aparecem são funções algébricas. Diremos também que uma função é* transcendente de m-ésima ordem $(m \geq 2)$ *se os argumentos das funções exponenciais e logarítmicas são transcendentes de $(m-1)$-ésima ordem.*

Exemplo 2.6. $f(x) = x^3 + \ln\left(1 + x^2\right) - e^{x\sqrt{x}} \ln\left(1 + x^3\right)$ *é de 1ª ordem.* $g(x) = \sqrt{x} \ln \ln\left(x + e^{-x}\right) + e^{e^x}$ *é de 3ª ordem.*

Definição 2.7. *Chamaremos de* monômio transcendente *uma expressão da forma e^u ou $\ln u$, sendo u uma função de $x, y_1, \dots, y_k$. Um* monômio de 1ª ordem *é uma expressão da forma e^u ou $\ln u$, com u sendo algébrico. Um* monômio de m-ésima ordem *$(m \geq 2)$ é uma expressão e^u ou $\ln u$, com u sendo uma função transcendente de $(m-1)$-ésima ordem.*

Perceba que $e^{\ln x^2}$ não é um monômio de 2ª ordem, pois $e^{\ln x^2} = x^2$. Para sabermos a ordem de transcendência de uma função, devemos simplificá-la ao máximo.

Se $t(x)$ é uma função algébrica, solução de (2), então após derivar ambos os membros dessa equação e isolar $t^{'}$ teremos

$$t^{'} = -\frac{P_m^{'}t^m + P_{m-1}^{'}t^{m-1} + \dots + P_1^{'}t + P_0^{'}}{mP_m t^{m-1} + (m-1)P_{m-1}t^{m-2} + \dots + P_1}. \qquad (5)$$

Como o segundo membro é um quociente de funções algébricas em t, e o conjunto das funções algébricas sobre um domínio $D \subset \mathbb{C}$ é um corpo[1], concluímos que $t^{'}$ é uma função algébrica. Portanto, a derivada de uma função algébrica é algébrica.

Finalizadas as definições, podemos enunciar formalmente o Teorema de Liouville.

Teorema 2.8 (Liouville, 1835). Sejam $y_1, \dots, y_k$ funções da variável complexa x, cujas derivadas $\frac{dy_i}{dx}$ são funções algébricas de $x, y_1, \dots, y_k$. Se P é uma função algébrica em $x, y_1, \dots, y_k$ e $\int P(x, y_1, \dots, y_k)dx$ é elementar, então

$$\int P(x, y_1, \dots, y_k)dx = u_0(x, y_1, \dots, y_k) + \sum_{i=1}^{r} A_i \ln u_i(x, y_1, \dots, y_k), \qquad (6)$$

[1] Uma prova de que o conjunto dos números algébricos é um corpo está presente em Figueiredo (1985), mas essa prova pode ser adaptada para funções algébricas.

em que $\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{r}$ são funções algébricas e $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ são constantes. Além disso, se as funções P e $\frac{\mathrm{dy}_1}{\mathrm{dx}}, \ldots, \frac{\mathrm{dy}_\mathrm{k}}{\mathrm{dx}}$ são racionais, as funções $\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{r}$ são racionais.[2]

3. O princípio de Liouville

Primeiramente, lembremos que quaisquer primitivas de uma função integrável diferem entre si por uma constante. Então, se uma primitiva da função for elementar, todas as demais primitivas são elementares. Suponha que uma qualquer primitiva de $P(x, y_1, \ldots, y_k)$ seja uma função elementar, transcendente de m-ésima ordem e que, após simplificações, possui um número mínimo de monômios transcendentes. Escrevamos

$$\int P(x, y_1, \ldots, y_k) dx = f(x, y_1, \ldots, y_k, e^{u_1}, \ldots, e^{u_r}, \ln v_1, \ldots, \ln v_s, g_1, \ldots, g_t) \tag{7}$$

em que f é algébrica e $e^{u_1}, \ldots, e^{u_r}, \ln v_1, \ldots, \ln v_s$ são monômios de m-ésima ordem, funções de $x, y_1, \ldots, y_k$, e $g_1, \ldots, g_t$, se houverem, são funções transcendentes de ordem inferior a m.

Derivando (7) em x e realizando simplificações, chegamos a uma expressão da forma

$$\phi(x, y_1, \ldots, y_k, e^{u_1}, \ldots, e^{u_r}, \ln v_1, \ldots, \ln v_s, g_1, \ldots, g_t) = 0 \tag{8}$$

sendo ϕ algébrica, possivelmente com outras g_i.

Afirmamos que $e^{u_1}, \ldots, e^{u_r}, \ln v_1, \ldots, \ln v_s, g_1, \ldots, g_t$ são independentes, isto é, que $\phi = 0$ é uma identidade com respeito a eles. Com efeito, suponha que, digamos $\ln v_s$, é função das outras variáveis, isto é,

$$\ln v_s = \gamma(x, y_1, \ldots, y_k, e^{u_1}, \ldots, e^{u_r}, \ln v_1, \ldots, \ln v_{s-1}, g_1, \ldots, g_t).$$

Então,

$$\begin{aligned}\int P dx = f(&x, y_1, \ldots, y_k, e^{u_1}, \ldots, e^{u_r}, \ln v_1, \ldots, \ln v_{s-1}, \\ &\gamma(x, y_1, \ldots, y_k, e^{u_1}, \ldots, e^{u_r}, \ln v_1, \ldots, \ln v_{s-1}, g_1, \ldots, g_t), g_1, \ldots, g_t).\end{aligned}$$

Se γ for transcendente, $\int P dx$ será de ordem superior a m; e se γ for algébrico, o número de monômios diminuirá em pelo menos uma unidade. Ambos os casos contradizem as nossas hipóteses sobre $\int P dx$.

Com isto, formulamos o *Princípio de Liouville*:

> [...] se, pelo curso dos cálculos, formos levados a uma equação algébrica entre $[x, y_1, \ldots, y_k]$ e esses monômios transcendentes $[e^{u_1}, \ldots, e^{u_r}, \ln v_1, \ldots, \ln v_s, g_1, \ldots, g_t]$, não perturbaremos a igualdade substituindo os transcendentes por novas funções tomadas ao acaso ou por quantidades puramente literais. Este princípio é a base de toda a nossa teoria. (Liouville, 1835, p. 100).

[2] Como as funções trigonométricas podem ser escritas em termos de exponenciais e logaritmos de quantidades em $\mathbb{C}$ (Churchill, 1975), não há perda de generalidade no enunciado.

4. Prova do teorema de Liouville

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema 2.8. Suponha que $\int Pdx$ é transcendente de m -ésima ordem e que possui a quantidade mínima de monômios transcendentes. A prova será dividida em uma série de afirmações.

Afirmação 1: $\int Pdx$ não possui monômios exponenciais.

Suponha o contrário. Escreva $\theta = e^u$, em que $u = u(x, y_1, \ldots, y_k)$ é uma função algébrica ou transcendente. Então,

$$\int \mathrm{Pdx} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}), \tag{9}$$

em que $g_1, \ldots, g_t$ são monômios de ordem m ou inferior. Derivando ambos os membros de (9) em x e aplicando a Regra da Cadeia obtemos

$$\mathrm{P} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{p}) + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}_\mathrm{i}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \frac{\mathrm{dy}_\mathrm{i}}{\mathrm{dx}} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dx}}$$
$$+ \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{g}_\mathrm{j}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \frac{\mathrm{dg}_\mathrm{j}}{\mathrm{dx}}.$$

Como $\theta = \mathrm{e}^\mathrm{u}$, $\mathrm{u} = \mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k})$, temos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dx}} = \theta \left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}) + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}_\mathrm{i}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}) \frac{\mathrm{dy}_\mathrm{i}}{\mathrm{dx}} \right).$$

Assim

$$\mathrm{P} = \tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) + \textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}_\mathrm{i}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \tfrac{\mathrm{dy}_\mathrm{i}}{\mathrm{dx}} +$$
$$\theta \tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \left(\tfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \tfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}_\mathrm{i}} \tfrac{\mathrm{dy}_\mathrm{i}}{\mathrm{dx}} \right) + \textstyle\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}} \tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{g}_\mathrm{j}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \tfrac{\mathrm{dg}_\mathrm{j}}{\mathrm{dx}}. \tag{10}$$

Essa igualdade é algébrica em relação a $x, y_1, \ldots, y_k, \theta, g_1, \ldots, g_t$ e os demais transcendentes que possam aparecer. Pelo princípio de Liouville, deve ser uma identidade em θ; então podemos trocar θ por $\mu\theta$, em que $\mu \neq 0$ é uma constante, o que resulta

$$\mathrm{P} = \tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \mu\theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) + \textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}_\mathrm{i}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \mu\theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \tfrac{\mathrm{dy}_\mathrm{i}}{\mathrm{dx}} +$$
$$\mu\theta \tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial (\mu\theta)}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \mu\theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \left(\tfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \tfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}_\mathrm{i}} \tfrac{\mathrm{dy}_\mathrm{i}}{\mathrm{dx}} \right) + \textstyle\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}} \tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{g}_\mathrm{j}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \mu\theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) \tfrac{\mathrm{dg}_\mathrm{j}}{\mathrm{dx}} \tag{11}$$

Perceba que o lado direito da última igualdade é igual a $\frac{d}{dx} f(x, y_1, \ldots, y_k, \mu\theta, g_1, \ldots, g_t)$. Deste modo, olhando para as equações (10) e (11), percebemos que as derivadas em x de $f(x, y_1, \ldots, y_k, \theta, g_1, \ldots, g_t)$ e de $f(x, y_1, \ldots, y_k, \mu\theta, g_1, \ldots, g_t)$ são idênticas, o que significa que estas funções diferem por uma constante C:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \mu\theta, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_\mathrm{t}) = \mathrm{C}. \tag{12}$$

Fazendo $x = x_0$, $y_{i0} = y_i(x_0)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $g_{j0} = g_j(x_0)$ $(j = 1, \ldots, t)$ e $\theta_0 = \theta(x_0)$ teremos

$$f(x_0, y_{10}, \ldots, y_{k0}, \theta_0, g_{10}, \ldots, g_{t0}) - f(x_0, y_{10}, \ldots, y_{k0}, \mu\theta_0, g_{10}, \ldots, g_{t0}) = C.$$

Substituindo em (12):

$$f(x,y_1,\dots,y_k,\theta,g_1,\dots,g_t)-f(x_0,y_{10},\dots,y_{k0},\theta_0,g_{10},\dots,g_{t0})$$
$$=f(x,y_1,\dots,y_k,\mu\theta,g_1,\dots,g_t)-f(x_0,y_{10},\dots,y_{k0},\mu\theta_0,g_{10},\dots,g_{t0}).$$

Diferenciando em μ e fazendo $\mu=1$ encontramos

$$\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,y_1,\dots,y_k,\theta,g_1,\dots,g_t)-\theta_0\frac{\partial f}{\partial\theta}(x_0,y_{10},\dots,y_{k0},\theta_0,g_{10},\dots,g_{t0})=0.$$

Essa equação é algébrica em $x,y_1,\dots,y_k,\theta,g_1,\dots,g_t$. Pelo princípio de Liouville, podemos trocar θ por η, obtendo

$$\frac{\partial f}{\partial\eta}(x,y_1,\dots,y_k,\eta,g_1,\dots,g_t)=\frac{\theta_0}{\eta}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x_0,y_{10},\dots,y_{k0},\theta_0,g_{10},\dots,g_{t0}).$$

Chamando $K=\frac{\partial f}{\partial\theta}(x_0,y_{10},\dots,y_{k0},\theta_0,g_{10},\dots,g_{t0})$ e integrando em η de algum η_0 a η obtemos

$$f(x,y_1,\dots,y_k,\eta,g_1,\dots,g_t)=K\theta_0(\ln\eta-\ln\eta_0)+f(x,y_1,\dots,y_k,\eta_0,g_1,\dots,g_t).$$

Substituindo este resultado em (9) com $\eta=e^u$ veremos que a expressão de $\int Pdx$ não conterá mais este monômio, o que diminui a quantidade de monômios em uma unidade, contradizendo a nossa hipótese sobre a quantidade de monômios transcendentes de $\int Pdx$. Isto finaliza a prova da afirmação.

Segue da Afirmação 1 que $\int Pdx$ deve ter a forma

$$\int Pdx=f(x,y_1,\dots,y_k,\ln u_1,\dots,\ln u_r). \tag{13}$$

Afirmação 2: $\int Pdx$ se escreve como (6), com cada u_i algébrico ou transcendente de ordem $m-1$.

Chame cada $\ln u_i=\theta_i$. Derivando (13) em x, obtemos

$$P=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_1,\dots,y_k,\theta_1,\dots,\theta_r)+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y_1,\dots,y_k,\theta_1,\dots,\theta_r)\frac{dy_i}{dx}+$$
$$\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial\theta_j}(x,y_1,\dots,y_k,\theta_1,\dots,\theta_r)\frac{1}{u_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial u_j}{\partial y_l}\frac{dy_l}{dx}\right). \tag{14}$$

Como (14) é algébrica em $x,y_1,\dots,y_k,\theta_1,\dots,\theta_r$ e outras funções transcendentes que possam aparecer nos cálculos, podemos, pelo princípio de Liouville, substituir θ_1 por $\mu_1+\theta_1$. Assim, após integrar em x,

$$f(x,y_1,\dots,y_k,\theta_1,\dots,\theta_r)-f(x,y_1,\dots,y_k,\mu_1+\theta_1,\theta_2\dots,\theta_r)=C=const.$$

Fazendo, como antes, $x=x_0$ obteremos

$$f(x,y_1,\dots,y_k,\theta_1,\dots,\theta_r)-f(x_0,y_{10},\dots,y_{k0},\theta_{10},\dots,\theta_{r0})$$
$$=f(x,y_1,\dots,y_k,\mu_1+\theta_1,\theta_2\dots,\theta_r)-f(x_0,y_{10},\dots,y_{k0},\mu_1+\theta_{10},\theta_{20}\dots,\theta_{r0}).$$

Derivando em μ_1 e fazendo $\mu_1=0$ obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_1}(x,y_1,\dots,y_k,\theta_1,\dots,\theta_r)=\frac{\partial f}{\partial\theta_1}(x_0,y_{10},\dots,y_{k0},\theta_{10},\dots,\theta_{r0})=A_1=const.$$

Essa última igualdade é algébrica em $x,y_1,\dots,y_k,\theta_1,\dots,\theta_r$. Substituindo, pelo princípio de Liouville, θ_1 por η_1 e integrando em η_1 teremos

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \eta_1, \theta_2, \dots, \theta_\mathrm{r}) = \mathrm{A}_1(\eta_1 - \eta_{10}) + \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \eta_{10}, \theta_2, \dots, \theta_\mathrm{r}).$$

Fazendo agora $\eta_1 = \ln \mathrm{u}_1$, obtemos

$$\int \mathrm{Pdx} = \mathrm{A}_1 \ln \mathrm{u}_1 + \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \eta_{10}, \theta_2, \dots, \theta_\mathrm{r}) - \mathrm{A}_1\eta_{10}.$$

Repetindo este raciocínio para $\theta_2, \dots, \theta_\mathrm{r}$ obteremos

$$\int \mathrm{Pdx} = \mathrm{A}_1 \ln \mathrm{u}_1 + \dots + \mathrm{A}_\mathrm{r} \ln \mathrm{u}_\mathrm{r} + \mathrm{u}_0,$$

em que $\mathrm{u}_0 = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{k}, \eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{\mathrm{r}0}) - \mathrm{A}_1\eta_{10} - \dots - \mathrm{A}_\mathrm{r}\eta_{\mathrm{r}0}$ é algébrico em $\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{k}$. Isso prova a afirmação 2.

Afirmação 3: Todas as u_i, $i = 1, \dots, r$, são algébricas em $x, y_1, \dots, y_k$.

Suponha o contrário. Então, $\int Pdx$ é de m-ésima ordem, com $m \geq 2$. Desta forma, algum u_i é transcendente de ordem $m - 1$. Efetuando os cálculos como na Afirmação 1, concluiremos que sua expressão deve ser da forma $u_i = \vartheta_i(x, y_1, \dots, y_k, \ln v_1, \dots, \ln v_s)$, em que os $v_j = v_j(x, y_1, \dots, y_k), j = 1, \dots, s,$ são algébricos ou transcendentes de ordem $m - 2$. Efetuando os cálculos como na Afirmação 2, concluiremos que os $\ln v_j$ devem aparecer na expressão de $\int Pdx$ de forma linear e com coeficientes constantes, o que implica que não devem aparecer na expressão de u_i, gerando assim uma contradição. Portanto, os u_i são algébricos e a primeira parte do teorema está completamente demonstrada. A segunda parte (em que P e as derivadas $\frac{dy_i}{dx}$ são funções racionais) será provada na próxima seção, como um corolário do teorema de Ostrowski.

Vamos usar o método de Liouville para investigar integrais da forma $\int Re^S dx$.

Teorema 4.1. *Sejam $R(x)$ e $S(x)$ funções algébricas com S não constante. Se $\int R(x)e^{S(x)}dx$ é elementar, então $\int R(x)e^{S(x)}dx = T(x)e^{S(x)} + C$, em que $T(x)$ é uma função algébrica e C é uma constante.*

Prova: Escreva $y = R$ e $z = e^S$. Então, $\frac{dy}{dx} = R'$ e $\frac{dz}{dx} = S'z$ são funções algébricas de x, y, z. Pelo Teorema 2.8,

$$\int R(x)e^{S(x)}dx = \int yzdx = u_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^{r} A_i \ln u_i(x, y, z),$$

em que $u_0, u_1, \dots, u_r$ são funções algébricas de x, y, z. Por simplicidade, escreveremos

$$u_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^{r} A_i \ln u_i(x, y, z) = f(x, y, z).$$

Perceba nessa igualdade que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ são funções algébricas de x, y, z. Assim, temos

$$\int yzdx = f(x, y, z). \tag{15}$$

Derivando em x obtemos

https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6556.

$$yz = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + R^{'}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + S^{'}z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z).$$

Essa é uma equação algébrica em x, y, z, mas z é transcendente. Pelo Princípio de Liouville, podemos substituir z por μz, $\mu \neq 0$ uma constante:

$$\mu yz = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\mu z) + R^{'}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\mu z) + \mu S^{'}z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\mu z) = \frac{d}{dx}f(x,y,\mu z).$$

Integrando essa equação em x e comparando com (15), obteremos

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mu\mathrm{z}) = \mu\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) + \mathrm{C},$$

em que C é uma constante. Fazendo $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$, obtemos

$$\mathrm{C} = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mu\mathrm{z}_0) - \mu\mathrm{f}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0)$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mu\mathrm{z}) = \mu\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mu\mathrm{z}_0) - \mu\mathrm{f}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0).$$

Derivando em μ e fazendo $\mu = 1$ teremos

$$\mathrm{z}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) + \mathrm{z}_0\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0).$$

Chame $C_1 = z_0\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)$. Então,

$$z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f(x,y,z) + C_1.$$

Esta é uma equação algébrica. Pelo princípio, podemos trocar z por ζ e obter

$$\zeta\frac{\partial f}{\partial \zeta}(x,y,\zeta) = f(x,y,\zeta) + C_1. \tag{16}$$

Esta é uma equação diferencial da forma

$$\mathrm{xy}^{'} = \mathrm{y} + \mathrm{C}.$$

Temos que

$$\frac{\mathrm{xy}^{'} - \mathrm{y}}{\mathrm{x}^2} = \left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)^{'} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x}^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x}} + \mathrm{C}_1 \Rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{C}_1\mathrm{x} - \mathrm{C},\ \mathrm{C}_1 = \frac{\mathrm{y}_0 + \mathrm{C}}{\mathrm{x}_0}, \mathrm{y}_0 = \mathrm{y}(\mathrm{x}_0).$$

Então, a solução de (16) é

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\zeta) = \zeta \cdot \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\zeta_0) + \mathrm{C}_1}{\zeta_0} - \mathrm{C}_1.$$

Substituindo-a em (15) com $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{S}}$, teremos finalmente

$$\int \mathrm{R}(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\mathrm{S}(\mathrm{x})}\mathrm{dx} = \int \mathrm{yzdx} = \mathrm{e}^{\mathrm{S}} \cdot \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\zeta_0) + \mathrm{C}_1}{\zeta_0} - \mathrm{C}_1 = \mathrm{T}(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\mathrm{S}(\mathrm{x})} - \mathrm{C}_1,$$

em que $\mathrm{T}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\zeta_0)+\mathrm{C}_1}{\zeta_0} = \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{R}(\mathrm{x}),\zeta_0)+\mathrm{C}_1}{\zeta_0}$ é uma função algébrica. ■

Observação 4.2. *De forma totalmente análoga, mostra-se que se R e S são racionais, então $\int Re^S dx = Te^S + C$, em que T é racional e C é uma constante. Basta, para isto, usar a segunda parte do Teorema 2.8.*

Exemplo 4.3 (Moraes Filho, 2001). *Mostrar que $\int e^{S(x)}dx$ não é elementar se S for um polinômio de grau > 1. Com efeito, suponha que é elementar. Pelo Teorema 4.1, $\int e^{S(x)}dx =$*

$T(x)e^{S(x)} + C$, em que T é uma função racional. Derivando ambos os membros em x teremos $e^S = T'e^S + TS'e^S$, logo $1 = T' + TS'$. Ponha $T = U/V$, sendo essa uma fração irredutível. Então,

$$1 = \left(\frac{U}{V}\right)' + \frac{U}{V}S' \Rightarrow V^2 = U'V - UV' + UVS' \Rightarrow V\left(V - U' - US'\right) =- UV'.$$

Assuma que V tem grau > 0. Então, V tem uma raiz de multiplicidade $k > 0$, o que nos leva a concluir que essa raiz é de multiplicidade $k - 1$ em V'. Assim, o lado esquerdo da última igualdade tem grau maior do que o lado direito, o que é um absurdo. Então, o grau de V deve ser 0 e, portanto, V é uma constante. Então, a última igualdade nos leva a $U' = US' - V$. Novamente, o lado esquerdo desta igualdade tem grau menor do que o lado direito, outro absurdo. Portanto, $\int e^{S(x)}dx$ não é elementar. Em particular, $\int e^{x^2}dx$ não é elementar. O mesmo tipo de raciocínio permite mostrar que $\int \frac{e^x}{P(x)}dx$, com P um polinômio de grau ≥ 1, não é elementar.

5. O método de Ostrowski

Iniciamos esta seção revisando alguns conteúdos de álgebra (para mais detalhes e provas veja Gonçalves (1979)).

Definição 5.1. *Seja F um corpo. Um elemento t de uma extensão $G \supset F$ é* algébrico *em relação ao corpo F se satisfaz uma equação da forma*

$$\mathrm{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = 0}, \quad (17)$$

cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$. Suponha que $n > 1$ é o menor grau que uma equação como (17) é satisfeita para t. Juntando t a F, obteremos um corpo $F[t] \subset G$, o menor subcorpo de G que contém t e F, que chamamos uma extensão algébrica de grau n *de F. Uma extensão $G \supset F$ que não é algébrica será chamada uma* extensão transcendente*.*

Se t é algébrico de grau n sobre F, então

$$F[t] = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} | a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in F\}.$$

Se t é transcendente, denotamos por $F(t)$ o menor subcorpo de G que contém t e F. Pode ser mostrado que $F(t)$ é isomorfo ao corpo $F(x)$ das funções racionais de x via identificação $t \equiv x$.

Proposição 5.2. *Se G é uma extensão algébrica de F, então existe um $t \in G$ tal que $G = F[t]$.*

Definição 5.3. *Uma extensão algébrica $F[t_1, \ldots, t_k]$ de F formada por juntar a F uma quantidade finita de elementos $t_1, \ldots, t_k$ é chamada uma* extensão algébrica de posto k *de F e denotada por $\overline{F}$, desde que k seja o número mínimo de tais extensões.*

Uma extensão algébrica de posto k pode ser construída por adições sucessivas dos t_i:

$$F \subset F_1 = F[t_1] \subset F_2 = F_1[t_2] \subset \ldots \subset \overline{F} = F_k = F_{k-1}[t_k].$$

Definição 5.4. *Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e seja F um conjunto de funções $f: D \to \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Toda função $f \in F$ é uniforme e holomorfa em D, exceto numa quantidade enumerável de singularidades isoladas.*
2. *Se $f \in F$, então $f' \in F$.*
3. *F contém todas as constantes e é um corpo.*

Um tal conjunto F é chamado de corpo Liouvilliano *em D.*

Exemplo 5.5. *O conjunto das funções racionais em $\mathbb{C}$ é um corpo Liouvilliano.*

A expressão (5) mostra que se t é algébrico sobre um corpo Liouvilliano F, então $t' \in F[t]$.

Seja $\Theta(z)$ uma função uniforme e holomorfa em D, exceto por uma quantidade enumerável de singularidades isoladas. Se Θ for transcendente sobre F, então o corpo $F(\Theta)$ obtido ao juntar Θ a F é o corpo de funções racionais de Θ em F.

Juntando a F uma grandeza Θ transcendente, obtemos um corpo $F(\Theta)$ que não é necessariamente Liouvilliano, mas pode acontecer de alguma extensão algébrica $\overline{F(\Theta)}$ ser Liouvilliana. Isto motiva a próxima definição.

Definição 5.6. *Uma extensão algébrica $\overline{F(\Theta)}$ de $F(\Theta)$ contendo Θ' será chamada de* extensão Liouvilliana transcendente simples *de F.*

Definição 5.7. *Uma* extensão Liouvilliana transcendente de posto n *é o corpo F_n obtido efetuando n extensões Liouvillianas transcendentes simples consecutivas sobre F, desde que n seja o número mínimo de tais extensões.*

Se tivermos $\Theta = \ln u$, com $u \in F$, então Θ não é algébrico sobre F, mas $\Theta' = \frac{u'}{u} \in F$. Nesse caso, uma extensão Liouvilliana $\overline{F(\ln u)}$ será chamada uma *extensão logarítmica simples* de F em D. Se tivermos $\Theta = e^u$, com $u \in F$, então Θ não é algébrico em F, mas $\Theta' = u'\Theta \in F(\Theta)$. Nesse caso, uma extensão Liouvilliana $\overline{F(e^u)}$ será chamada uma *extensão exponencial simples* de F em D.

Definição 5.8. *Extensões exponenciais e logarítmicas simples serão chamadas de* extensões elementares simples*. Uma* extensão elementar *de F é um corpo Liouvilliano obtido a partir de F por meio de uma quantidade finita de extensões elementares simples.*

Perceba a grande sacada de Ostrowski: as extensões elementares são a tradução para a álgebra das funções transcendentes de ordem m. Uma função elementar sobre F é, portanto, uma função que pertence a alguma extensão elementar de F.

Exemplo 5.9. *Considere a função $g(x) = \sqrt{x}\ln\ln(x + e^{-x}) + e^{e^x}$ dada no Exemplo 2.6. Seja F o conjunto das funções racionais em $\mathbb{C}$. Temos a cadeia de corpos Liouvillianos*

$$F \subset F_0 = F[\sqrt{x}] \subset F_1 = \overline{F_0(t_1)} \subset F_2 = \overline{F_1(t_2)} \subset F_3 = \overline{F_2(t_3)} \subset F_4 = \overline{F_3(t_4)}$$

em que $t_1 = e^x, t_2 = e^{t_1}, t_3 = \ln\left(x + \frac{1}{t_1}\right), t_4 = \ln t_3$. *Assim,* F_4 *é uma extensão elementar de* F *e* $g \in F_4$.

Antes de enunciarmos o teorema principal desta seção, precisaremos de dois lemas. O primeiro lema dita, essencialmente, a forma que a primitiva de uma função, se for elementar, deve ter. O segundo é um resultado técnico que servirá para executarmos o passo de indução na prova do teorema.

Lema 5.10. *Seja* F *um corpo Liouvilliano em um domínio aberto* $D \subset \mathbb{C}$. *Seja* $\Theta(z, \alpha)$ *uma função de* z *e* α, *com* $z \in D$ *e* $\alpha \in A$, *em que* A *é um subconjunto de* $\mathbb{C}$, *tal que* Θ *é diferenciável em* α, *é uniforme e holomorfa em* z *e satisfaz uma equação diferencial*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = h(z, \Theta), \tag{18}$$

em que $h(z,t)$ *é independente de* α *e é uma função algébrica de* t *em* F. *Seja* $W(z,t)$ *uma função cujas derivadas em* z *e em* t *são algébricas de* t *em* F. *Suponha que existe um* $\alpha_0 \in A$ *tendo a seguinte propriedade: a função* $\theta(z) = \Theta(z, \alpha_0)$ *é transcendente em* F *e satisfaz*

$$W\big(z, \theta(z)\big) = 0, \forall z \in D, \tag{19}$$

e

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = K\big(z, \theta(z)\big), \tag{20}$$

em que $K(z,t)$ *não é identicamente nula em* z *e* t, *e é algébrica em* t *em relação a* F. *Nessas hipóteses, existe uma constante* c *tal que*

$$W(z,t) = c\int_{\theta(z)}^{t} \frac{dt}{K(z,t)}. \tag{21}$$

Prova: Derive (19) em z para obter

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{z}}\big(\mathrm{z}, \theta(\mathrm{z})\big) + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \theta}\big(\mathrm{z}, \theta(\mathrm{z})\big)\theta'(\mathrm{z}) = 0.$$

Por (18),

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{z}}\big(\mathrm{z}, \theta(\mathrm{z})\big) + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \theta}\big(\mathrm{z}, \theta(\mathrm{z})\big)h\big(\mathrm{z}, \theta(\mathrm{z})\big) = 0.$$

Pelas hipóteses do enunciado, essa é uma equação algébrica com θ transcendente. Pelo princípio de Liouville, podemos substituir θ por Θ e obter

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{z}}\big(\mathrm{z}, \Theta(\mathrm{z}, \alpha)\big) + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \Theta}\big(\mathrm{z}, \Theta(\mathrm{z}, \alpha)\big)h\big(\mathrm{z}, \Theta(\mathrm{z}, \alpha)\big) = 0.$$

Novamente por (18),

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{z}}\big(\mathrm{z}, \Theta(\mathrm{z}, \alpha)\big) + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \Theta}\big(\mathrm{z}, \Theta(\mathrm{z}, \alpha)\big)\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{z}, \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\mathrm{W}\big(\mathrm{z}, \Theta(\mathrm{z}, \alpha)\big) = 0.$$

Integrando em z, obtemos

$$W\big(z,\Theta(z,\alpha)\big)=C(\alpha). \tag{22}$$

A expressão à esquerda de (22) é diferenciável em α, logo, C é diferenciável em α. Ponha $c=C'(\alpha_0)$. Temos

$$c=C'(\alpha_0)=\frac{\partial W}{\partial \theta}\big(z,\theta(z)\big)\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha_0}\overset{(20)}{\cong}\frac{\partial W}{\partial \theta}\big(z,\theta(z)\big)K\big(z,\theta(z)\big).$$

Essa é uma equação algébrica. Pelo princípio, podemos trocar θ por t e obter (lembrando que K não é identicamente nula)

$$\frac{\partial W}{\partial t}(z,t)=\frac{c}{K(z,t)}.$$

Integrando em t de θ a t, teremos finalmente

$$W(z,t)=\underbrace{W\big(z,\theta(z)\big)}_{=0\ por\ (19)}+\int_{\theta(z)}^{t}\frac{c}{K(z,t)}dt=c\int_{\theta(z)}^{t}\frac{dt}{K(z,t)}. \blacksquare$$

Observação 5.11. *Dois casos especiais são particularmente importantes.*

1. *Seja* $\Theta(z,\alpha)=\alpha e^{p(z)}$, *com* $p\in F$. *A equação* (18) *se reduz a* $\frac{\partial \Theta}{\partial z}=p'\Theta$. *Para* $\alpha=\alpha_0=1$ *temos*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}(z,1)=e^{p(z)}=\theta(z)\Rightarrow K(z,t)=t.$$

Por (21), *segue que*

$$W(z,t)=c(\ln t-\ln\theta(z))=c\big(\ln t-p(z)\big). \tag{23}$$

2. *Seja* $\Theta(z,\alpha)=\ln p(z)+\alpha$, $p\in F$. *A equação* (18) *se reduz a* $\frac{\partial \Theta}{\partial z}=\frac{p'}{p}$. *Para* $\alpha=\alpha_0=0$ *temos*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}(z,0)=1\Rightarrow K(z,t)\equiv 1.$$

Por (21) *segue que*

$$W(z,t)=c\big(t-\theta(z)\big)=c(t-\ln p(z)). \tag{24}$$

Lema 5.12. *Seja* F *um corpo Liouvilliano sobre um domínio aberto* $D\subset\mathbb{C}$. *Suponha que para* $\varphi\in F$ *temos*

$$\int\varphi(z)dz=u_0(z)+\sum_{i=1}^{r}A_i\ln u_i(z), \tag{25}$$

em que $A_1,\dots,A_r$ *são constantes e as funções* $u_0,u_1,\dots,u_r$ *são algébricas em* F. *Então podemos escrever* $\int\varphi(z)dz$ *como em* (25), *mas com as funções* $u_0,u_1,\dots,u_r\in F$.

Prova: Como as funções $u_0,u_1,\dots,u_r$ são algébricas em F, elas pertencem a alguma extensão algébrica $\overline{F}$ de F. Pela Proposição 5.2, existe um $\lambda\in\overline{F}$ tal que as $r+1$ funções u_i são escritas como

$$u_i(z)=U_i(\lambda,z)=\sum_{j=1}^{k-1}A_{ij}\lambda^j, \tag{26}$$

SILVA, Allan Kenedy Santos. Integração em finitos termos: o princípio de Liouville e o método de Ostrowski.
REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 1, p. e3004, 14 de março de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6556.

em que os coeficientes $A_{ij} \in F$ e λ satisfazem uma equação algébrica

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0 \tag{27}$$

com coeficientes $a_1, \dots, a_k \in F$ e o grau k é o menor possível.

Como λ é algébrico em F, então $\lambda' \in F[\lambda]$, logo

$$\lambda'(z) = \Lambda(\lambda, z) = \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} B_j\lambda^j\,, B_j \in F. \tag{28}$$

Derivando ambos os membros de (25) obtemos, em virtude de (26) e (28),

$$\varphi(z) = \left(\tfrac{\partial U_0}{\partial \lambda}(\lambda, z)\Lambda(\lambda, z) + \tfrac{\partial U_0}{\partial z}(\lambda, z)\right) + \textstyle\sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{U_i(\lambda,z)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \lambda}(\lambda, z)\Lambda(\lambda, z) + \frac{\partial U_i}{\partial z}(\lambda, z)\right). \tag{29}$$

Designemos por $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ as k raízes de (27). Aplicando um qualquer automorfismo de $F[\lambda_1, \dots, \lambda_k]$ que permute os λ_j e deixe F fixo, concluiremos que (28) e (29) permanecerão válidas se substituirmos λ por qualquer um dos λ_j. Deste modo, fazendo $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_k$ sucessivamente em (28) e (29) e somando os resultados de (29) membro a membro obtemos

$$k\varphi(z) = \sum_{j=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}(\lambda_j, z)\frac{d\lambda_j}{dz} + \frac{\partial U_0}{\partial z}(\lambda_j, z)\right) + \sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{U_i(\lambda_j, z)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \lambda}(\lambda_j, z)\frac{d\lambda_j}{dz} + \frac{\partial U_i}{\partial z}(\lambda_j, z)\right)\right];$$

então integrando:

$$k\int \varphi(z)dz = \sum_{j=1}^{k}\left[U_0(\lambda_j, z) + \sum_{i=1}^{r} A_i \ln U_i(\lambda_j, z)\right] = \sum_{j=1}^{k} U_0(\lambda_j, z) + \sum_{i=1}^{r} A_i \ln \prod_{j=1}^{k} U_i(\lambda_j, z)\,.$$

No entanto, as expressões

$$v_0 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} U_0(\lambda_j, z)\,,\ v_i = \prod_{j=1}^{k} U_i(\lambda_j, z) \qquad (i = 1, \dots, r)$$

são simétricas em $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, logo, pertencem[3] a F e podemos, portanto, escrever

$$\int \varphi(z)dz = v_0(z) + \sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{k}\ln v_i(z)\,. \blacksquare$$

Podemos agora enunciar e provar a generalização devida a Ostrowski do Teorema 2.8.

Teorema 5.13 (OSTROWSKI, 1945). *Seja F um corpo Liouvilliano em um domínio aberto $D \subset \mathbb{C}$. Seja $\varphi \in F$ uma função cuja integral $\int \varphi(z)dz$ pertence a uma extensão elementar F_r de F de posto r. Então existem constantes $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{C}$ e funções $u_0, u_1, \dots, u_r \in F$ tais que*

$$\textstyle\int \varphi(z)dz = u_0(z) + \sum_{i=1}^{r} A_i \ln u_i(z)\,. \tag{30}$$

Prova: Faremos a prova por indução sobre o número r de extensões simples. Para $r = 0$, o corpo F_0 é uma extensão algébrica de F. A função $\int \varphi(z)dz$ é então algébrica em F e, pelo Lema 5.12, $\int \varphi(z)dz \in F$. O teorema está demonstrado para este caso.

[3]Aqui usamos dois fatos: primeiro, que todo polinômio simétrico pode ser escrito, de modo único, como um polinômio em termos dos polinômios simétricos elementares; segundo, como os λ_j são soluções de uma equação algébrica em F, pelas relações de Girard, os polinômios simétricos elementares nos λ_j pertencem a F. Esses dois fatos nos mostram que $v_0, v_1, \dots, v_r \in F$. As provas desses fatos encontram-se em Hefez (2002).

https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6556.

Suponha que $r > 0$ e que o teorema está demonstrado para valores menores do que r. Seja

$$\mathrm{F_0} = \overline{\mathrm{F}} \subset \mathrm{F_1} = \overline{\mathrm{F_0}(\Theta_1)} \subset \mathrm{F_2} = \overline{\mathrm{F_1}(\Theta_2)} \subset \ldots \subset \mathrm{F_r} = \overline{\mathrm{F_{r-1}}(\Theta_r)} \tag{31}$$

a cadeia de extensões Liouvillianas transcendentes simples levando F_0 a F_r. Seja $r' \leq r$ o número de extensões logarítmicas entre elas.

r' é o posto logarítmico da cadeia (31). F_r é uma extensão de F_1 de posto $r-1$. O posto logarítmico r'_0 da parte da cadeia (31) que leva F_1 a F_r é igual a $r'-1$, se Θ_1 for um logaritmo em F_0, e é igual a r', se Θ_1 for uma exponencial em F_0.

Aplicando a hipótese de indução a F_1, teremos

$$\int \varphi(z)dz = u_0 + \sum_{i=1}^{r'_0} B_i \ln u_i \tag{32}$$

em que os B_i são constantes e $u_0, u_1, \ldots, u_{r'_0} \in F_1$. No entanto, $\varphi \in F \subset F_0 \subset F_0(\Theta_1)$, logo, pelo Lema 5.12, podemos reescrever (32) com os $u_0, u_1, \ldots, u_{r'_0} \in F_0(\Theta_1)$ (e outros B_i envolvidos na expressão). Dessa forma $u_i = v_i(\Theta_1), i = 0,1, \ldots, r'_0$, em que as funções v_i são racionais de Θ_1 com respeito a F_0.

Considere agora a função

$$W(z,t) = v_0(t) + \sum_{i=1}^{r'_0} B_i \ln v_i(t) - \int \varphi(z)dz. \tag{33}$$

O Lema 5.10 pode ser aplicado a este W com $F = F_0$ e $\theta = \Theta_1$. Como Θ_1 é uma exponencial ou um logaritmo, podemos usar os resultados expostos na Observação 5.11.

Para uma extensão exponencial temos $r'_0 = r'$ e $\Theta_1 = e^{p(z)}$, com $p \in F_0$. Segue de (23) que

$$W(z,t) = c \ln t - cp(z).$$

Substituindo t por uma constante adequada, t_0, obtemos de (33):

$$\int \varphi(z)dz = (v_0(t_0) + cp(z) - c \ln t_0) + \sum_{i=1}^{r'} B_i \ln v_i(t_0), \tag{34}$$

em que $v_0(t_0) + cp - c \ln t_0$ e $v_i(t_0), i = 1, \ldots, r'$, pertencem a F_0. Pelo Lema 5.12, podemos escrever (34) de forma análoga, mas com as funções componentes pertencendo a F. Pelo princípio da indução, o teorema vale para r no caso exponencial.

Se for uma extensão logarítmica, $\Theta_1 = \ln p(z)$, com $p \in F_0$ e $r'_0 = r' - 1$. Temos por (24) que

$$W(z,t) = ct - c \ln p(z).$$

Então, por (33), com $t = t_0$,

$$\int \varphi(z)dz = (v_0(t_0) - ct_0) + \sum_{i=1}^{r'-1} B_i \ln v_i(t_0) + c \ln p(z) \tag{35}$$

em que $v_0(t_0) - ct_0, v_i(t_0)\ (i = 1, \ldots, r' - 1), p$ pertencem a F_0. Pelo Lema 5.12, podemos escrever (35) de forma análoga, mas com as funções componentes pertencendo a F. Pelo princípio da

SILVA, Allan Kenedy Santos. Integração em finitos termos: o princípio de Liouville e o método de Ostrowski.
REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 1, p. e3004, 14 de março de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6556.

indução, o teorema vale para r no caso logarítmico. Como provamos que o teorema vale para r nos casos exponencial e logarítmico, a prova está terminada. ■

Perceba agora que o Teorema 2.8 é um caso particular desse. Basta tomar F como o corpo das funções $f(x, y_1, .., y_k)$ em $\mathbb{C}$ tais que $f, \frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{dy_k}{dx}$ são algébricas. Para a versão racional, tome F como o corpo das funções $f(x, y_1, .., y_k)$ em $\mathbb{C}$, tais que $f, \frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{dy_k}{dx}$ são racionais.

Como aplicação, demonstraremos o seguinte teorema, também devido a Ostrowski.

Teorema 5.14. *Sejam F um corpo Liouvilliano em um domínio aberto $D \subset \mathbb{C}$, $p \in F$ e $w = \int p(z)dz$ transcendente em F. Dadas duas funções $P, Q \in F$, a integral $\int (Pw + Q)dz$ é elementar se, e somente se, existem constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, uma função $a \in F$ e uma função elementar A sobre F tais que*

$$P(z) = \alpha p(z) + a'(z) \tag{36}$$

e

$$Q(z) = (a(z) + \beta)p(z) + A'(z). \tag{37}$$

Se estas condições forem satisfeitas, então

$$\int \big(P(z)w + Q(z)\big)dz = \frac{\alpha}{2}w^2 + (a(z) + \beta)w + A(z). \tag{38}$$

Para a prova do teorema, necessitaremos do seguinte lema.

Lema 5.15. *Seja F um corpo Liouvilliano em um domínio aberto $D \subset \mathbb{C}$, $p \in F$ e $w = \int p(z)dz$ transcendente em F. Seja $f(w, z) \in F(w)$ uma função racional de w com respeito a F, e suponha que a integral $\Phi(w, z) = \int f(w, z)dz$ é elementar. Então,*

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial f}{\partial w}(w + \gamma, z)dz = \frac{\partial \Phi}{\partial w}(w + \gamma, z) + C'(\gamma), \tag{39}$$

em que z_0 é uma constante e C é uma função diferenciável no parâmetro γ.

Prova: Pelo teorema de Ostrowski,

$$\Phi(w, z) = u_0(w, z) + \sum_{i=1}^{r} A_i \ln u_i(w, z),$$

em que os $f_i, i = 0, ..., r$, são racionais em w com respeito a F. Pela expressão acima, concluímos que $\frac{\partial \Phi}{\partial w}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ são racionais. Derivando em z:

$$f(w, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial w}(w, z)p(z) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(w, z).$$

Essa equação é algébrica e w é transcendente. Pelo princípio de Liouville, podemos trocar w por $w + \gamma$, $\gamma \in \mathbb{C}$:

$$f(w + \gamma, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial w}(w + \gamma, z)p(z) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(w + \gamma, z) = \frac{d}{dz}\Phi(w + \gamma, z)$$

Integrando em z:

$$\int_{z_0}^{z} f(w+\gamma,z)dz = \Phi(w+\gamma,z) + C.$$

A constante de integração C não depende de w nem de z, logo só depende do parâmetro γ. Como f e Φ são diferenciáveis em γ, então C é diferenciável em γ. Portanto, derivando a expressão anterior em γ obteremos (39). ■

Prova do teorema: Aplicando o lema anterior a $f(w,z) = P(z)w + Q(z)$, teremos

$$\int P(z)dz = \frac{\partial \Phi}{\partial w}(w+\gamma,z) + C^{'}(\gamma). \tag{40}$$

Ponha $\frac{\partial \Phi}{\partial w}(w,z) = \Gamma(w,z)$. O lado esquerdo de (40) não depende de γ, de maneira que

$$\Gamma(w+\gamma,z) + C^{'}(\gamma) = \Gamma(w,z) + C^{'}(0) \Rightarrow \Gamma(w+\gamma,z) = \Gamma(w,z) + c(\gamma),$$

em que $c(\gamma) = C^{'}(0) - C^{'}(\gamma)$. Derivando esta relação em γ, obtemos $\frac{\partial \Gamma}{\partial w}(w+\gamma,z) = c^{'}(\gamma)$, e vemos que $\frac{\partial \Gamma}{\partial w}$ não depende de w nem de z. Fazendo $\alpha = c^{'}(0)$, teremos $\frac{\partial \Gamma}{\partial w}(w,z) = \alpha$. Então, integrando em w:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w}(w,z) = \Gamma(w,z) = \alpha w + a(z),$$

em que $a \in F$ (a não depende de w, logo necessariamente pertence a F). Substituindo esse resultado em (40), teremos

$$\int P(z)dz = \alpha(w+\gamma) + a(z) + C^{'}(\gamma).$$

Derivando em z:

$$P(z) = \alpha p(z) + a^{'}(z). \tag{41}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \int \big(\mathrm{P(z)w + Q(z)}\big)\mathrm{dz} &= \int \Big[\Big(\alpha \mathrm{p(z)} + \mathrm{a}^{'}\mathrm{(z)}\Big)\mathrm{w} + \mathrm{Q(z)}\Big]\,\mathrm{dz} \\ &= \alpha \int \mathrm{p(z)wdz} + \int \mathrm{a}^{'}\mathrm{(z)wdz} + \int \mathrm{Q(z)dz} \\ &= \alpha\frac{\mathrm{w}^2}{2} + \mathrm{a(z)w} - \int \mathrm{a(z)p(z)dz} + \int \mathrm{Q(z)dz} \\ &= \frac{\alpha}{2}\mathrm{w}^2 + \mathrm{a(z)w} + \int \big(\mathrm{Q(z)} - \mathrm{a(z)p(z)}\big)\mathrm{dz}, \end{aligned} \tag{42}$$

em que usamos as fórmulas de integração por substituição e integração por partes na 3ª igualdade.

Ponha agora

$$\overline{Q}(z) = Q(z) - a(z)p(z).$$

Como $\int \big(P(z)w + Q(z)\big)dz$ é elementar, então $\int \overline{Q}(z)dz$ é elementar. Assim,

$$\int \overline{Q}(z)dz = R(w,z) = R_0(w,z) + \sum_{j=1}^{s} B_j \ln R_j(w,z)$$

SILVA, Allan Kenedy Santos. Integração em finitos termos: o princípio de Liouville e o método de Ostrowski.
REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 1, p. e3004, 14 de março de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6556.

em que os R_j $(j = 0, ..., s)$ pertencem a $F(w)$ e os B_j não dependem de z. Aplicando o Lema 5.15 à essa última expressão e notando que $\overline{Q}(z)$ não depende de w, obtemos $\frac{\partial R}{\partial w}(w,z) = \beta = const$. Segue daí que $\frac{\partial}{\partial w}(R(w,z) - \beta w) = 0$. Como essa derivada é racional e w não é algébrico, ela deve ser, pelo princípio, uma identidade em w. Então, a função $R(u,z) - \beta u$ depende somente de z. Pondo $u = u_0$, teremos:

$$R(u,z) - \beta u = R(u_0, z) - \beta u_0.$$

Fazendo $u = w$:

$$R(w,z) = R(u_0,z) + \beta w - \beta u_0 = \beta w + \sum_{j=1}^{s} B_j \ln R_j(u_0, z) + R_0(u_0, z) - \beta u_0,$$

em que as funções $R_j(u_0, z), j = 1, ..., s$, e $R_0(u_0, z) - \beta u_0$ pertencem a F. Chamando

$$A(z) = \sum_{j=1}^{s} B_j \ln R_j(u_0, z) + R_0(u_0, z) - \beta u_0,$$

percebemos que A é elementar em F e satisfaz

$$\int \big(Q(z) - a(z)p(z)\big)dz = \int \overline{Q}(z)dz = \beta w + A(z)$$

$$\Rightarrow Q(z) - a(z)p(z) = \beta p(z) + A'(z). \tag{43}$$

Substituindo nossos resultados em (42), obteremos (38). Vemos de (42) que as igualdades (41) e (43) são também suficientes para que $\int \big(Q(z) - a(z)p(z)\big)dz$ seja elementar em F. ■

Corolário 5.16. *Sejam $R(z)$ e $S(z)$ funções racionais em $\mathbb{C}$. A integral $\int R(z) \ln S(z)\, dz$ é elementar se, e somente se,*

$$R(z) = \alpha \frac{S'(z)}{S(z)} + a'(z), \tag{44}$$

para alguma constante $\alpha \in \mathbb{C}$ e alguma função racional a.

Prova: Tomando $P = R, Q = 0$ e $w = \ln S$ teremos $p = \frac{dw}{dz} = \frac{S'}{S}$ e (36) se escreverá como (44). De (37) teremos $A'(z) =- (a(z) + \beta)p(z) =- (a(z) + \beta)\frac{S'(z)}{S(z)}$. Essa última expressão é uma função racional de z, logo sua primitiva é elementar e, portanto, A é elementar. Desse modo, basta apenas a validade de (44). ■

Analogamente, se demonstram os seguintes corolários:

Corolário 5.17. *Sejam $R(z)$ e $S(z)$ funções racionais em $\mathbb{C}$. A integral $\int R(z) \arctan S(z)\, dz$ é elementar se, e somente se,*

$$R(z) = \alpha \frac{S'(z)}{1+[S(z)]^2} + a'(z) \tag{45}$$

para alguma constante $\alpha \in \mathbb{C}$ e alguma função racional a.

SILVA, Allan Kenedy Santos. Integração em finitos termos: o princípio de Liouville e o método de Ostrowski.
REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 1, p. e3004, 14 de março de 2024.
https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6556.

Corolário 5.18. *Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ funções em $\mathbb{C}$ da forma $m(z) + n(z)\sqrt{1-z^2}$, com m e n racionais em z. A integral $\int \big(P(z) \operatorname{arcsen} z + Q(z)\big)dz$ é elementar se, e somente se,*

$$P(z) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}} + a'(z) \tag{46}$$

para alguma constante $\alpha \in \mathbb{C}$ e alguma função a da forma anterior.

Exemplo 5.19. *Considere a integral $\int \frac{\ln z}{z-z_0} dz$ .Tome $F = \mathbb{C}(z)$ o conjunto das funções racionais de z em $\mathbb{C}$, $P(z) = \frac{1}{z-z_0}$, $Q(z) = 0$, $w = \ln z$ e $p(z) = \frac{1}{z}$. Vamos dividir em dois casos.*

Caso $z_0 \neq 0$: Por (44)

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{\alpha}{z} + a'(z) \Rightarrow a(z) = \ln(z - z_0) - \alpha \ln z + C_1$$

em que C_1 é uma constante. Então $a \notin \mathbb{C}(z)$. Portanto, $\int \frac{\ln z}{z-z_0} dz$ não é elementar.

Caso $z_0 = 0$: Temos

$$\frac{1}{z} = \frac{\alpha}{z} + a'(z) \Rightarrow a(z) = (1-\alpha)\ln z + C_1$$

em que C_1 é uma constante. Então $a \in \mathbb{C}(z)$ se, e somente se, $\alpha = 1$. Neste caso $a(z) = C_1$. Por (37)

$$0 = (a(z) + \beta)p(z) + A'(z) = \frac{C_1 + \beta}{z} + A'(z) \Rightarrow A(z) =- (C_1 + \beta)\ln z + C_2.$$

Portanto, $\int \frac{\ln z}{z} dz$ é elementar e por (38)

$$\int \frac{\ln z}{z} dz = \frac{1}{2}(\ln z)^2 + C_2.$$

6. Conclusões

Desde a invenção do cálculo diferencial e integral, numerosos matemáticos se envolveram na tarefa de desenvolver técnicas para, dada uma função, determinar outra cuja derivada seja a função dada, processo esse chamado de primitivação ou integração. Mesmo com avanços, haviam ainda algumas classes de funções para as quais não era possível determinar suas primitivas, pelo menos não em representação finita. Em 1835, Liouville demonstrou que se uma função tem primitiva elementar, essa deve ter a forma dada pela Equação (1). Para provar isso, ele desenvolveu uma nova ferramenta, que hoje chamamos de Princípio de Liouville. Esse princípio, como foi visto na Seção 4, permite efetuar uma mudança de variáveis em uma expressão, tornando-a mais trabalhável. Esse mesmo princípio foi usado mais tarde por Ostrowski (Lema 5.10) em sua generalização. Sua ideia foi transformar o problema de integração em um problema algébrico. Para essa tarefa, ele criou o conceito de extensão Liouvilliana. Uma função elementar é, portanto, uma função que pertence a uma extensão Liouvilliana de um dado corpo de funções. Tal conceito foi utilizado por outros matemáticos para produzir extensões dos teoremas de Liouville e de Ostrowski, revelando a sua importância.

Referências

ABEL, N. H. Précis d'une theorie des fonctions elliptiques. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 4, p. 236-277, 1829. Disponível em: http://eudml.org/doc/183143. Acesso em: 11 mar. 2024.

CHERRY, G. W. Integration in Finite Terms with Special Functions: the Error Function. **Journal of Symbolic Computation**, v. 1, n. 3, p. 283-302, set. 1985.

CHURCHILL, R. V. **Variáveis complexas e suas aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Números irracionais e transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 1985.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: Impa, 1979.

HARDY, G. H. **The Integration of Functions of a Single Variable**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1916. Disponível em: https://archive.org/details/cu31924001539570. Acesso em: 11 mar. 2024.

HEFEZ, A. **Curso de álgebra**. v. 2, versão preliminar, 2002. Disponível em: https://docplayer.com.br/175412716-Curso-de-algebra-volume-ii-versao-preliminar-abramo-hefez.html. Acesso em: 22 jan. 2023.

KAUR, Y.; SRINIVASAN, V. R. Integration in Finite Terms: Dilogarithmic Integrals. **Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing**, v. 34, p. 539-551, jun. 2021. DOI: https://doi.org/10.1007/s00200-021-00518-3.

LIOUVILLE, J. Mémoire sur l’intégration d’une casse des fonctions transcendentes. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 13, p. 93-118, 1835. DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1835.13.93.

MAMEDE, R. **Funções sem primitiva elementar**. 2013. Disponível em: https://pt.scribd.com/document/364150706/Funcao-sem-primitiva-pdf#. Acesso em: 19 jan. 2023.

MORAES FILHO, D. C. de. “Professor, qual é a primitiva de e^x/x?” (O problema de integração em termos finitos). **Revista Matemática Universitária**, n. 31, p. 143-161, dez. 2001. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n31_Artigo05.pdf. Acesso em: 11 mar. 2024.

OSTROWSKI, M. A. Sur l'intégrabilité élémentaire de quelques classes d'expressions. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 18, p. 283-308, 1945. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02568114.

RISCH, R. H. The problem of integration in finte therms. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 139, p. 167-189, maio 1969. DOI: https://doi.org/10.2307/1995313.

RITT, J. F. **Integration in finite therms**: Liouville’s theory of elementary methods. New York: Columbia University Press, 1948.

ROSENLICHT, M. A. Liouville's theorem on functions with elementary integrals. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 24, n. 1, p. 153-161, 1968. DOI: https://doi.org/10.2140/pjm.1968.24.153.