Ordenação entre potências simétricas nos inteiros positivos

Order between symmetric powers on positive integers

Orden entre potencias simétricas en los enteros positivos

Rogério César dos Santos[1]
Universidade de Brasília (FUP/UnB), Brasília, DF, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-1362-2234, http://lattes.cnpq.br/0041767607288381

José Eduardo Castilho[2]
Universidade de Brasília (FUP/UnB), Brasília, DF, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-5326-4910, http://lattes.cnpq.br/0279747646054766

Antônio Luiz de Melo[3]
Universidade de Brasília (FUP/UnB), Brasília, DF, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-1809-9937, http://lattes.cnpq.br/7916809389452643

Resumo: É comum que apareçam desafios matemáticos do tipo: qual é o maior valor, 20^{33} ou 33^{20}? Incentivados por esse tipo de problema de comparação entre potências simétricas, neste artigo demonstraremos que, para quaisquer que sejam x e y inteiros positivos, com $y > x > 1$, vale a desigualdade $x^y > y^x$, com exceção dos pares $y = 3, x = 2$ e $y = 4, x = 2$. Isto é, a menos dessas duas exceções, a potência x^y de maior expoente é maior que a potência y^x de maior base. Vamos utilizar, para tanto, o princípio de indução, derivadas elementares e o limite fundamental exponencial.

Palavras-chave: Ordenação; Indução; Números Inteiros; Potências Simétricas.

Abstract: It is common to see mathematical challenges like: what is the greater value, 20^{33} or 33^{20}? Encouraged by this type of problem of comparison between symmetrical powers, in this article we will demonstrate that, for any x and y that are positive integers, with $y > x > 1$, the inequality $x^y > y^x$ holds, except for the pairs $y = 3, x = 2$ and $y = 4, x = 2$. That is, with these two exceptions, the power x^y of the larger exponent is greater than the power y^x of the larger base. For this we will use the principle of induction, the elementary derivatives and the fundamental exponential limit.

Keywords: Order; Induction; Integers Numbers; Symmetric Powers.

Resumen: Es común ver desafíos matemáticos como: ¿cuál es el valor mayor, 20^{33} o 33^{20}? Animados por este tipo de problema de comparación entre potencias simétricas, en este artículo demostraremos que, para cualquier x e y que sean números enteros positivos, con $y > x > 1$, se cumple la desigualdad $x^y > y^x$, a excepción de los pares $y = 3, x = 2$ y $y = 4, x = 2$. Es decir, con estas dos excepciones, la potencia x^y del exponente mayor es mayor que la potencia y^x de la base mayor. Para ello utilizaremos el principio de inducción, las derivadas elementales y el límite exponencial fundamental.

Palabras clave: Ordenación; Inducción; Números Enteros; Potencias Simétricas.

Data de submissão: 20 de janeiro de 2023.

Data de aprovação: 18 de março de 2023.

---

[1] **Currículo sucinto**: Graduado (2000) e mestre (2003) em Matemática, e doutor (2017) em Educação pela Universidade de Brasília. É professor da Universidade de Brasília, *Campus* Planaltina, e professor e orientador do Profmat (Programa de Mestrado Profissional em Matemática). **Contribuição de autoria**: Investigação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: professorrogeriocesar@gmail.com.

[2] **Currículo sucinto**: Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1988), mestrado em Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo (1991) e doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (2001). Atualmente é professor da Universidade de Brasília. **Contribuição de autoria**: Investigação, Escrita – Revisão. **Contato**: jecastilho@unb.br.

[3] **Currículo sucinto**: Possui Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (1989), e mestrado (1992) e doutorado (2000) em Matemática pela Universidade de Brasília. Atualmente é professor adjunto da Universidade de Brasília. **Contribuição de autoria**: Investigação, Escrita – Revisão. **Contato**: aluizm@gmail.com.

1. Introdução

Qual número é o maior, 44^{33} ou 33^{44}? E entre 66^{100} e 100^{66}, qual é o maior? Em alguns vídeos no YouTube de canais dedicados à divulgação da Matemática são provadas desigualdades como essas, nas quais as demonstrações são realizadas usando as noções básicas de Teoria dos Números. E no caso geral, isto é, dados x e y inteiros positivos, com $\mathrm{y} > \mathrm{x} > 1$, qual número é maior, x^{y} ou y^{x}? Há uma única resposta para esta pergunta nos inteiros positivos? Existe um critério para decidir qual desses valores é maior? A resposta é afirmativa, ou seja, sim. É o que vamos apresentar neste artigo.

Casos particulares podem ser provados de maneiras diversas. Por exemplo, para a prova de que 22^{33} é maior do que 33^{22}, pode-se proceder da seguinte maneira.

$$\frac{33^{22}}{22^{33}} = \frac{(3\cdot 11)^{11\cdot 2}}{(2\cdot 11)^{11\cdot 3}} = \frac{9^{11}\cdot\left(11^{11}\right)^2}{8^{11}\cdot\left(11^{11}\right)^3} = \left(\frac{9}{8}\right)^{11}\cdot\frac{1}{11^{11}} = \left(\frac{9}{88}\right)^{11} < 1.$$

Logo, $33^{22} < 22^{33}$. Ou seja, dependendo do caso, torna-se elementar provar que uma potência é maior do que a outra.

Um outro exemplo, menos natural, é a comparação entre 2022^{2023} e 2023^{2022}. Sabemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

quando n tende a infinito e, conforme veremos no decorrer deste artigo, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é uma sequência crescente. Logo,

$$\left(1+\frac{1}{2022}\right)^{2022} < e < 2022.$$

Assim,

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{2022} < 2022\,.$$

Portanto,

$$2023^{2022} < 2022^{2023}.$$

Seguindo essa ideia, podemos generalizar o caso das potências y^{y+1} e $(y+1)^y$, para $y > e$:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y < e < y \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y < y \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y+1}{y}\right)^y < y \Rightarrow$$

$$(y+1)^y < y^{y+1}.$$

Não encontramos, na literatura, trabalhos que provem o caso geral dessa questão. Por isso, neste artigo, demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema 1. Para quaisquer números inteiros x e y, com $y > x > 1$, então $y^x < x^y$, a exceção dos pares $y = 3,\ x = 2$ e $y = 4, x = 2$.

Isto é, a menos destas duas exceções, a potência de maior expoente é maior que a potência de maior base.

Por exemplo, $33^{44} > 44^{33}$ e $66^{100} > 100^{66}$. As duas exceções a essa regra são o caso 3^2 e 2^3, em que a maior potência é a que possui o menor expoente, ou seja, $3^2 > 2^3$, e o caso 4^2 e 2^4, em que as potências são iguais.

A demonstração do Teorema 1 será dividida em dois casos, sendo que o segundo caso será demonstrado por duas maneiras diferentes. Nas duas demonstrações, precisaremos de lemas preliminares.

Para a demonstração, usaremos as noções básicas do Cálculo Diferencial, em particular, derivadas de funções reais, também usaremos o Limite Fundamental Exponencial e o conceito de sequências numéricas. Todos esses temas são assuntos que constam nos currículos dos cursos de graduação em Matemática, sejam de Licenciatura ou de Bacharelado. Este trabalho apresenta, portanto, um importante exemplo no qual diferentes ramos da Matemática se juntam na busca da solução de um problema.

2. Preliminares

Os seguintes lemas serão necessários.

Lema 1. A sequência $\sqrt[n]{n}$ é decrescente para n inteiro e $n \geq 3$.

Demonstração. Vamos supor $y = x^{1/x}$, para $x > 0$ real. Então, aplicando o logaritmo, temos:

$$\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x.$$

Derivando implicitamente com relação a x, temos:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x^2}.$$

Logo,

$$y' = \frac{y}{x^2} \cdot (-\ln x + 1).$$

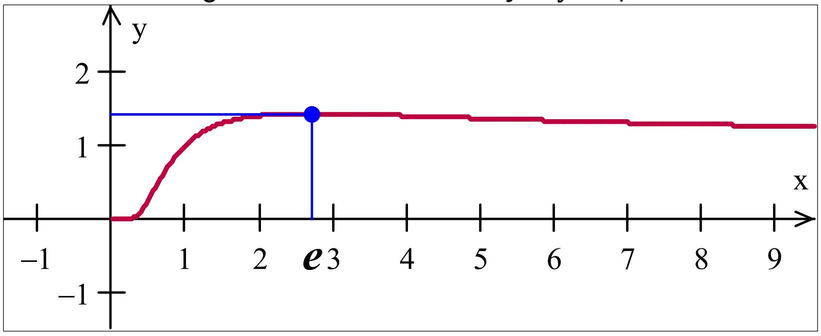
Isto é,

$$y' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} \cdot (-\ln x + 1).$$

Assim, $y' < 0$ se, e somente se, $-\ln x + 1 < 0$. Isto ocorre se, e somente se, $\ln x > 1$, isto é, $x > e$.

Sabemos que se a derivada de uma função real é negativa em determinado intervalo aberto, então essa função é decrescente nesse intervalo. Então, para $x > e$, a função $y = x^{\frac{1}{x}}$ é decrescente. O gráfico da Figura 1 ilustra essa situação.

Figura 1 – Gráfico da função $y = \sqrt[x]{x}$



Fonte: Elaboração dos autores no software livre Winplot.

Logo, considerando $n \geq 3$ inteiro, a sequência $\sqrt[n]{n}$ é decrescente, como queríamos demonstrar.

O próximo resultado refere-se ao cálculo do limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$, em que k é um inteiro positivo qualquer. Para tanto, lembremos do Limite Fundamental Exponencial (THOMAS, 2002):

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e,$$

em que $e = 2{,}71828...$ é a constante de Euler.

Lema 2. Dado k inteiro positivo, então

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

Demonstração. Queremos calcular o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n.$$

Então, aplicando a mudança de variáveis $\frac{k}{n} = u$, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{k}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^k = e^k.$$

Enfim,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k,$$

como queríamos demonstrar.

O próximo lema trata-se de uma variação da Desigualdade de Bernoulli (FIGUEIREDO, 1974). A desigualdade de Bernoulli afirma que, dados $a \geq -1$ e n inteiro positivo, vale a desigualdade

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Lema 3. Para todo $0 < a < 1$ e $n \geq 2$, tem-se que

$$(1-a)^n > 1-an.$$

Demonstração. Façamos por indução em n. Para $n = 2$, temos:

$$(1-a)^2 = 1-2a+a^2 > 1-2a.$$

Agora, suponha válido para $n > 2$ fixo e iremos provar para $n+1$. Para $1-an < 0$ o Lema 3 torna-se imediato. Então, vamos supor $1-an > 0$. Como $1-a > 0$, e usando a hipótese de indução $(1-a)^n > 1-an$, podemos fazer:

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)^n(1-a) > (1-an)(1-a) =$$
$$1-a-an+a^2n > 1-a-an = 1-a(n+1),$$

como queríamos demonstrar.

Agora, usando os Lemas 2 e 3, vamos provar o seguinte.

Lema 4. Para $n \geq 2$ inteiro e para todo $k \geq 1$ inteiro fixado, a sequência

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$$

é crescente e

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < e^k.$$

Já vimos pelo Lema 2 que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$, para todo k real, em particular para $k \geq 1$ inteiro. Então, basta mostrarmos que $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ é estritamente crescente.

Demonstração. Vamos usar o Lema 3 com $a = \frac{k}{(n+1)(n+k)}$, que é menor que 1 e maior que zero, e usar $n+1$ no lugar de n. A seguinte desigualdade é verdadeira, portanto, pelo Lema 3:

$$\left(1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} > \left[1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}(n+1)\right].$$

Esta desigualdade é equivalente às seguintes desigualdades:

$$\left(1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} > 1 - \frac{k}{(n+k)} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{k}{n+k} < \left(1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n+k} < \left(\frac{(n+1)(n+k) - k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n+k} < \left(\frac{n^2 + nk + n}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n+k} < \left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n+k} < \left(\frac{n}{n+k}\right)^{n+1} \left(\frac{n+k+1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n+k}\left(\frac{n+k}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+k+1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{n+k}{n}\right)^{n} < \left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n} < \left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Isso mostra que, fixado k, a sequência $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ é crescente.

Agora, como a sequência $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ tende a e^k quando n tende a infinito, e é crescente, então $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < e^k$, como queríamos demonstrar.

Na próxima seção, vamos provar nosso resultado principal.

3. Ordenação das potências x^y e y^x

Demonstremos o Teorema 1, que estabelece a ordenação entre potências simétricas nos inteiros positivos.

Observe primeiro que, fixado $x_0 > 1$, provar que $y^{x_0} < x_0^y$ para $y > x_0$ significa provar que a função exponencial $f(y) = x_0^y$ é maior do que a função polinomial $g(y) = y^{x_0}$ para todo $y > x_0$

(com as duas exceções acima já mencionadas). Ora, é bem conhecido que a função exponencial $f(y) = x_0^y$ se torna maior do que a função polinomial $g(y) = y^{x_0}$ a partir de um certo y, e o que vamos fazer é mostrar que isso ocorre a partir do valor $y = x_0 + 1$.

Vamos dividir a demonstração do teorema em etapas.

Caso 1) $x = 2$.

Por hipótese, temos $y > 2 > 1$. Para $y = 3$, vimos acima que estamos na exceção, ou seja, vale a desigualdade inversa do teorema: $3^2 > 2^3$.

Para $y = 4$, também estamos na exceção, pois vale a igualdade $4^2 = 2^4$.

Provemos, portanto, para $y \geq 5$, por indução sobre y. Para $y = 5$, temos:

$$2^5 > 5^2.$$

Logo, vale o resultado. Agora, suponha por hipótese de indução que, para algum $y > 5$, valha

$$2^y > y^2.$$

Queremos provar que o resultado vale para $y + 1$, ou seja, que $2^{y+1} > (y+1)^2$.

De $2^y > y^2$, temos:

$$2 \cdot 2^y > y^2 \cdot 2.$$

Ou seja, a desigualdade $2^{y+1} > 2y^2$ é verdade, por hipótese.

Logo, é suficiente provarmos que $2y^2 > (y+1)^2$, pois daí

$$2^{y+1} > 2y^2 > (y+1)^2.$$

Mas, $2y^2 > (y+1)^2$ ocorre se e somente se

$$2y^2 - y^2 - 2y - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y^2 - 2y - 1 > 0.$$

As raízes de $h(y) = y^2 - 2y - 1$ são $\frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ e $\frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Portanto, estudando o sinal da função $h(y)$, concluímos que, para $y \geq 5 > 1 + \sqrt{2}$, vale $h(y) > 0$ e, assim:

$$2^{y+1} > 2y^2 > (y+1)^2,$$

o que conclui a prova por indução do caso 1).

Caso 2) $x > 2$.

Por hipótese, temos $y > x > 2$. Ou seja, $y > x \geq 3$.

Sabemos pelo Lema 1 que a sequência $n^{\frac{1}{n}}$ é decrescente para $n \geq 3$.

Então, como $y > x \geq 3$, temos:

$$y^{\frac{1}{y}} < x^{\frac{1}{x}}.$$

Assim, elevando ambos os lados a xy, temos:

$$y^x < x^y.$$

Concluímos, portanto, a demonstração de nosso resultado para todos os casos possíveis.

Existe uma outra forma de demonstrar o caso 2, em que $x > 2$, que veremos agora.

Queremos provar que para todo $x > 2$ e todo $y > x$ inteiros, vale $x^y > y^x$.

Dado que $y > x \geq 3$, então existe k inteiro positivo tal que $y = x + k$, $k \geq 1$.

Pelo Lema 4, vale:

$$\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x < e^k.$$

Então, como $e < 3 \leq x$,

$$\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x < x^k.$$

Logo,

$$\left(\frac{x + k}{x}\right)^x < x^k.$$

Assim,

$$(x + k)^x < x^k x^x.$$

Ou seja,

$$(x + k)^x < x^{x+k}.$$

Enfim, como $y = x + k$,

$$y^x < x^y.$$

E assim termina essa segunda prova do caso 2).

4. Conclusão

Concluímos, portanto, por duas maneiras diferentes, que para x e y inteiros, se $y > x > 1$, então vale a seguinte ordem entre as potências simétricas x^y e y^x:

$$y^x < x^y,$$

a menos de $x = 2$ e $y = 3$ ou $y = 4$.

Por exemplo, entre 80^{11} e 11^{80}, sabemos, portanto, que 11^{80} é maior, por ter o maior expoente. Entre 2^{10} e 10^2, 2^{10} é maior.

No processo de demonstração foram usados conceitos básicos do Cálculo Diferencial, Sequências e o Princípio da Indução Finita.

Referências

FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 1974.

THOMAS, George B. **Cálculo 1**. v. 1. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.