Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico

A Stewart's Theorem Exploration with GeoGebra: from static to dynamic

Una exploración del Teorema de Stewart con GeoGebra: de lo estático a lo dinâmico

Lucas Santos Teixeira[1]
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, TO, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-0844-6264, http://lattes.cnpq.br/0548402043103079

Iara Martins Coelho[2]
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, TO, Brasil
https://orcid.org/0000-0003-3681-7242, http://lattes.cnpq.br/3996552218154895

Luis Andrés Castillo[3]
Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, PA, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-5174-9148, http://lattes.cnpq.br/4358821746569093

Ivonne Coromoto Sánchez[4]
Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, PA, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-2485-1059, http://lattes.cnpq.br/9964399535972053

Resumo: Nas décadas finais do século XX e início do século XXI, têm sido de interesse educacional estudos para o estabelecimento de diálogos entre a História da Matemática e as Tecnologias Digitais. Neste trabalho, objetivamos apresentar um objeto de aprendizagem elaborado no GeoGebra para o estudo do Teorema de Stewart. Para um novo ponto de vista da demonstração do referido teorema, foi realizada uma pesquisa bibliográfica tendo como fonte primária tratados antigos de matemática, com o intuito de promover o ensino de conteúdos da geometria euclidiana plana. São discutidas as formas de uso do GeoGebra como ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático, de visualização e de descoberta na verificação e exploração do Teorema de Stewart, materializada por informações históricas com o GeoGebra. A experiência do uso do objeto de aprendizagem permitiu a visualização de casos particulares como também possibilitou abordar outras situações geradas ao explorar o comportamento dos comprimentos dos segmentos em função da localização do ponto D na ceviana.

Palavras-chave: Teorema de Stewart; GeoGebra; Tecnologias Digitais; História da Matemática; Ensino.

Abstract: In the final decades of the 20th century and the beginning of the 21st century, studies have been of educational interest to establish dialogues between the History of Mathematics and Digital Technologies. In this work, we aim to present a learning object created in GeoGebra for the study of Stewart's Theorem. For a new point of view of the demonstration of the mentioned theorem, a bibliographical research was carried out having ancient treatises of mathematics, with the intention of promoting the teaching of contents of the flat Euclidean geometry, as primary source. The ways of using GeoGebra as a representation and

[1]**Currículo sucinto**: Licenciando em Matemática e bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) na Universidade Federal do Tocantins (UFT), *Campus* Arraias. Associado à Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Tocantins (SBEM-TO). **Contribuição de autoria**: Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: teixeira.lucas@mail.uft.edu.br.

[2]**Currículo sucinto**: Licencianda em Matemática e bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) na Universidade Federal do Tocantins (UFT), *Campus* Arraias. Associada à Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Tocantins (SBEM-TO). **Contribuição de autoria**: Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: martins.coelho@mail.uft.edu.br.

[3]**Currículo sucinto**: Licenciado em Educação menção Matemática e Física pela Universidad del Zulia (Venezuela). Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas e doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Brasil. Associado à Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Pará (SBEM-PA). **Contribuição de autoria**: Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: luiscastleb@gmail.com.

[4]**Currículo sucinto**: Licenciada em Educação menção Matemática e Física pela Universidad del Zulia (Venezuela). Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas e doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Brasil. Associada à Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Pará (SBEM-PA) **Contribuição de autoria**: Escrita – Revisão e Edição. **Contato**: ivonne.s.1812@gmail.com.

communication tool of mathematical knowledge, visualization and discovery in the verification and exploration of Stewart's Theorem, materialized by historical information with GeoGebra, are discussed. The experience of using the learning object allowed the visualization of both particular cases, as well as addressing other situations generated by exploring the behavior of segment lengths as a function of the location of point D on the cevian.

Keywords: Stewart's Theorem; GeoGebra; Digital Technologies; History of Mathematics; Teaching.

Resumen: En las décadas finales del siglo XX y principios del XXI, los estudios han sido de interés didáctico para establecer diálogos entre la Historia de las Matemáticas y las Tecnologías Digitales. En este trabajo, pretendemos presentar un objeto de aprendizaje creado en GeoGebra para el estudio del Teorema de Stewart. Para un nuevo punto de vista de la demostración del mencionado teorema, se realizó una investigación bibliográfica teniendo como fuente primaria tratados antiguos de matemáticas, con la intención de promover la enseñanza de contenidos de la geometría euclidiana plana. Se discuten las formas de utilizar GeoGebra como herramienta de representación y comunicación del conocimiento matemático, visualización y descubrimiento en la verificación y exploración del Teorema de Stewart, materializado por información histórica con GeoGebra. La experiencia de uso del objeto de aprendizaje permitió visualizar ambos casos particulares, así como abordar otras situaciones generadas al explorar el comportamiento de las longitudes de los segmentos en función de la ubicación del punto D en la ceviana.

Palabras clave: Teorema de Stewart; GeoGebra; Tecnologías Digitales; Historia de las Matemáticas; Enseñanza.

Data de submissão: 25 de dezembro de 2022.

Data de aprovação: 30 de junho de 2023.

1. Considerações Iniciais

A História da Matemática, como campo de pesquisa, está em constituição no Brasil desde as últimas cinco décadas do século XX e início do século XXI (MENDES, 2022). Nesse percurso temporal, pesquisadores, tanto da Educação Matemática como da Matemática desse campo, têm somado esforços para o estabelecimento de diálogos entre a História da Matemática e as Tecnologias Digitais. Thomsen, Jankvist e Clark (2022) fizeram uma revisão sobre o uso combinado da História da Matemática e das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da Matemática. No referido estudo, os autores enfatizam que os trabalhos mapeados propõem ou analisam atividades baseadas em fontes históricas primárias que são apoiadas em tecnologias digitais, especialmente software de geometria dinâmica (DGS) e sistemas de álgebra computacional (CAS).

No contexto brasileiro, tem sido incorporado esse interesse com uma ampla extensão de trabalhos desenvolvidos no uso de tratados históricos matemáticos, especificamente aqueles que datam entre os séculos XVI e XVII, para o ensino da matemática (PONTES; BATISTA; PEREIRA, 2021; PEREIRA, 2022; SILVA JUNIOR; SANTOS; PEREIRA). Agora, nas atividades baseadas em informações históricas e que incorporem as tecnologias digitais, temos, por um lado, aquelas que focalizam nos instrumentos presentes nos tratados e que têm interesse no estudo tanto da matemática no processo de construção deste tipo de artefato (ALVES; PEREIRA, 2019; SILVA; BATISTA, 2022), bem como aquela implícita no seu manuseio (ALVES, 2019). Por outro lado, atividades que possibilitam um olhar desde uma perspectiva mais contemporânea, por meio dessas tecnologias, de problemas ou demonstrações nesses tratados (COELHO *et al*., 2022; SÁNCHEZ; CASTILLO, 2022; TEIXEIRA *et al*., 2022).

Isoda (2002) descreve diversas tecnologias digitas para apoiar esses tipos de atividades supracitados, entre elas, *Graphing Software* (*Algebraic Expresser*, *Function Probe*, *Calculus Unlimited*); Software de Geometria Dinâmica (DGS) (JANKVIST; GERANIOU, 2021; MEADOWS; CANIGLIA, 2021), como o Cabri (BAKI; GUVEN, 2009), Geometer's Sketchpad (DENNIS; CONFREY, 1997); GeoGebra (ZENGIN, 2018; SOUSA, 2021; THOMSEN, 2021); Planilhas (Excel, Lotus, etc.); Sistemas de álgebra computacional (CAS) (HAŠEK; ZAHRADNÍK, 2015). Para o referido autor, essas tecnologias podem auxiliar os alunos a traduzir e interpretar conceitos por meio de várias representações.

Neste trabalho, temos o intuito de indagar sobre esse novo olhar que as tecnologias digitais permitem para os problemas históricos, como no caso de Hašek e Zahradník (2015), quando combinam o sistema de álgebra computacional *wxMaxima* e do software de matemática dinâmica GeoGebra para resolver um problema geométrico sobre cônicas e lugar geométrico de um livro didático do século XVIII, bem como para aquelas experiências relatadas por Sánchez e Castillo (2022) quando descrevem o uso do GeoGebra para (re)explorar uma validação do teorema de Pitágoras para dinamizar a demonstração planteada pelo Sócrates, registrada na obra intitulada *The Pythagorean Proposition*, de autoria de *Elisha Scott Loomis*, publicada no ano de 1968.

Este último diferencia-se da abordagem do problema histórico, pois, em vez de ir fazendo as construções passo a passo, descreve o uso de um Objeto de Aprendizagem elaborado na interface do GeoGebra, de maneira que seja possível, para os sujeitos envolvidos na atividade, visualizar a tradução dos conceitos na demonstração nas diversas representações que o software permitir. Pelo contexto anteriormente exposto, podemos perceber que existe uma variedade de teoremas que podem ser abordados e reinterpretados por meio das tecnologias digitais, especificamente por meio de softwares de matemática dinâmica, como o GeoGebra.

Neste trabalho, escolhemos o Teorema de Stewart pelo fato dele mobilizar conceitos matemáticos relacionados a polígonos, especificamente sobre triângulo e seus elementos constitutivos, considerando um tipo de segmento denominado de ceviana[1] Nosso objetivo, então, é descrever a exploração dinâmica do Teorema de Stewart para o ensino de conteúdos da geometria euclidiana plana, por meio de um Objeto de Aprendizagem (OA) desenvolvido no GeoGebra.

[1]Uma ceviana é qualquer segmento que parte de um vértice de um triângulo e corta o lado oposto a esse vértice.

TEIXEIRA, Lucas Santos; COELHO, Iara Marins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2002, 31 de agosto de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467.

Para alcançar nosso objetivo, primeiramente procuramos saber o contexto histórico-cultural sobre o surgimento do Teorema de Matthew Stewart (1746), seguidamente à nossa perspectiva adotada de OA. Depois, mostramos o modo de usar o GeoGebra na exploração dos OAs. Após, descrevemos o modo de abordar esse teorema no GeoGebra e, finalmente, apresentamos nossas considerações finais.

2. Objetos de Aprendizagem

Para Koper (2003), um Objeto de Aprendizagem (OA) é um recurso virtual disponível para que o professor o utilize com o intuito de contribuir com a aprendizagem dos seus alunos. Para Santos (2007), os OAs são como quaisquer materiais digitais que oferecem informações para a construção de conhecimento, informações em forma de uma imagem, página HTML, animação ou simulação. Neste artigo, nos referimos que um OA é "um recurso virtual que pode ser usado e reutilizado para apoiar a aprendizagem, por meio de atividade interativa, na forma de simulações ou animações (KALINKE *et al*., 2015).

Castillo, Gutiérrez e Sánchez (2020) mostraram que os OAs elaborados com GeoGebra têm suas vantagens e características que os destacam dentre os elaborados por outras Tecnologias Digitais, já que permitem aos alunos gerarem conjecturas e validá-las por descobertas de exploração e manipulação do recurso de um jeito mais dinâmico e interativo possibilitada pelas suas ferramentas e funcionalidades dinâmicas (CASTILLO; GUTIÉRREZ; SÁNCHEZ, 2020). Além disso, este tipo de recurso na interface do GeoGebra permite explorar de maneira dinâmica os conteúdos que o professor tem a intenção de ensinar e possibilita estabelecer vinculações entre as várias formas de representação dos conceitos matemáticos.

Para a exploração do referido teorema, foi desenvolvido um objeto de aprendizagem[2], em formato de uma página HTML, a partir do GeoGebra, para ser usado e reutilizado para apoiar a aprendizagem via uma atividade mais interativa que possibilite constatar a veracidade do Teorema e refletir outras possíveis conjeturas. Queremos esclarecer que verificamos este OA apenas para uma ceviana. Para saber como este OA, feito no GeoGebra, pode conseguir apoiar a compreensão desses conteúdos geométricos, precisamos compreender os modos de usá-lo na interface do GeoGebra, por isso, na seguinte seção, apresentamos alguns modos do uso do GeoGebra.

3. Usos do Geogebra

Nesta seção, fundamentamo-nos nas ideias de González (2016), que apresenta uma categorização para os usos do GeoGebra em situações de ensino e aprendizagem da Matemática.

[2]O objeto de aprendizagem pode ser acessado no link: https://www.geogebra.org/m/uaq2zavh.

Como *ferramenta de visualização*, o GeoGebra pode ser usado para oferecer uma perspectiva dinâmica de conceitos e relações matemáticas, a partir de múltiplos registros de representação (ISODA, 2002). Desta forma, os sujeitos têm a possibilidade de “ver” e “explorar” representações dos objetos matemáticos muitas vezes inacessíveis por médio de outros artefatos. No caso, com a ferramenta mover, podem arrastrar um polígono por algum dos elementos constitutivos, de maneira a validar a referida construção ou desvelar as propriedades intrínsecas ao tipo de figura. Desde um ponto de vista do Cálculo, os sujeitos podem modificar a representação geométrica de uma função real por meio de controles deslizantes associados à expressão algébrica deste conceito, o qual faz o efeito de modificações em tempo real, ambos sistemas de representação de maneira simultânea.

Como ferramenta de construção, este *software* possui diversas funcionalidades dinâmicas (CASTILLO; GONZÁLEZ, 2018), algumas agrupadas em caixas e outras em formato de comandos (CASTILLO; GUTIÉRREZ; SÁNCHEZ, 2020) que permitem tanto construções de objetos matemáticos segundo a janela do software que se esteja usando, exemplo, a janela álgebra, de visualização 2D ou 3D, planilha eletrônica, CAS quanto estatística e probabilidades.

Como ferramenta de descoberta, o GeoGebra pode favorecer a descoberta de padrões, regularidades ou invariantes matemáticos, por exemplo, invariantes geométricos (LABORDE, 1997), nos objetos exibidos nas diferentes janelas ou áreas de trabalho. Estas explorações têm a possibilidade de que os sujeitos sejam conscientes por meio de atividades com o software que os aproximem do conhecimento matemático institucionalizado ao longo da História, Espaço e Tempo.

Entendemos que esses modos de usar o GeoGebra descritos por González (2016) permite uma visão mais ampla de como pode ser integrado este software de matemática dinâmica em aulas de classes com diferentes propósitos. Um desses poderia ser a mediação de atividades baseadas em informações históricas, como no exemplo descrito no seguinte apartado.

4. Metodologia

Esta pesquisa é do tipo qualitativa e com abordagem bibliográfica, desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos, entre outros tipos de produções (GIL, 2010). Neste caso, foi feita uma pesquisa do tratado “*Some General Theorems of Considerable use in the Higher Parts of Mathematics*”, de Matthew Stewart, com o propósito de entender a construção do teorema aqui estudado, a fim de compreender a maneira como Stewart fez a demonstração e idealizar uma reinterpretação desta no GeoGebra.

5. Matthew Stewart e seu Teorema

O matemático escocês Matthew Stewart, retratado na Figura 1, nasceu no ano de 1717 em Rothsey e faleceu no ano de 1785, em Edimburgo. Stewart estudou na Universidade de Glasgow, onde foi aluno de Robert Simson. Depois de completar sua formação, ele frequentou algumas palestras dadas por Colin MacLaurin na Universidade de Edimburgo. Como consequência disso, consolidou-se uma relação amigável entre ambos os matemáticos. Anos depois, Stewart ensinou matemática naquela universidade e, mais tarde, ele ocupou a cadeira desta especialidade após a morte de MacLaurin.

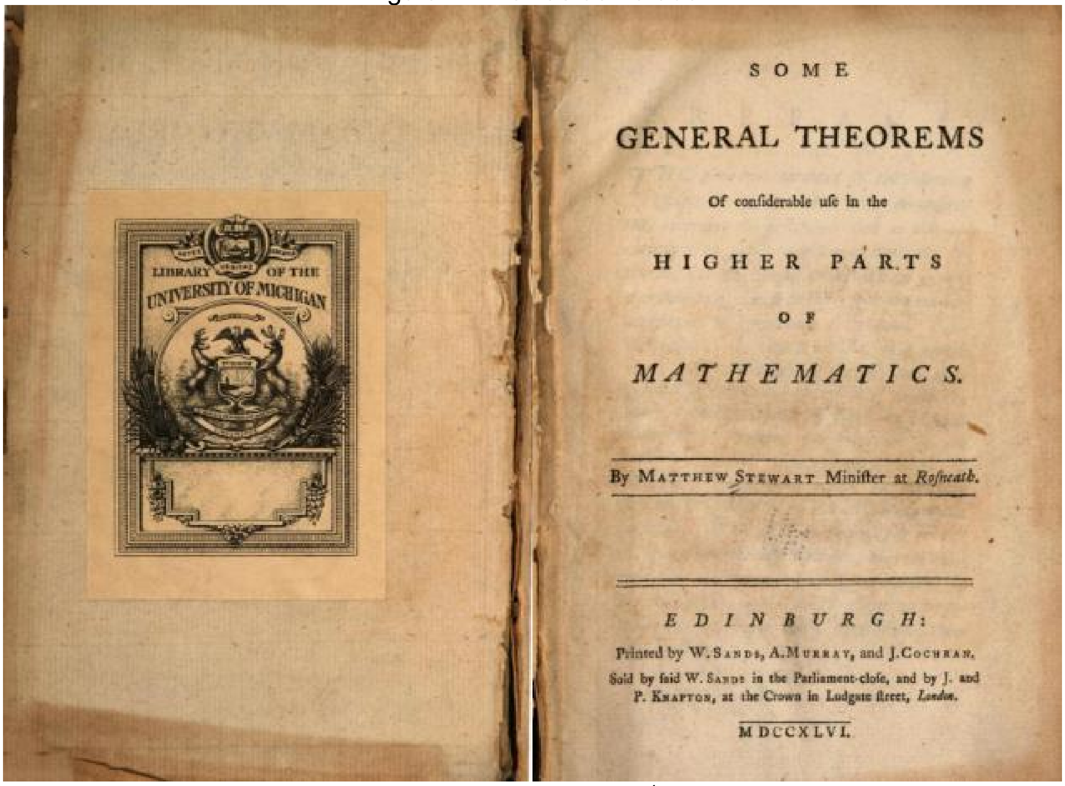
Figura 1 – Pintura de Matthew Stewart (1717-1785)

Fonte: Google imagens[3].

Stewart estava interessado em alguns problemas de mecânica celeste, especialmente trajetórias orbitais e distúrbios produzidos entre um planeta e outro. Adquiriu certo prestígio e reconhecimento no meio acadêmico após a publicação de sua obra *Some General Theorems of Considerable use in the Higher Parts of Mathematics,* Figura 2, alguns teoremas gerais comumente usados em vários ramos da Matemática Superior, onde foi publicado este teorema como a Proposição II e sua demonstração (Figura 3).

[3] Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0d/Matthew_Stewart.jpeg/200px-Matthew_Stewart.jpeg. Acesso em: 31 ago. 2023.

Figura 2 – Folhas do tratado



LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF MICHIGAN

S O M E

GENERAL THEOREMS

Of confiderable ufe in the

HIGHER PARTS

OF

MATHEMATICS.

By MATTHEW STEWART Minifter at *Rofneath.*

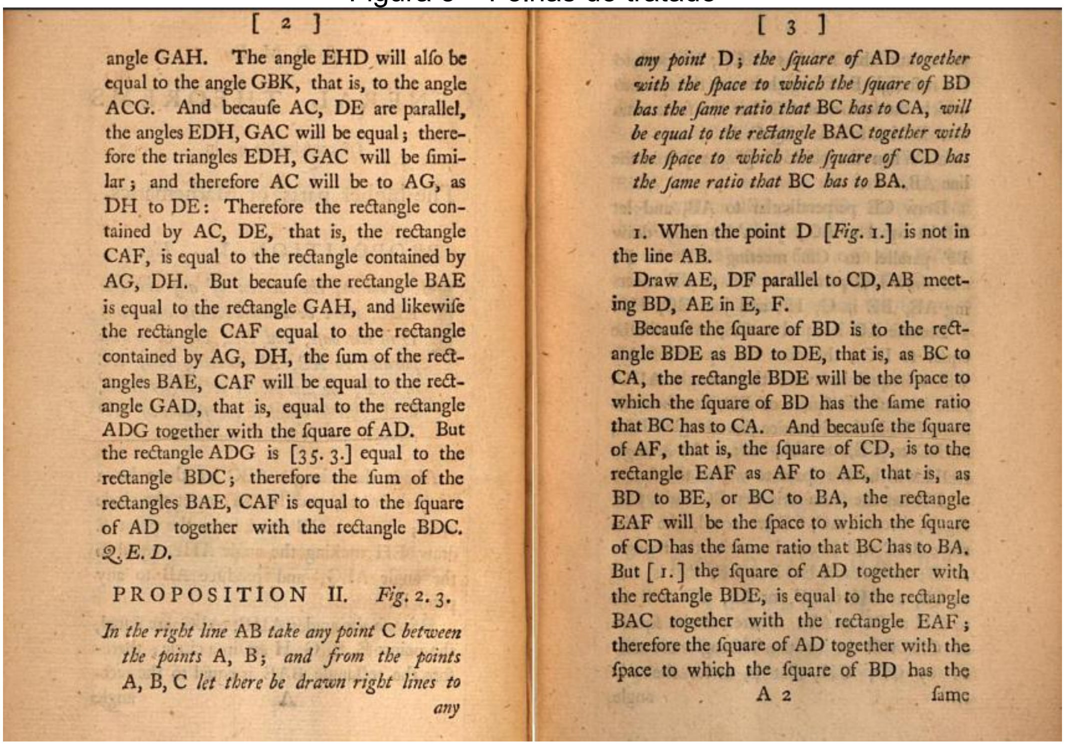
EDINBURGH:

Printed by W. SANDS, A. MURRAY, and J. COCHRAN. Sold by faid W. SANDS in the Parliament-clofe, and by J. and P. KNAPTON, at the Crown in Ludgate ftreet, *London.*

MDCCXLVI.

Fonte: Google books[4].

Figura 3 – Folhas do tratado



[2]

angle GAH. The angle EHD will alfo be equal to the angle GBK, that is, to the angle ACG. And becaufe AC, DE are parallel, the angles EDH, GAC will be equal; therefore the triangles EDH, GAC will be fimilar; and therefore AC will be to AG, as DH to DE: Therefore the rectangle contained by AC, DE, that is, the rectangle CAF, is equal to the rectangle contained by AG, DH. But becaufe the rectangle BAE is equal to the rectangle GAH, and likewife the rectangle CAF equal to the rectangle contained by AG, DH, the fum of the rectangles BAE, CAF will be equal to the rectangle GAD, that is, equal to the rectangle ADG together with the fquare of AD. But the rectangle ADG is [35. 3.] equal to the rectangle BDC; therefore the fum of the rectangles BAE, CAF is equal to the fquare of AD together with the rectangle BDC. *Q. E. D.*

PROPOSITION II. *Fig.* 2. 3.

In the right line AB *take any point* C *between the points* A, B; *and from the points* A, B, C *let there be drawn right lines to any*

[3]

any point D; *the fquare of* AD *together with the fpace to which the fquare of* BD *has the fame ratio that* BC *has to* CA, *will be equal to the rectangle* BAC *together with the fpace to which the fquare of* CD *has the fame ratio that* BC *has to* BA.

1. When the point D [*Fig.* 1.] is not in the line AB.

Draw AE, DF parallel to CD, AB meeting BD, AE in E, F.

Becaufe the fquare of BD is to the rectangle BDE as BD to DE, that is, as BC to CA, the rectangle BDE will be the fpace to which the fquare of BD has the fame ratio that BC has to CA. And becaufe the fquare of AF, that is, the fquare of CD, is to the rectangle EAF as AF to AE, that is, as BD to BE, or BC to BA, the rectangle EAF will be the fpace to which the fquare of CD has the fame ratio that BC has to BA. But [1.] the fquare of AD together with the rectangle BDE, is equal to the rectangle BAC together with the rectangle EAF; therefore the fquare of AD together with the fpace to which the fquare of BD has the fame

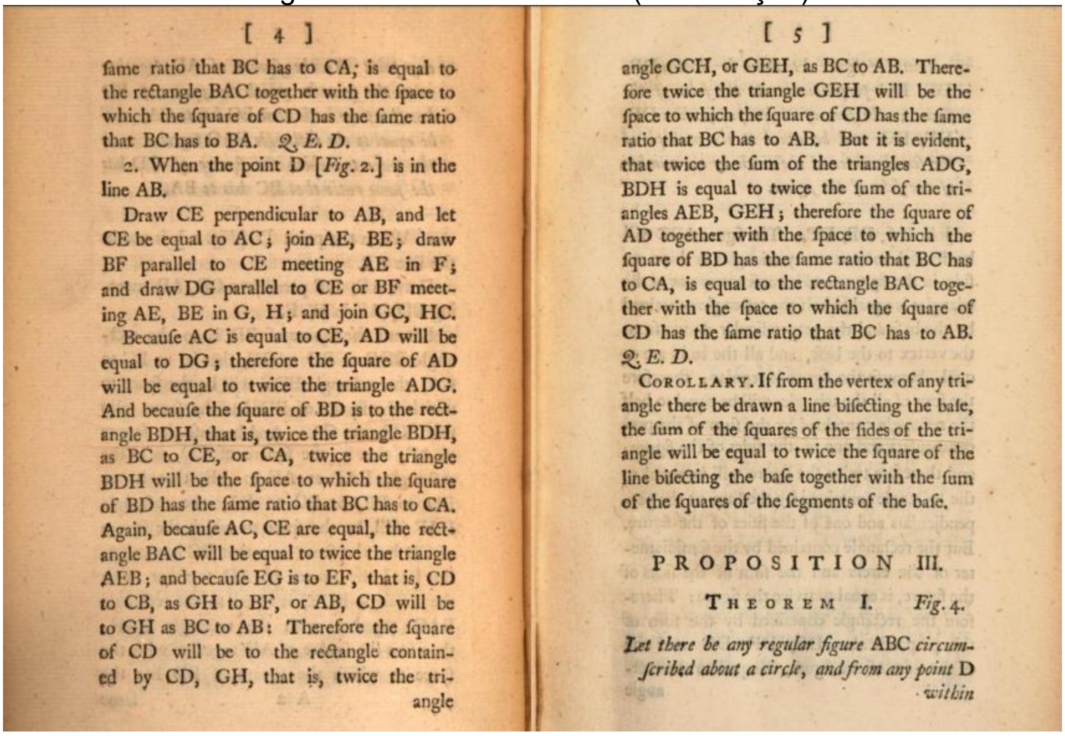
A 2

Fonte: Google books.

[4] Disponível em: https://play.google.com/books/reader?id=JGxbAAAAQAAJ&hl=pt-BR. Acesso em: 31 ago. 2023.

TEIXEIRA, Lucas Santos; COELHO, Iara Marins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2002, 31 de agosto de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467.

Figura 3 – Folhas do tratado (continuação)



[4]

ſame ratio that BC has to CA; is equal to the rectangle BAC together with the ſpace to which the ſquare of CD has the ſame ratio that BC has to BA. *Q. E. D.*

2. When the point D [*Fig.* 2.] is in the line AB.

Draw CE perpendicular to AB, and let CE be equal to AC; join AE, BE; draw BF parallel to CE meeting AE in F; and draw DG parallel to CE or BF meeting AE, BE in G, H; and join GC, HC.

Becauſe AC is equal to CE, AD will be equal to DG; therefore the ſquare of AD will be equal to twice the triangle ADG. And becauſe the ſquare of BD is to the rectangle BDH, that is, twice the triangle BDH, as BC to CE, or CA, twice the triangle BDH will be the ſpace to which the ſquare of BD has the ſame ratio that BC has to CA. Again, becauſe AC, CE are equal, the rectangle BAC will be equal to twice the triangle AEB; and becauſe EG is to EF, that is, CD to CB, as GH to BF, or AB, CD will be to GH as BC to AB: Therefore the ſquare of CD will be to the rectangle contained by CD, GH, that is, twice the triangle

[5]

angle GCH, or GEH, as BC to AB. Therefore twice the triangle GEH will be the ſpace to which the ſquare of CD has the ſame ratio that BC has to AB. But it is evident, that twice the ſum of the triangles ADG, BDH is equal to twice the ſum of the triangles AEB, GEH; therefore the ſquare of AD together with the ſpace to which the ſquare of BD has the ſame ratio that BC has to CA, is equal to the rectangle BAC together with the ſpace to which the ſquare of CD has the ſame ratio that BC has to AB. *Q. E. D.*

COROLLARY. If from the vertex of any triangle there be drawn a line biſecting the baſe, the ſum of the ſquares of the ſides of the triangle will be equal to twice the ſquare of the line biſecting the baſe together with the ſum of the ſquares of the ſegments of the baſe.

PROPOSITION III.

THEOREM I. *Fig.* 4.

Let there be any regular figure ABC *circumſcribed about a circle, and from any point* D *within*

Fonte: Google books.

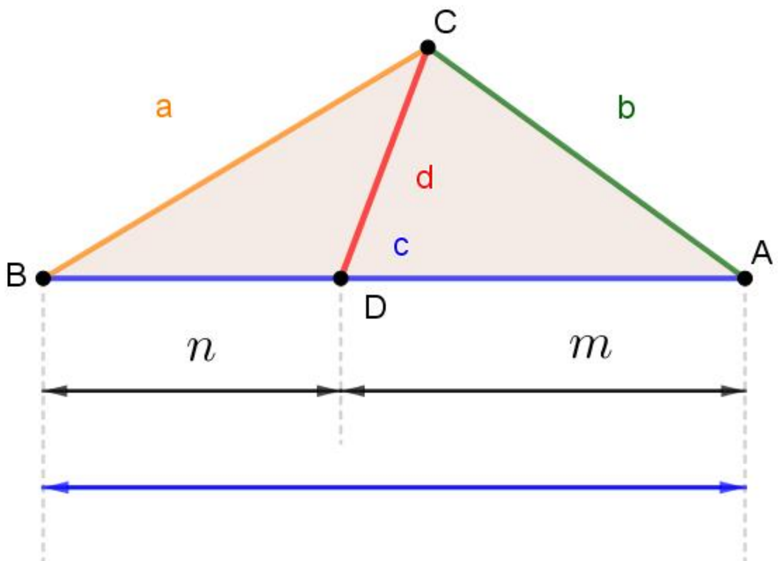
O texto a seguir é uma tradução nossa da referida proposição II, do tratado de Stewart. Infelizmente, a digitalização realizada pelo Google não contemplou as figuras que são referenciadas na proposição II, embora não seja tão complicado de representar a demonstração a partir da descrição no texto.

> Na linha reta AB, pegue qualquer ponto C entre os pontos A e B, e dos pontos A, B e C sejam traçadas linhas retas para qualquer ponto D; o quadrado de AD junto com o espaço para o qual o quadrado de BD tem a mesma razão que BC tem para CA, será igual ao retângulo BAC junto com o espaço para o qual o quadrado de CD tem a mesma razão que BC tem para BA.
>
> 1. Quando o ponto D [Fig. 1] não está na linha AB. Desenhe AE, DF paralelo a CD, AB encontrando BD, AE em E, F. Como o quadrado de BD está para o retângulo BDE como BD está para DE, ou seja, como BC está para CA, o retângulo BDE será o espaço ao qual o quadrado de BD tem a mesma razão que BC tem para CA. E porque o quadrado de AF, ou seja, o quadrado de CD, está para o retângulo EAF como AF para AE, ou seja, como BD para BE, ou BC para BA, o retângulo EAF será o espaço ao qual o quadrado, de CD tem a mesma razão que BC tem BA.
>
> Mas [I] o quadrado de AD junto com o retângulo BDE é igual ao retângulo BAC junto com o retângulo EAF; portanto, o quadrado de AD junto com o espaço para o qual o quadrado de BD tem a mesma razão que BC tem para CA; é igual ao retângulo BAC junto com o espaço para o qual o quadrado de CD tem a mesma razão que BC tem para BA.

> 2. Quando o ponto D [Fig. 2] está na linha AB, para atender CE ou BF, desenhe CE perpendicular a AB de forma que CE seja igual a AC; junte AE, BE, trace BF paralelo a CE ou BF encontrando AE, BE em G, H; e junte-se a GC, HC. Como AC é igual a CE, AD será igual ao dobro do triângulo ADG. E porque o quadrado de BD está para o retângulo BDH, ou seja, o dobro do triângulo BDH, como BC para CE, ou CA, o dobro do triângulo BDH será o espaço para o qual o quadrado de BD tem a mesma razão que BC tem para CA.
>
> Novamente, porque AC, CE são iguais, o retângulo BAC será igual a duas vezes o triângulo AEB; e porque EG está para EF, ou seja, CD para CB, como GH para BF, ou AB, CD estará para GH como BC para AB: Portanto, o quadrado de CD estará para o retângulo contido por CD, GH, ou seja, duas vezes o triângulo GCH, ou GEH, como BC para AB. Portanto o dobro da área do triângulo GEH será o espaço de CD tem a mesma razão que BC tem para AB. Mas é evidente que o dobro do triângulo ADG, BDH é igual ao dobro do dos triângulos AEB, GEH; portanto, o quadrado de AD junto com o espaço para o qual o quadrado de BD tem a mesma razão que BC tem para CA, é igual ao retângulo BAC junto com o espaço para o qual o quadrado de CD tem a mesma razão que BC tem para AB. (STEWART, 1746, tradução nossa).

O Teorema de Stewart expressa que, para todo $\boldsymbol{\Delta ABC}$ cujos lados medem $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, e a ceviana de comprimento $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{D}$ o ponto pertencente à reta suporte, temos que $\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{n} - \boldsymbol{d}^2\boldsymbol{c} = \boldsymbol{mnc}$ (Figura 4).

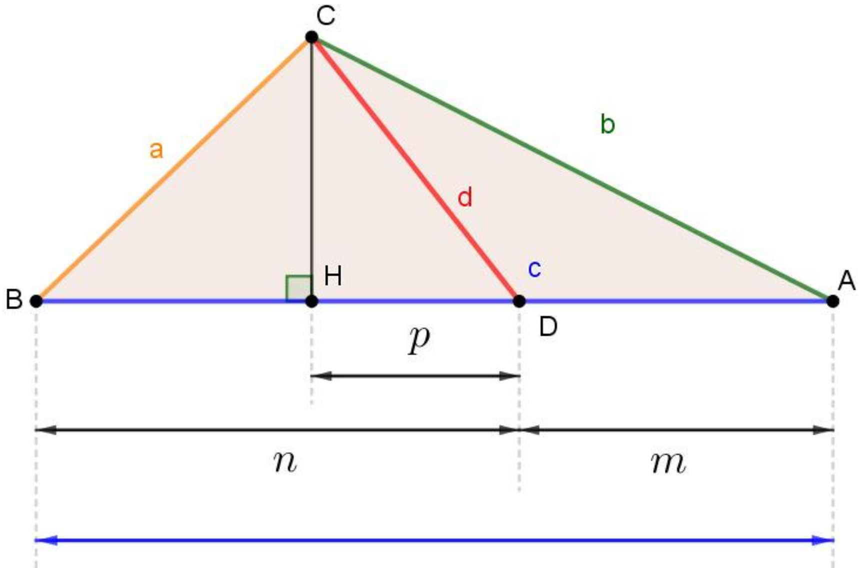
Figura 4 – Representação do Teorema de Stewart



Fonte: Elaboração dos autores.

A demonstração deste Teorema parte de considerar o $\boldsymbol{\Delta ABC}$, de lados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, ceviana de comprimento $\boldsymbol{d}$ em relação ao lado $\overline{\boldsymbol{BC}}$ e altura $\boldsymbol{h}$, onde $\overline{\boldsymbol{DH}} = \boldsymbol{p}$; $\overline{\boldsymbol{BD}} = \boldsymbol{n}$ e $\overline{\boldsymbol{DA}} = \boldsymbol{m}$ (Figura 5).

Figura 5 – Teorema de Stewart



Fonte: Elaboração dos autores.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ΔBCH e ΔCHD respectivamente, obteremos:

$$a^2 = h^2 + (n - p)^2$$
$$a^2 = h^2 + n^2 - 2np + p^2$$
$$h^2 = a^2 - n^2 + 2np - p^2 \quad (1)$$
$$d^2 = h^2 + p^2$$
$$h^2 = d^2 - p^2 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), teremos:

$$d^2 - p^2 = a^2 - n^2 + 2np - p^2$$
$$a^2 = d^2 + n^2 - 2np \quad (3)$$

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo $\Delta ACH,$ tem-se que:

$$b^2 = h^2 + (m + p)^2$$
$$b^2 = h^2 + m^2 + 2mp + p^2$$
$$h^2 = b^2 - m^2 - 2mp - p^2 \quad (4)$$

Substituindo (2) em (4), obteremos:

$$d^2 - p^2 = b^2 - m^2 - 2mp - p^2$$
$$b^2 = d^2 + m^2 + 2mp \quad (5)$$

Montando o sistema de equações utilizando as relações (3) e (5), encontraremos:

$$a^2 = d^2 + n^2 - 2np$$

$$b^2 = d^2 + m^2 + 2mp$$

No sistema, multiplicamos a primeira equação por m e a segunda equação por n, temos que:

$$a^2m = d^2m + n^2m - 2mnp$$

$$b^2n = d^2n + m^2n + 2mnp$$

Somando as duas equações termo a termo, resulta que:

$$a^2m + b^2n = n^2m + m^2n + d^2m + d^2n$$

$$a^2m + b^2n = mn(m + n) + d^2(m + n)$$

Como $c = m + n$, substituindo a mesma na última equação, concluiremos o resultado do teorema:

$$a^2m + b^2n = mnc + d^2c$$

$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$

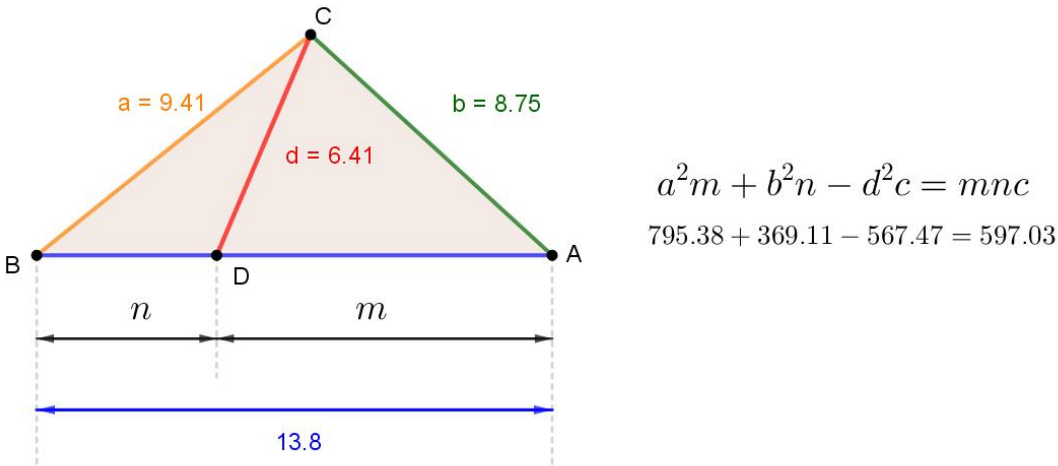
Na seguinte seção, apresentamos um OA para a exploração do teorema e a demonstração do mesmo com ajuda do GeoGebra.

6. A exploração do Teorema de Stewart no GeoGebra

Lembremos que o Teorema de Stewart expressa que, para todo ΔABC cujos lados medem a, b e c e a ceviana de comprimento d e D é o ponto pertencente à reta suporte, temos que $a^2m + b^2n - d^2c = mnc$. Na Figura 6, apresentamos nosso Objeto de Aprendizagem para a exploração do referido teorema.

TEIXEIRA, Lucas Santos; COELHO, Iara Marins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2002, 31 de agosto de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467.

Figura 6 – Objeto de Aprendizagem sobre Teorema de Stewart no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos autores.

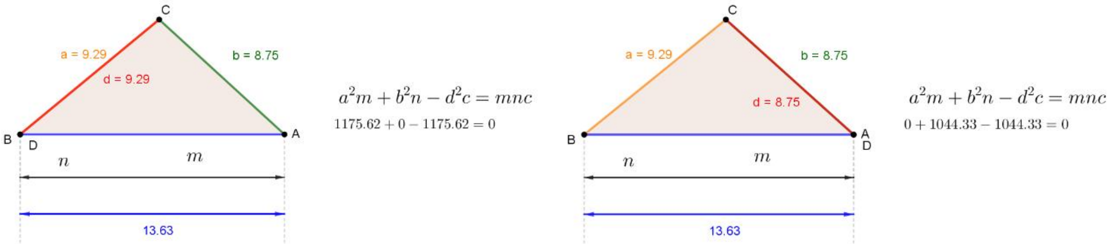
Esse objeto de aprendizagem no GeoGebra foi pensado para ser usado como ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático, como uma ferramenta de visualização e como ferramenta de descoberta na demonstração do teorema de Stewart. Para isso, precisaremos de uma funcionalidade dinâmica dos softwares próprio de geometria dinâmica, o arrastar ou *dragging* em inglês, com o qual, segundo Sáenz-Ludlow (2018, p. 202), agiliza-se a manipulação de figuras geométricas ou elementos que pertencem a esta, de maneira tal que, com uma manipulação intencional e experimentação planejada, possam ser observadas relações variantes e invariantes entre os elementos de uma figura geométrica, o que facilita a formação de conjecturas, bem como sua validação.

Nesse sentido, descrevemos, na continuação, uma manipulação e exploração intencional sugerida para que estudantes e professores, usando nosso OA, entendam o teorema de Stewart, a sua demonstração e outras possíveis conjecturas em função da posição do extremo da ceviana que não é vértice e dos lados do triângulo. O arrastar no GeoGebra realiza-se mediante a ferramenta mover. (PINHO; MORETTI, 2020).

Essas manipulações e explorações são provocadas por problematizações em forma de perguntas, nos termos de Mendes (2009), questões em aberto. Por exemplo, o teorema de Stewart cumpre-se quando o ponto $\boldsymbol{D}$ coincide com os vértices adjacentes? Explorando nosso recurso, obtemos dois casos quando $\boldsymbol{D}$ coincide com $\boldsymbol{A}$ e com $\boldsymbol{B}$ (Figura 7).

TEIXEIRA, Lucas Santos; COELHO, Iara Marins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2002, 31 de agosto de 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467.

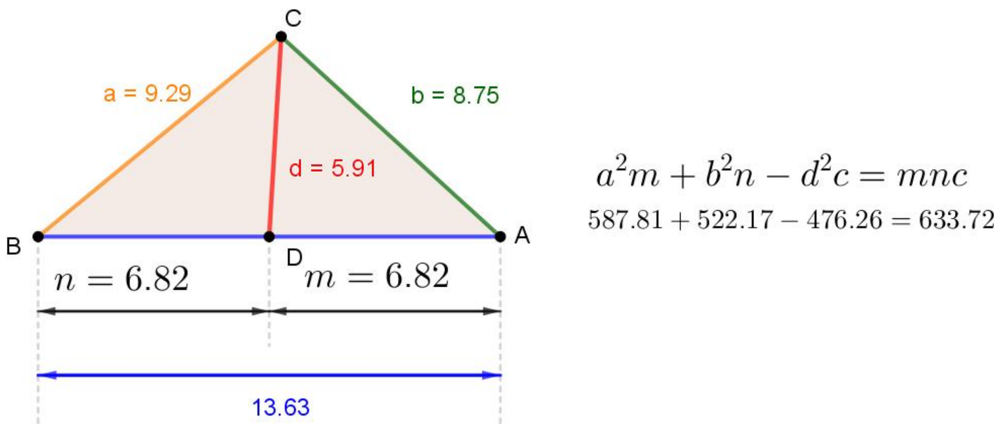
Figura 7 – Ponto coincide com os vértices não adjacentes



Fonte: Elaboração dos autores.

Nesta exploração pode-se constatar que o teorema ainda se cumpre e que o produto, no primeiro caso $\boldsymbol{b^2n} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{mnc} = \mathbf{0}$, logo a diferença de $\boldsymbol{a^2m} - \boldsymbol{d^2c} = \mathbf{0}$. No segundo caso, $\boldsymbol{a^2m} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{mnc} = \mathbf{0}$, logo a diferença de $\boldsymbol{b^2n} - \boldsymbol{d^2c} = \mathbf{0}$. Encerrando a questão anterior, abrem-se outras. Por exemplo, o que acontece quando o ponto $\boldsymbol{D}$ coincide com o ponto médio do segmento ***AB***? (Figura 8).

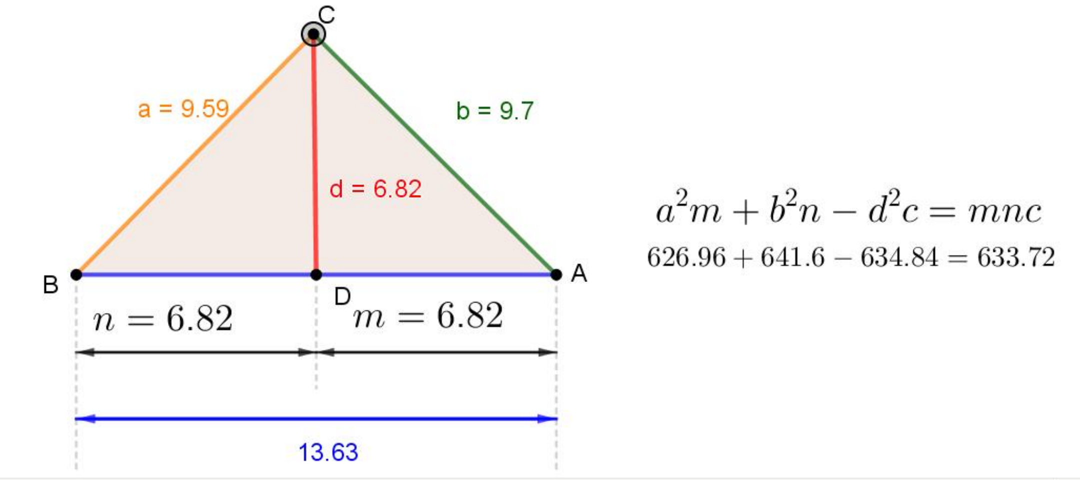
Figura 8 – Ponto coincide com o ponto médio do segmento ***AB***



Fonte: Elaboração dos autores.

No caso da figura anterior, temos que a ceviana agora coincide com a posição da mediana relativa ao lado $\boldsymbol{c}$. Isso faz com que $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$ tenham o mesmo comprimento. Ainda se cumpre o teorema de Stewart e, neste caso particular, poderíamos modificar a expressão algébrica do referido teorema para $\boldsymbol{a^2m} + \boldsymbol{b^2n} - \boldsymbol{d^2c} = \boldsymbol{m^2c}$ ou $\boldsymbol{a^2m} + \boldsymbol{b^2n} - \boldsymbol{d^2c} = \boldsymbol{n^2c}$. Seguindo este raciocínio, o que aconteceria se a ceviana tivesse o mesmo comprimento que $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$? (Figura 9).

Figura 9 – Segmento CD com comprimento igual ***n*** ou ***m***



Fonte: Elaboração dos autores.

Nesse caso, é surpreendente que os produtos de $\boldsymbol{d^2c \neq m^2c}$ ou $\boldsymbol{d^2c \neq n^2c}$, sejam distintos apesar de termos arrastado, com a ferramenta mover, o vértice $\boldsymbol{C}$, a tais coordenadas que o segmento $\boldsymbol{CD}$ tivesse o comprimento de $\boldsymbol{n}$ ou $\boldsymbol{m}$. Pinho e Moretti (2020) alertam sobre situações semelhantes na figura 7 quando, no seu trabalho, fazem uma discussão sobre erros de arredondamento, o que explicaria o fato de os produtos serem desiguais. Essas limitações não tornam o GeoGebra um software inútil, pelo contrário, Pinho e Moretti (2020, p. 42) destacam que conhecer tanto as potencialidades como as limitações de uma ferramenta "é uma condição necessária para que se possa trabalhar com proveito com essa ferramenta, resultante das limitações de precisão do *software*".

As questões planteadas foram fechadas, porém, seguindo o raciocínio, poderão surgir outras em aberto, por exemplo, o que acontece se os segmentos $\boldsymbol{BC}$ e $\boldsymbol{CA}$ tiverem o mesmo comprimento? Ou se o triângulo $\boldsymbol{ACB}$ for isósceles? Se for aplicada esta última questão, a ceviana coincidirá com outros segmentos de nomes notáveis?

7. Considerações Finais

Nesse trabalho, tivemos como objetivo descrever a exploração dinâmica do Teorema de Stewart para o ensino de conteúdos da geometria euclidiana plana por meio de um OA desenvolvido no GeoGebra.

Foram destacadas algumas maneiras de usar o GeoGebra, como ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático como uma ferramenta de visualização e como ferramenta de descoberta na demonstração do teorema de Stewart. Com essas maneiras de usar o GeoGebra em função de um objeto de aprendizagem, podemos considerar que o OA desenvolvido tem a possibilidade de catalisar as capacidades cognitivas do raciocínio na hora da exploração, generalização e experimentação na verificação de teoremas da geometria euclidiana plana como, no nosso caso, o Teorema de Stewart.

Nossa maneira de pensar a respeito desse tema é baseada na experiência de que o software nos permitiu a visualização tanto de casos particulares como também possibilitou abordar questões em aberto sobre o comportamento dos comprimentos dos segmentos em função da localização do ponto D na ceviana relativa ao lado c. Nesse caso, por meio dessa tecnologia digital, conseguimos ampliar as informações históricas sobre este teorema e gerar novas questões que podem ser exploradas na sala de aula da Educação Básica.

Referências

ALVES, V. B.; PEREIRA, A. C. C. A reconstrução dos círculos de proporção no geogebra como uma atividade para a mobilização de conhecimentos matemáticos. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 5, n. 1, p. 19-28, 2019. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/41. Acesso em: 9 jul. 2023.

ALVES, V. B. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred**. 2019. 153 f. Orientadora: Ana Carolina Costa Pereira. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019. Disponível em: https://encurtador.com.br/inwyC. Acesso em: 8 ago. 2023.

BAKI, A.; GUVEN, B. Khayyam with Cabri: experiences of pre-service mathematics teachers with Khayyam's solution of cubic equations in dynamic geometry environment. **Teaching Mathematics and its Applications**, v. 28, n. 1, p. 1-9, mar. 2009. DOI: https://doi.org/10.1093/teamat/hrp001.

CASTILLO, L. A.; GUTIÉRREZ, R. E.; SÁNCHEZ, I. C. O uso do comando sequência na Elaboração de Simuladores com o software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 106-119, 2020. DOI: https://doi.org/10.23925/2020.v9i3p106-119.

CASTILLO, L. A.; GONZÁLEZ, J. L. P. El uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **UNIÓN**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v. 14, n. 52, p. 250-262, 2018. Disponível em: http://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/358. Acesso em: 31 ago. 2023.

COELHO, I. M.; TEIXEIRA, L. S.; CASTILLO, L. A.; SÁNCHEZ, I. C. Uma abordagem dinâmica do teorema de Viviani no GeoGebra. *In*: ENCONTRO GOIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2022, Catalão. **Anais** [...]. Catalão: SBEM-GO, 2022.

DENNIS, D.; CONFREY, J. Drawing logarithmic curves with Geometer's sketchpad: a method inspired by historical sources. *In*: KING, J. R.; SCHATTSCHNEIDER, D. (org.). **Geometry turned on!** Washington: MAA, 1997. p. 147-156.

GIL, A. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo, SP: Atlas, 2010.

GONZÁLEZ, J. L. P. GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. **Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC)**, Mérida, a. 7, n. 14, p. 9-23, 2016. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/8694/1/CLIC_Prieto2016.pdf. Acesso em: 9 jul. 2023.

HAŠEK, R.; ZAHRADNÍK, J. Study of historical geometric problems by means of CAS and DGS. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 53-58, 2015. Disponível em: https://go.gale.com/ps/i.do?p=AONE&u=googlescholar&id=GALE|A436543490&v=2.1&it=r&sid=AONE&asid=01cb6c77. Acesso em: 10 jul. 2023.

ISODA, M. Inquiring mathematics with history and software. *In*: FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (org.). **History in Mathematics Education**. New ICMI Study Series. [S.l.]: Springer, 2002. p. 351-358.

JANKVIST, U. T.; GERANIOU, E. “Whiteboxing” the Content of a Formal Mathematical Text in a Dynamic Geometry Environment. **Digital Experiences in Mathematics Education**, v. 7, n. 2, p. 222-246, 2021. DOI: https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6.

KALINKE, M. A.; DEROSSI, B.; JANEGITZ, L. E.; RIBEIRO, M. S. N. Tecnologias e educação matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. *In*: KALINKE, M. A.; MOCROSKY, L. F. (org.). **Educação Matemática**: pesquisas e possibilidades. Curitiba: UTFPR, 2015.

KOPER, R. Combining re-usable learning resources to pedagogical purposeful units of learning. *In*: LITTLEJOHN, A. (org.) **Reusing online resources**: a sustainable approach to eLearning. London: Kogan Page, 2003. p. 1-8.

LABORDE, Colette. Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. *In*: PUIG, L. (org.). Investigar y enseñar. **Variedades de la educación matemática**. Mexico: “Una empresa docente” e Grupo editorial iberoamérica, 1997. p. 33-48.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition**. Classics in Mathematics Education. [S. l.]: National Council of Teachers, 1968.

MEADOWS, Michelle; CANIGLIA, Joanne. That Was Then…This is Now: Utilizing the History of Mathematics and Dynamic Geometry Software. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology**, v. 9, n. 2, p. 198-212, 2021. DOI: https://doi.org/10.46328/ijemst.1106.

MENDES, I. A. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, I. A. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **Revista Cocar**, n. 14, 2022. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5509. Acesso em: 9 jul. 2023.

PEREIRA, A. C. C. (org.) **Ensino de matemática**: conversas didáticas a partir de tratados históricos. 1. ed., Fortaleza: EdUECE, 2022. Disponível em: https://www.uece.br/eduece/wp-content/uploads/sites/88/2022/06/Ensino-de-matem%C3%A1tica_conversas-did%C3%A1ticas-a-partir-de-tratados-hist%C3%B3ricos.pdf. Acesso em: 9 jul. 2023.

PINHO, J. L. R.; MORETTI, M. T. O uso de Softwares de Geometria Dinâmica no estudo de Geometria Plana: potencialidades e limitações. **Acta Scientiae**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 22, n. 5, p. 25-43, 2020. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5870.

PONTES, L. M.; BATISTA, A. N. de S.; PEREIRA, A. C. C. A inserção de textos originais na disciplina de História da Matemática a partir de um problema do documento Sea Island Mathematical Manual. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, p. e202101, jan. 2021. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/4671. Acesso em: 31 ago. 2023.

SÁENZ-LUDLOW, A. Iconicity and Diagrammatic Reasoning in Meaning-Making. *In*: PRESMEG, N.; RADFORD, L.; ROTH, W.-M.; KADUNZ, G. (org.). **Signs of Signification**. Switzerland: Springer Cham, 2018. p. 193-215. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_11.

SÁNCHEZ, I. C.; CASTILLO, L. A. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 214-226, 2022. DOI: https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030.

SANTOS, M. E. K. L. **Objetos e ambientes virtuais de aprendizagem no ensino de matemática**: um estudo de caso para o estágio supervisionado de docência. 2007. 103 f. Orientador: Luiz Henrique Amaral. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2007.

SILVA, F. H. B. da; BATISTA, A. N. de S. Aspectos matemáticos e materiais da fabricação do báculo de Petrus Ramus frente a concepção de licenciandos em Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 165-180, 2022. DOI: https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8031.

SILVA JUNIOR, F. M. da; SANTOS, A. Gomes dos; PEREIRA, A. C. C. Um primeiro olhar sobre A short Treatise of the Description of the Sector. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 374–385, 2022. DOI: https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8034.

SOUSA, G. C. de. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **REMATEC**: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, v. 16, n. 37, p. 140–159, 2021. DOI: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310.

STEWART, M. **Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics**. Sands, Edinburgh: W. Sands, A. Murray, and J. Cochran, 1746.

TEIXEIRA, L. S.; COELHO, I. M.; CASTILLO, L. A.; SÁNCHEZ, I. C. A Exploração do Teorema de Stewart na Geometria Dinâmica com GeoGebra. *In*: ENCONTRO GOIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2022, Catalão. **Anais** [...]. Catalão: SBEM-GO, 2022.

THOMSEN, M. Working with Euclid’s geometry in GeoGebra: experiencing embedded discourses. *In*: NORTVEDT, G. A.; BUCHHOLTZ, N. F.; FAUSKANGER, J.; HREINSDÓTTIR, F.; HÄHKIÖNIEMI, M.; JESSE, B. E.; KURVITS, J.; LILJEKVIST, Y.; MISFELDT, M.; NILSEN, M.; PÁLSDOTTIR, G.; PORTAANKOVA-KOIVISTO, P.; RADISIC, J.; WERNEBERG, A. (ed.). **Bringing Nordic mathematics education into the future**: Proceedings of Norma 20. The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education, Oslo, n. 2020, p. 257-264, 2021. Disponível em: https://www.ucviden.dk/ws/portalfiles/portal/144566789/NORMA_20_preceedings.pdf. Acesso em: 9 jul. 2023.

THOMSEN, M.; JANKVIST, U. T.; CLARK, K. M. The interplay between history of Mathematics and Digital Technologies: a review. **ZDM Mathematics Education**, v. 54, p. 1631-1642, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0.

ZENGIN, Y. Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 49, n. 7, p. 1083-1098, 2018. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (FAPESPA) e da Universidade Federal do Pará.