

# Análise do custo de garantia para equipamentos com dois modos de falha dependentes

## Warranty cost analysis for equipment with two dependent failure modes

### Análisis de costos de garantía para equipos con dos modos de falla dependientes

Fernanda Márcia da Silveira Esteves<sup>1</sup>

Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-0710-7148>,  <http://lattes.cnpq.br/4969091450866720>

Allan Jonathan da Silva<sup>2</sup>

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET), Itaguaí, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-9763-6395>,  <http://lattes.cnpq.br/5862054444753494>

Felipe do Carmo Amorim<sup>3</sup>

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET), Itaguaí, RJ, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-6658-0106>,  <http://lattes.cnpq.br/6755074188329784>

**Resumo:** Um procedimento comum na Engenharia de Confiabilidade é calcular a probabilidade de sobrevivência de um sistema em série. Utiliza-se esta formulação para calcular a confiabilidade de um equipamento com múltiplos modos de falha independentes. No entanto, perde-se a hipótese de independência entre os componentes do sistema quando se tem modos de falha correlacionados. Neste trabalho, foi utilizada uma distribuição de probabilidade bivariada, a distribuição de Gumbel, para calcular o custo de garantia de um produto sujeito a dois modos de falha não independentes. As funções densidade de probabilidade conjunta e de confiabilidade foram apresentadas e as equações de custo sob três diferentes políticas foram desenvolvidas a partir deste modelo. Um algoritmo foi desenvolvido para calcular o tempo médio para a falha supondo que a ocorrência de qualquer um dos modos de falha faça com que o cliente reivindique a garantia. Por fim, alguns exemplos numéricos e gráficos dos custos de diferentes políticas são apresentados.

**Palavras-chave:** Confiabilidade; Modelos de Garantia; Distribuição de Gumbel.

**Abstract:** A common procedure in Reliability Engineering is to calculate the serial system survival probability. This formulation is used to calculate the reliability of an equipment with multiple independent failure modes. However, the hypothesis of independence between system components when there are correlated failure modes are lost. A bivariate probability distribution, the Gumbel distribution, was used in this study to calculate the warranty cost of a product subject to two non-independent failure modes. The joint probability density and reliability functions were presented and the cost equations under three different policies were developed from this model. An algorithm is designed to calculate the average time to failure assuming that the occurrence of any of the failure modes causes the client to claim the warranty. Finally, some numerical examples and cost graphs of different policies are presented.

**Keywords:** Reliability; Warranty Models; Gumbel Distribution.

<sup>1</sup> **Currículo sucinto:** Engenheira de Produção pelo Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), mestranda em Engenharia de Produção pela Universidade Federal Fluminense (UFF). **Contribuição de autoria:** Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição. **Contato:** [esteves.fernandamarcia@gmail.com](mailto:esteves.fernandamarcia@gmail.com).

<sup>2</sup> **Currículo sucinto:** Engenheiro de Produção pela Universidade Católica de Petrópolis (UCP), mestre e doutor em Modelagem Computacional pelo Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC). Atualmente é professor no Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ). **Contribuição de autoria:** Conceituação, Simulação e Validação. **Contato:** [allan.jonathan@cefet-rj.br](mailto:allan.jonathan@cefet-rj.br).

<sup>3</sup> **Currículo sucinto:** Engenheiro, mestre e doutor em Mecânica pela Universidade Federal Fluminense (UFF), especialista em Proteção Radiológica e Segurança de Fontes Radioativas pelo Instituto de Radioproteção e Dosimetria (IRD/CNEN) em parceria com a Agência Internacional de Energia Atômica (AIEA). Atualmente é professor do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ) e coordenador do Laboratório Maker CEFET/RJ Itaguaí (LMCI). **Contribuição de autoria:** Conceituação, Escrita – Revisão e Edição, Orientação. **Contato:** [felipe.amorim@cefet-rj.br](mailto:felipe.amorim@cefet-rj.br).



**Resumen:** Un procedimiento común en Ingeniería de Confiabilidad es calcular la probabilidad de supervivencia de un sistema en serie. Esta formulación se utiliza para calcular la fiabilidad de un aparato con múltiples modos de falla independientes. Sin embargo, la hipótesis de independencia entre los componentes del sistema se pierde cuando se pierden los modos de falla correlacionados. En este trabajo se utilizó una distribución de probabilidad bivariada, la distribución de Gumbel, para calcular el costo de garantizar un producto sometido a dos modos de falla no independientes. Las funciones de densidad de probabilidad conjunta y confiabilidad fueron presentadas, y se desarrollaron las ecuaciones de costo bajo tres políticas diferentes desde este modelo. Un algoritmo fue diseñado para calcular el tiempo promedio de falla asumiendo que la ocurrencia de cualquiera de los modos de falla hace que el cliente reclame la garantía. Finalmente, son presentados algunos ejemplos numéricos y gráficos de los costos de diferentes políticas.

**Palabras clave:** Fiabilidad; Modelos de Garantía; Distribución de Gumbel.

**Data de submissão:** 21 de novembro de 2022.

**Data de aprovação:** 14 de fevereiro de 2023.

## 1. Introdução

A Engenharia de Confiabilidade fornece ferramentas matemáticas e estatísticas para testar, monitorar e especificar a probabilidade de falha de itens, componentes, produtos e sistemas (ELSAYED, 2021). O objetivo da Engenharia de Confiabilidade é prover informações para tomada de decisão utilizando fatos quantitativos para mensurar a vida útil de ativos sob níveis de desempenho esperados e em ambientes especificados, por um tempo de operação estabelecido, com uma certa probabilidade, de modo a reduzir a confiança em julgamentos subjetivos (LOFSTEN, 2000). As informações de falha obtidas através dos estudos da Engenharia de Confiabilidade podem alimentar os setores de engenharia de produto, planejamento de produção, controle de qualidade, inspeções e testes, engenharia de manutenção, entre outros.

Segundo Leemis (1995), a confiabilidade de um item corresponde à sua probabilidade de desempenhar adequadamente o seu propósito especificado, por um determinado período e sob condições ambientais predeterminadas.

A incorporação de novas funcionalidades aos sistemas de produção aumentou a complexidade de operações e tem exigido mais confiabilidade e segurança dos processos produtivos. Com isso, técnicas de engenharia mais avançadas têm sido usadas para garantir o projeto, operação e manutenção dos sistemas produtivos com custos adequados, riscos controlados e desempenho esperado (RAPOSO, 2010).

Dado que os tempos até a falha de um produto são variáveis aleatórias, a distribuição de probabilidade dos tempos até falha caracterizada por uma função densidade de probabilidade, a função de confiabilidade, a função de risco, o tempo médio até falha e a função de vida residual média, são funções consideradas importantes no estudo de confiabilidade. Essas funções, a partir do modelo estatístico, dão origem às aplicações mais avançadas da Engenharia de Confiabilidade,



como a determinação de políticas de manutenção, políticas de inspeção periódica, planejamento de peças sobressalentes e de políticas de garantia (ELSAYED, 2021).

Fogliatto e Ribeiro (2009) indicam as distribuições exponencial, Weibull, gama e log-normal como as distribuições de probabilidade mais empregadas para modelar os tempos até a falha. Dentre estas distribuições univariadas mais utilizadas, destaca-se a distribuição de Weibull, que é capaz de modelar diversas características de vida de produtos e sistemas. Neste caso, quando o parâmetro de forma é igual a 1 tem-se que a função de risco é constante, reproduzindo a distribuição exponencial. Para o parâmetro de forma menor que 1 tem-se que a função de risco é decrescente. Para o parâmetro de forma maior que 1 tem-se que a função de risco é crescente, assumindo concavidade para baixo quando este valor é menor que 2 e concavidade para cima quando este é maior que 2 (ELSAYED, 2021).

No entanto, nas situações em que se tem simultaneamente mais de um modo de falha, torna-se necessário um modelo multivariado, isto é, uma única distribuição de probabilidade que descreve conjuntamente várias variáveis aleatórias. Em Chaudhary e Tyagi (2021) e em Chaudhary, Masih e Gupta (2022) foi desenvolvida uma política de reparo utilizando uma distribuição bivariada com correlação. Novas distribuições bivariadas estão em contínuo desenvolvimento, como pode ser encontrado em Paul e Thomas (2022). Elsayed (2021) apresenta uma abordagem via teoria das cópulas para tratar a correlação entre os modos de falha. Uma relaxação deste caso pode ser encontrada em Meeker, Escobar e Pascual (2021) e em Elsayed (2021), quando os modos de falha são independentes. Nestes casos, um modelo univariado pode ser utilizado para cada modo de falha e a confiabilidade do produto ser tratada através do conceito de sistemas em série.

Ao longo deste trabalho, será utilizada a distribuição de Gumbel, uma distribuição de probabilidade bivariada, para modelar os tempos de falha de um sistema com dois modos de falha correlacionados e calcular os custos de garantia sob diferentes políticas. Esta distribuição de probabilidade possui solução analítica para as principais funções de Engenharia de Confiabilidade, além de ser uma generalização da distribuição exponencial.

### 1.1. Modelos de Garantia

A confiabilidade dos produtos tem se tornado cada vez mais importante no mercado de produtos devido ao avanço tecnológico e competitividade das empresas, além do desejo dos consumidores por produtos mais confiáveis. Portanto, uma modelagem de garantia e políticas de garantia ótimas em produtos são essenciais para um bom posicionamento dos produtos em seus mercados consumidores (BLISCHKE; KARIM; MURTHY, 2011).



A garantia é geralmente definida como um contrato ou acordo que prevê que o fabricante de um produto ou serviço deve oferecer reparo, substituição ou o serviço necessário quando o produto apresenta falha, ou o serviço não atende às demandas dos usuários. Isso ocorre antes de um momento predeterminado no tempo correspondente à duração da garantia (BLISCHKE; MURTHY, 2000). Ao fornecer garantia sobre os produtos ou serviços, o fabricante garante um desempenho satisfatório por um determinado período de tempo, chamado de período de garantia. Em caso de falha, é oferecida pelo fabricante, reparo ou troca, que pode ocorrer a custo zero para o consumidor ou a um custo de acordo com o tempo decorrido desde a aquisição.

Para alguns autores, incluindo Fogliatto e Ribeiro (2009), existem três principais tipos de garantia: garantia integral do produto por meio de um pagamento limitado na íntegra; garantia integral do produto por meio de direito ilimitado e pro-rata. As políticas de garantia também podem ser determinadas usando um tipo de garantia de combinação, conhecida como garantia mista.

A garantia integral limitada fornece a substituição do item que falha por um novo ou restaurado, sem nenhum custo para o consumidor. O novo item herda a garantia pelo período restante da garantia original. Na garantia integral ilimitada, os itens substituídos têm período de garantia idêntico ao original. A garantia pro-rata propõe que o produto que falha antes do período de garantia seja renovado a um custo que depende da sua idade no momento da falha. O item substituído é coberto por uma garantia idêntica à original. Discussões mais aprofundadas sobre políticas de garantia podem ser encontradas em Rahman e Chattopadhyay (2015) e em Blischke, Karim e Murthy (2011).

Os dois primeiros tipos de garantia são vantajosos para o consumidor, enquanto a garantia pro-rata é benéfica para o fabricante. Assim, uma combinação pode ser usada para beneficiar ambas as partes. Por exemplo, uma política que consiste em um período de garantia inicial integral, seguido por um período de garantia tipo pro-rata, pode resultar em uma estratégia justa para o fabricante e o consumidor (ELSAYED, 2021).

Segundo Elsayed (2021), a escolha da política de garantia depende do tipo de reparo ou substituição a que os produtos estão sujeitos. Os produtos podem ser classificados como não reparáveis ou reparáveis. Produtos não reparáveis são aqueles para os quais o custo do reparo é similar ao custo de substituição ou em situações em que o acesso ao produto para reparo é problemático ou mesmo impraticável. Portanto, é mais interessante para o fabricante substituir o produto por um novo item. Produtos reparáveis são aqueles para os quais o custo de reparo e a logística envolvida no reparo é significativamente menor do que o custo de substituição de uma nova unidade.

Para produtos não reparáveis, há políticas de compensação completas e mistas, como pode ser encontrado em Fogliatto e Ribeiro (2009) e em Elsayed (2021). A primeira ocorre quando



o produto tem garantia integral, que foi descrita anteriormente. Se ocorrer uma falha dentro de um certo período de tempo, correspondente ao período de garantia, o item é repostado sem custo algum para o consumidor e uma nova garantia é emitida. O segundo combina garantias do tipo integral e pro-rata. Um produto que falha antes do tempo é substituído ou reparado sem custo algum para o consumidor; no entanto, as falhas ocorridas no intervalo entre o final do período integral e o final da garantia, não geram substituições integrais sem custo para o consumidor, e estão sujeitas à compensação linear *pro-rata*.

Neste trabalho foram calculados os custos de cada um desses três tipos de garantia de itens não reparáveis, utilizando equações de confiabilidade e da função densidade de probabilidade de falhas da distribuição de Gumbel. Para isto, é suposto um produto com dois modos de falha exponencialmente distribuídos e correlacionados. Conforme discutido em Muraleedharan Nair e Unnikrishnan Nair (1988) e introduzida por Gumbel (1960), a distribuição de Gumbel é uma função densidade de probabilidade bivariada cuja densidade marginal é uma distribuição exponencial. A função densidade conjunta correlaciona, através de um parâmetro constante, os tempos de dois modos de falha.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: na Seção 2, está apresentada a metodologia; o referencial teórico utilizado é apresentado na Seção 3; os resultados matemáticos e de simulação numérica são apresentados na Seção 4; e a Seção 5 conclui o trabalho.

## 2. Metodologia

Esta pesquisa possui caráter quantitativo e se baseia numa formulação probabilística para descrever modos de falhas não independentes. O objeto de estudo é um produto hipotético ou sistema cujos dois modos de falha existentes são correlacionados de forma homogênea no tempo. Sob este cenário, o estudo visou desenvolver matematicamente os custos de garantia deste produto sob três diferentes políticas de garantia renováveis: integral, pro-rata linear e mista.

O software Matlab (2022), também usado para a construção dos gráficos, foi utilizado para o desenvolvimento de uma simulação. A simulação objetiva gerar números aleatórios distribuídos conforme a distribuição de Gumbel para se obter uma estimativa para o tempo médio para a falha do equipamento hipotético estudado, visto que o MTTF (*Mean Time To Failure*) não possui solução analítica.

## 3. Referencial Teórico

A confiabilidade é definida conforme Equação (1):

$$R(T) = 1 - \int_0^T f(t)dt = \int_T^{\infty} f(t)dt, \quad (1)$$



onde  $f(t)$ ,  $\forall t > 0$ , é a função densidade de probabilidade de falhas (FOGLIATTO; RIBEIRO, 2009). A Equação (1) calcula a probabilidade de o produto não falhar até o tempo  $T$ . A confiabilidade é também chamada em alguns textos de função de sobrevivência.

A função densidade de probabilidade específica para cada caso é escolhida após a obtenção de dados históricos de falha, a devida estimação dos parâmetros através de métodos estatísticos – como o estimador da máxima verossimilhança (FOGLIATTO; RIBEIRO, 2009), e os testes de aderência. Uma série de distribuições de probabilidade e testes podem ser encontrados em Kececioglu (1991).

Especificada a forma com que o tempo para a primeira falha se distribui ao longo do tempo através da função densidade de probabilidade  $f(t)$ , pode-se encontrar diversas outras medidas de interesse, como a função de risco  $h(t)$  – que é a razão entre a função densidade de probabilidade e a função de sobrevivência, e o tempo médio para a falha (MTTF), dado pela Equação (2):

$$MTTF = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt. \tag{2}$$

O estudo sobre políticas de manutenção preventiva, planejamento de peças de reposição, inspeções e custos de garantia partem do conhecimento da distribuição de probabilidade que rege os tempos de falha (PHAM, 2003). Modelos de custos de garantia para as políticas apresentadas a seguir podem ser encontrados em Fogliatto e Ribeiro (2009), Elsayed (2021) e Blischke, Karim e Murthy (2011).

Seja  $C$  a despesa total com garantias acumuladas por produto vendido numa política de garantia ilimitada. Essa despesa é uma variável aleatória dada pela Equação (3):

$$C = \sum_{j=1}^K I(T_j), \tag{3}$$

onde  $K$  é uma variável aleatória que conta o número de falhas até a ocorrência da primeira falha que excede o tempo de duração da garantia e  $I(T_j)$  é a função do custo da falha para o fabricante sob uma dada política (ELSAYED, 2021). O objetivo é encontrar o valor esperado de  $C$ .

Supondo que o número de falhas  $K$  é independente da função do custo da falha  $I(T_j)$ , a partir da Equação (3) tem-se que o valor esperado de  $C$  é dado pela Equação (4):

$$E[C] = E[\sum_{j=1}^K I(T_j)] = E[K]E[I(T_j)]. \tag{4}$$

Como consequência, o número esperado de falhas  $K$  até um tempo  $W$  é dado pela Equação (5):

$$E[K] = \frac{F(W)}{R(W)}, \tag{5}$$

onde  $R(W)$  é dado pela Equação (1) e  $F(W) = 1 - R(W)$ . A dedução das Equações (4) e (5), partindo do princípio que  $C$  é um processo de Poisson composto, pode ser encontrada em Elsayed (2021). Em particular, tem-se que  $K$  segue uma distribuição geométrica com  $p = R(W)$ . Logo,  $P[K = n] = R(W)(F(W))^n$ , cuja esperança é dada pela Equação (5).



O custo esperado da falha  $I(T_j)$ , dado pela segundo termo da Equação (4), depende de dois fatores: da natureza da distribuição dos tempos de falha e da política de garantia adotada, cujo prazo  $g$  é arbitrário. Será denotada por  $\alpha$  a política de compensação integral, por  $\beta$  a política de garantia pro-rata linear e por  $\gamma$  a política de garantia mista.

O custo esperado da garantia para o fabricante segundo a política de compensação integral pode ser descrito de acordo com a Equação (6):

$$I_\alpha(T_j) = \begin{cases} c_0, & 0 \leq T_j \leq g_0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{6}$$

onde  $T_j$  é o tempo entre a  $j$ -ésima falha e sua antecessora ( $j - 1$ ),  $c_0$  é o custo unitário de uma reposição ou conserto e  $g_0$  é a duração da garantia com compensação integral. Nessa política, o tempo de garantia recomeça com a reposição do item. Utilizando o modelo de custo dado pela Equação (4), sendo que o primeiro termo é calculado através da Equação (5) e o segundo termo é obtido substituindo a Equação (6), tem-se que o custo esperado da garantia de um item com política de compensação integral é dado pela Equação (7):

$$E[C_\alpha] = \frac{F(g_0)}{R(g_0)} c_0 \int_0^{g_0} f(t) dt = \frac{c_0 F(g_0)^2}{R(g_0)}. \tag{7}$$

Utilizando o mesmo procedimento com as Equações (4) e (5), o custo esperado da garantia mediante política pro-rata linear é dado pela Equação (8):

$$E[C_\beta] = \frac{F(g_2)}{R(g_2)} \frac{c_0}{g_2} \int_0^{g_2} (g_2 - t) f(t) dt = \frac{F(g_2)}{R(g_2)} \frac{c_0}{g_2} \int_0^{g_2} F(t) dt, \tag{8}$$

onde

$$I_\beta(T_j) = \begin{cases} c_0(g_2 - T_j)/g_2, & 0 \leq T_j \leq g_2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{9}$$

A segundo termo da Equação (8) é obtido através da integral por partes de  $\int_0^{g_2} (g_2 - t) f(t) dt$ .

A política de garantia mista determina um custo de falha para o fabricante,  $I_\gamma(T_j)$ , dado pela função indicadora mostrada na Equação (10):

$$I_\gamma(T_j) = \begin{cases} c_0, & 0 \leq T_j \leq g_1 \\ c_0(g_2 - T_j)/(g_2 - g_1), & g_1 \leq T_j \leq g_2 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{10}$$

onde  $g_1$  refere-se à duração da garantia com compensação integral, e  $(g_2 - g_1)$  corresponde ao intervalo de tempo em que o produto está sob uma garantia do tipo pro-rata linear. Assim, o custo esperado mediante a política de garantia mista é dado pela Equação (11):

$$E[I_\gamma(T_j)] = c_0 \int_0^{g_1} f(t) dt + \frac{c_0}{g_2 - g_1} \int_{g_1}^{g_2} (g_2 - t) f(t) dt = \frac{c_0}{g_2 - g_1} \int_{g_1}^{g_2} F(t) dt. \tag{11}$$

Nota-se que o custo esperado é o custo unitário de uma reposição ou reparo perfeito vezes a probabilidade de a falha ocorrer antes de  $g_1$  mais a probabilidade de a falha ocorrer entre  $(g_2 -$

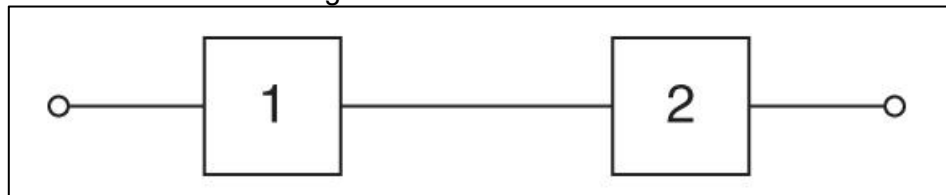


$g_1$ ) vezes a função linear do custo dada pela Equação (10). O resultado de  $E[I_Y(T_j)]$  dado na Equação (11) é decorrente da integração por partes do termo correspondente à política pro-rata linear e manipulações algébricas triviais. Logo, o custo esperado da garantia de um item submetido a uma política de garantia mista é dado pela Equação (12):

$$E[C_Y] = \frac{c_0 F(g_2)}{(g_2 - g_1)R(g_2)} \int_{g_1}^{g_2} F(t) dt. \tag{12}$$

Um equipamento que possui dois modos de falha pode ter a sua confiabilidade representada de acordo com um sistema em série, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Sistema em série



Fonte: Meeker, Escobar e Pascual (2021, p. 95).

A probabilidade de falha de um sistema composto por dois modos de falha é dada pela Equação (13):

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - [(1 - F_1)(1 - F_2)] \\ &= 1 - [1 - F_1 - F_2 + F_1 F_2] \\ &= F_1 + F_2 - F_1 F_2, \end{aligned} \tag{13}$$

onde  $F_i$  é a probabilidade de falha do  $i$ -ésimo modo de falha (MEEKER; ESCOBAR; PASCUAL, 2021). Quando não se pode garantir a independência dos modos de falha, deve-se descrever uma distribuição conjunta para  $F(t)$  de modo a considerar a correlação entre os modos de falha  $F_1$  e  $F_2$ .

A seguir, serão apresentados os modelos de custos sob a distribuição de Gumbel. A distribuição de Gumbel, estudada em Muraleedharan Nair e Unnikrishnan Nair (1988) e introduzida por Gumbel (1960), é uma distribuição exponencial bivariada de três parâmetros. Um deles caracteriza a correlação entre os modos de falha.

Seja um produto ou sistema que apresenta dois modos de falha correlacionados. Suponha que a distribuição de probabilidade dos tempos de falha seja dada por uma distribuição bivariada de Gumbel, introduzida por Gumbel (1960). A função de confiabilidade e a função densidade de falhas estão representadas a seguir, respectivamente pelas Equações (14) e (15):

$$R(t_1, t_2) = \exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_1 t_2) \tag{14}$$

$$f(t_1, t_2) = [(\lambda_2 + \lambda_{12} t_1)(\lambda_1 + \lambda_{12} t_2) - \lambda_{12}] \exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_1 t_2), \tag{15}$$

$$t_1, t_2 > 0,$$

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0,$$

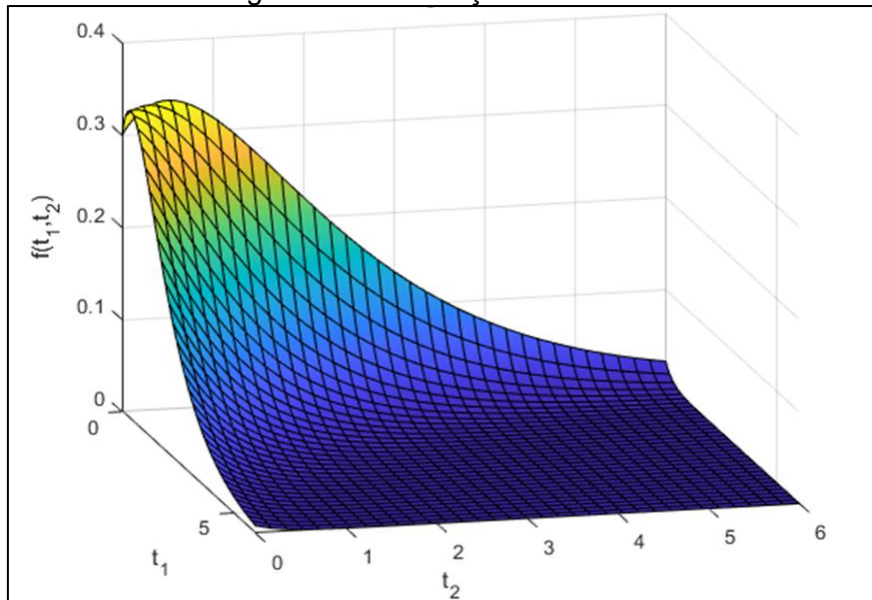
$$\lambda_{12} \geq 0,$$





onde  $t_1$  e  $t_2$  são os tempos até falha dos modos de falha. As constantes  $\lambda_1, \lambda_2$  são parâmetros do modelo que representam, respectivamente, a taxa de ocorrência de cada uma das falhas. O parâmetro  $\lambda_{12}$  caracteriza a correlação entre os tempos para as falhas dos modos 1 e 2. Na Figura 2 é mostrada a função densidade de probabilidade da distribuição bivariada de Gumbel para  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,8$  e  $\lambda_{12} = 0,5$ .

Figura 2 – Distribuição de Gumbel



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Para encontrar a função acumulada de probabilidade de falhas, fez-se o complementar da função de confiabilidade, isto é,  $F(t) = 1 - R(t)$ .

#### 4. Resultados

Utilizando a distribuição de Gumbel nos modelos de garantia apresentados na Seção 3, pode-se encontrar fórmulas para estimar o custo de garantia de itens com dois modos de falha e cujos tempos de falha são correlacionados. A partir deste ponto, supõe-se que os dois modos de falha estão sujeitos à mesma política de garantia e, a ocorrência de qualquer uma das duas falhas submete o produto à exigência de reparo total ou substituição.

Para a garantia com política de compensação integral, o custo estimado dado pela Equação (7) e pela distribuição de Gumbel é dado pela Equação (16):

$$E[C_\alpha] = \frac{c_0(1 - \exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_1 t_2))^2}{\exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_1 t_2)} \tag{16}$$

Sejam  $t_1$  e  $t_2$  iguais a  $g_0$ , pois qualquer um dos dois modos de falha está submetido à mesma garantia. Logo, tem-se a Equação (17):

$$E[C_\alpha] = \frac{c_0(1 - \exp(-\lambda_1 g_0 - \lambda_2 g_0 - \lambda_{12}(g_0)^2))^2}{\exp(-\lambda_1 g_0 - \lambda_2 g_0 - \lambda_{12}(g_0)^2)} \tag{17}$$



Para a garantia segundo política pro-rata dada pela Equação (8), o custo esperado segue conforme Equação (18):

$$E[C_\beta] = \frac{c_0(1 - \exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_1 t_2))}{g_2 \exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_1 t_2)} \times \int_0^{g_2} \int_0^{g_2} (g_2 - t_1 - t_2)[(\lambda_2 + \lambda_{12} t_1)(\lambda_1 + \lambda_{12} t_2) - \lambda_{12}] \exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_1 t_2) dt_1 dt_2. \quad (18)$$

Se  $t_1$  e  $t_2$  são iguais a  $g_2$ , tem-se a Equação (19):

$$E[C_\beta] = \frac{c_0(1 - \exp(-\lambda_1 g_2) - \exp(-\lambda_2 g_2) - \exp(-\lambda_{12}(g_2)^2 - \lambda_2 g_2 - \lambda_1 g_2))}{g_2 \exp(-\lambda_1 g_2 - \lambda_2 g_2 - \lambda_{12}(g_2)^2)} \times \int_0^{g_2} \int_0^{g_2} (-g_2)[(\lambda_2 + \lambda_{12} g_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} g_2) - \lambda_{12}] \exp(-\lambda_1 g_2 - \lambda_2 g_2 - \lambda_{12}(g_2)^2) dg_2 dg_2. \quad (19)$$

A garantia com política mista - cujo custo é dado pela Equação (12), sob a distribuição de Gumbel possui o custo esperado de acordo com a Equação (20):

$$E[C_\gamma] = \frac{c_0(1 - \exp(-\lambda_1 t_1) - \exp(-\lambda_2 t_2) - \exp(-\lambda_{12} t_1 t_2 - \lambda_2 t_2 - \lambda_1 t_1))}{(g_2 - g_1)(\exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_1 t_2))} \times \int_{g_1}^{g_2} \int_{g_1}^{g_2} 1 - \exp(-\lambda_1 t_1) - \exp(-\lambda_2 t_2) - \exp(-\lambda_{12} t_1 t_2 - \lambda_2 t_2 - \lambda_1 t_1) dt_1 dt_2. \quad (20)$$

Se  $t_1$  e  $t_2$  são iguais a  $g_2$ , tem-se a Equação (21):

$$E[C_\gamma] = \frac{c_0(1 - \exp(-\lambda_1 g_2) - \exp(-\lambda_2 g_2) - \exp(-\lambda_{12}(g_2)^2 - \lambda_2 g_2 - \lambda_1 g_2))}{(g_2 - g_1)(\exp(-\lambda_1 g_2 - \lambda_2 g_2 - \lambda_{12}(g_2)^2))} \times \int_{g_1}^{g_2} \int_{g_1}^{g_2} 1 - \exp(-\lambda_1 g_2) - \exp(-\lambda_2 g_2) - \exp(-\lambda_{12}(g_2)^2 - \lambda_2 g_2 - \lambda_1 g_2) dg_2 dg_2. \quad (21)$$

Sob o intuito de expandir as ferramentas de análise via simulação computacional, é importante que se possa gerar números aleatórios oriundos da distribuição de probabilidade suposta, dado que nem sempre são possíveis soluções analíticas para certos modelos. O MTTF e a função de renovação são típicos exemplos de modelos sem solução analítica que necessitam de aproximações por métodos numéricos para o devido cálculo (ELSAYED, 2021).

Um algoritmo foi desenvolvido para gerar os tempos de falha  $t_1$  e  $t_2$  para a distribuição de Gumbel, cuja função densidade de probabilidade é dada pela Equação (14). Gerou-se números aleatórios uniformemente distribuídos num cubo de tamanho  $(B - A) \times (D - C) \times M$ , de modo a verificar quais números aleatórios constavam abaixo da função. O conjunto de parâmetros  $(A, B, C, D, M)$  é escolhido de modo a cobrir o máximo espaço possível nas três dimensões onde a distribuição de probabilidade toma valores. Desta forma, gera-se um conjunto de números aleatórios, aproximadamente distribuídos de acordo com a distribuição de Gumbel. O procedimento é eficaz e é uma alternativa para quando métodos mais eficientes, como o método da transformada inversa (ROSS, 2012) não são matematicamente possíveis. Essa operação é mostrada no código Matlab (2022) do Quadro 1.



Quadro 1 – Algoritmo desenvolvido para gerar os tempos de falha  $t$  para a distribuição de Gumbel

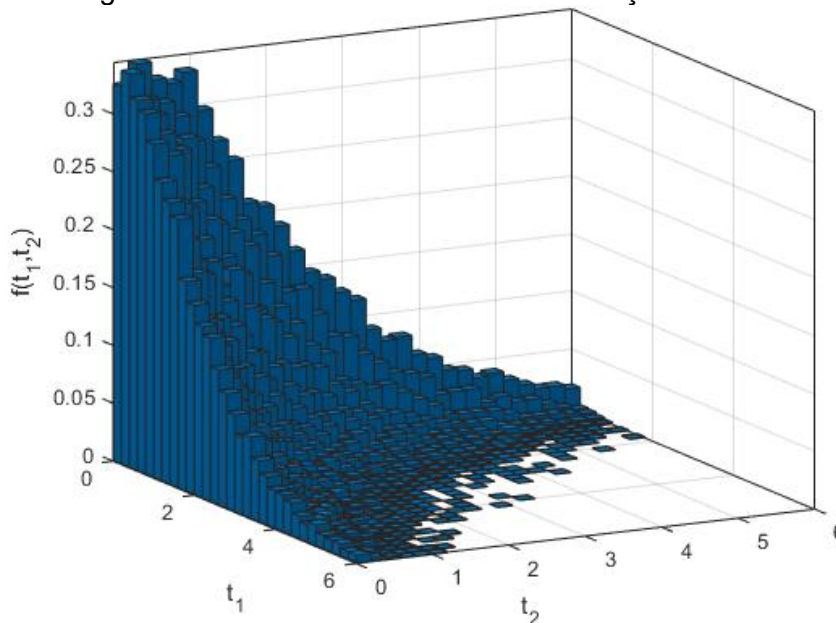
```
function [A T] = MC_area(f, M, a, b, c, d, n)

cc = 0;
for i=1:n
    x=a+rand(1)*(b-a);
    y=c+rand(1)*(d-c);
    z =rand(1)*M;
    if z<=f(x,y)
        cc=cc+1;
        T(cc,:) = [x y];
    end
end
end
A=M*(b-a)*(d-c)*cc/n;
% hist(T)
% title('Arrhenius-NTA random numbers');
% xlabel('Failure time') ;
% ylabel('Frequency') ;
end
```

Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Na Figura 3 são mostrados 100 mil números aleatórios gerados a partir da distribuição bivariada de Gumbel com  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\lambda_{12} = 0,5$ , impostos arbitrariamente. Adotou-se também  $a = 0$ ,  $b = 6$ ,  $c = 0$ ,  $d = 6$  e  $M = 0,4$ , de modo que não mais que 0,1% dos valores da distribuição se encontrassem fora do volume deste cubo.

Figura 3 – Números aleatórios da Distribuição de Gumbel



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Com a simulação acima, calcula-se o tempo médio para a falha (MTTF). De acordo com o sistema/equipamento abordado nas seções anteriores em que há dois modos dependentes de falha, considerou-se que cada falha do equipamento é dada por  $\min(t_1, t_2)$ . O MTTF é dado pela média dos tempos de falha observados. É importante ressaltar que qualquer um dos dois modos



de falha são classificados como falha do produto. O valor aproximado pela simulação para o MTTF é igual a 0,46 unidades de tempo.

Com os dados de falha da distribuição de Gumbel simulados, encontra-se uma aproximação da quantidade média de falhas durante um dado período de garantia. Sob os mesmos parâmetros da simulação anterior e fazendo  $t = 0,742$  com um milhão de números aleatórios simulados, encontrou-se que a média de falhas durante esse período foi de 4,04.

Com as soluções analíticas da Seção 3, fixando  $t = 0,742$ , o número de falhas esperado dado pela Equação (5) com  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\lambda_{12} = 0,5$  é igual a  $E[K] = 4$ . O resultado analítico confirma a eficácia da simulação e vice-versa.

Supondo uma política de garantia pro-rata linear e fazendo  $c_0 = 1$  com  $g_2 = 0,742$ , tem-se que o custo esperado da garantia por produto dado pela Equação (8) é igual a  $E[C_\beta(0,742)] = 1,92$ . No caso de uma política de compensação integral cujo custo é dado pela Equação (7), tem-se que  $E[C_\alpha(0,742)] = 3,21$ . Percebe-se que para este prazo, o custo da política de compensação integral é 66% maior que o custo da política pro-rata linear.

Para se encontrar o prazo da garantia que iguala o custo da garantia pro-rata linear, resolve-se a seguinte igualdade conforme mostrado na Equação (22):

$$E[C_\alpha] = E[C_\beta] \tag{22}$$

$$\frac{c_0(1 - \exp(-\lambda_1 g_2 - \lambda_2 g_2 - \lambda_{12}(g_2)^2))^2}{\exp(-\lambda_1 g_2 - \lambda_2 g_2 - \lambda_{12}(g_2)^2)} = \frac{c_0(1 - \exp(-\lambda_1 g) - \exp(-\lambda_2 g) - \exp(-\lambda_{12}(g)^2 - \lambda_2 g - \lambda_1 g))}{g \exp(-\lambda_1 g - \lambda_2 g - \lambda_{12}(g)^2)} X$$

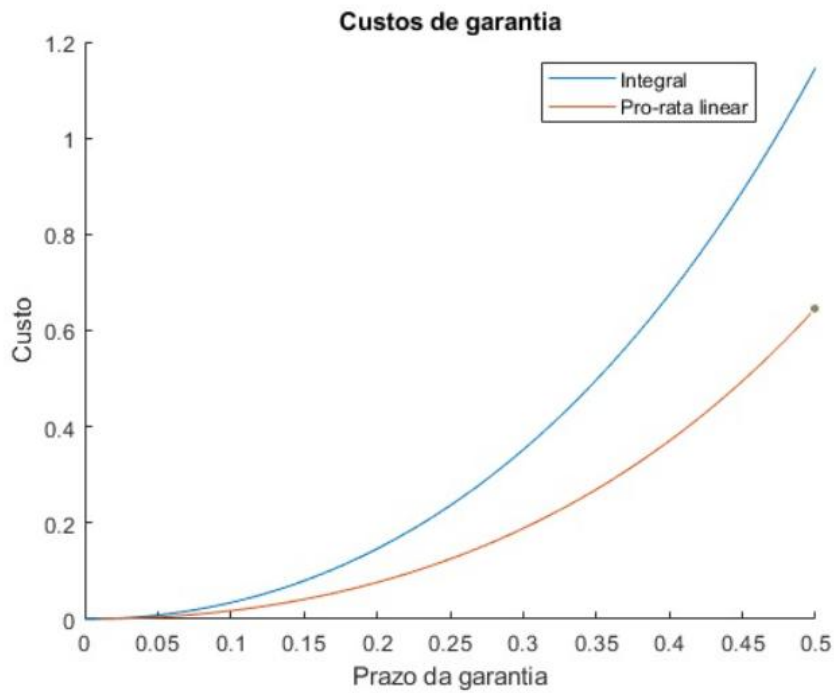
$$\int_0^g \int_0^g (-g)[(\lambda_2 + \lambda_{12}g)(\lambda_1 + \lambda_{12}g) - \lambda_{12}] X \exp(-\lambda_1 g - \lambda_2 g - \lambda_{12}(g_2)^2) dg dg.$$

Assim, resolvendo a Equação (22) para  $g$  com  $g_2 = 0,615$ , tem-se que  $E[C_\alpha] = E[C_\beta] =$  quando  $t$  é igual a 0,742. Como esperado, para o mesmo custo a política de compensação integral possui um prazo de garantia menor. Destaca-se que o custo do produto é igual a 1, enquanto o custo de se manter uma política de garantia integral pelo tempo de 0,615 ou a política de garantia pro-rata linear pelo tempo de  $t = 0,742$  com garantia renovável a cada falha é quase o dobro.

Na Figura 4 são ilustrados os custos de garantia para o exemplo anterior em função do prazo. Vê-se que o custo da garantia pro-rata, como esperado, é sempre menor que o custo de garantia integral para o mesmo prazo. Ainda pode-se destacar que, para que o custo de garantia não ultrapasse 10% do custo do produto, o tempo de garantia integral não pode ultrapassar  $t = 0,17$ . Para este prazo, o custo da garantia pro-rata linear é aproximadamente de 5% do custo do produto. Para este prazo, o número de falhas esperado é igual a 0,37.



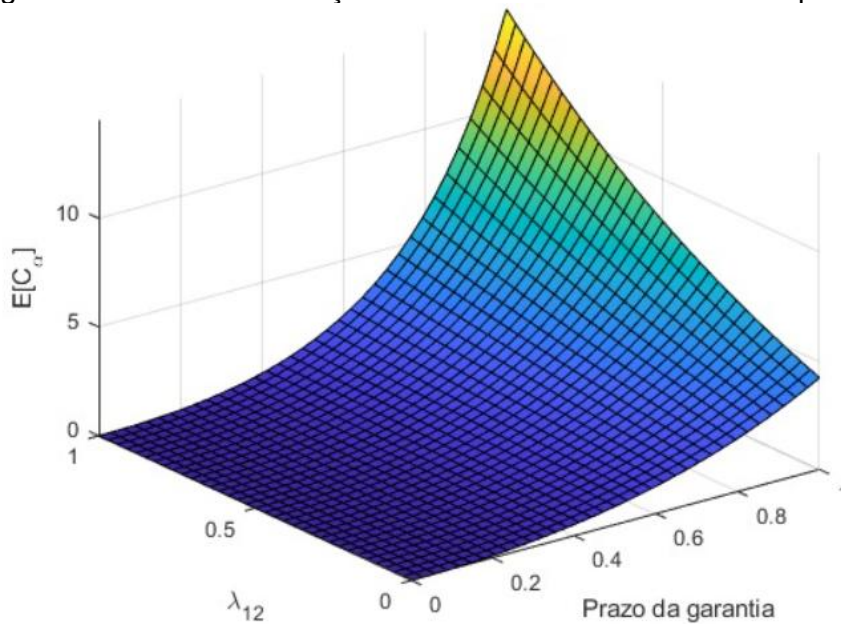
Figura 4 – Custos de garantia com relação aos prazos de garantia



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Por fim, na Figura 5 é mostrado o efeito do parâmetro de correlação. Nota-se que, a correlação tem alto impacto positivo no custo esperado de garantia  $E[C_{\alpha}]$ . Isto é, produtos com maior correlação entre os seus modos de falha possuem maior custo de garantia. No exemplo dado, o custo de garantia triplica para valores de  $\lambda_{12} = 1$  em relação a  $\lambda_{12} = 0$ . Além disso, como esperado, quanto maior o prazo de garantia, maior o seu custo médio.

Figura 5 – Efeito da correlação entre os modos de falha de um produto



Fonte: Elaboração dos autores (2022).



## 5. Conclusão

A distribuição bivariada de Gumbel fornece a modelagem adequada para dois eventos de falhas que são correlacionados e exponencialmente distribuídos. A partir da função de confiabilidade deste modelo, foi possível encontrar as equações para os modelos de custo médio de garantia para três diferentes políticas: integral, pro-rata linear e mista. Supondo parâmetros de taxa de falhas e tempo de duração da garantia, pode-se encontrar analiticamente o custo esperado de garantia para equipamentos sujeitos a dois modos de falha não independentes. Dessa forma, o fabricante do equipamento sob estudo pode planejar seus custos encontrando o valor justo da garantia.

Neste trabalho também foi desenvolvido um algoritmo para simular números aleatórios da distribuição de Gumbel e com isso, estimar o tempo médio para a falha do produto. A simulação também foi utilizada para verificar o resultado analítico encontrado para o número esperado de falhas para um dado período de garantia. O algoritmo pode auxiliar no cálculo de intervalos de manutenção preventiva e no dimensionamento de peças sobressalentes. Além destas, são sugestões de trabalhos futuros a função de renovação associada à distribuição de Gumbel, de modo a calcular os custos das políticas de garantia não-renováveis para produtos não-reparáveis.

## Referências

BLISCHKE, W. R.; KARIM, M. R.; MURTHY, D. N. P. **Warranty Data Collection and Analysis**. Springer Series in Reliability Engineering. New York: Springer, 2011.

BLISCHKE, W. R.; MURTHY, D. N. P. **Reliability**: Modeling, Prediction, and Optimization. New York: Wiley, 2000.

CHAUDHARY, P.; MASIH, S.; GUPTA, R. A Two Non-Identical Unit Parallel System with Repair and Post Repair Policies of a Failed Unit and Correlated Lifetimes. **Reliability Theory and Applications**, v. 17, n. 3 (69), p. 40-51, set. 2022. DOI: <https://doi.org/10.24412/1932-2321-2022-369-40-51>.

CHAUDHARY, P.; TYAGI, L. A Two Non-Identical Unit Parallel System Subject to Two Types of Failure and Correlated Life Times. **Reliability Theory and Applications**, v. 16, n. 2 (62), p. 247-258, jun. 2021. DOI: <https://doi.org/10.24412/1932-2321-2021-262-247-258>.

ELSAYED, E. A. **Reliability Engineering**. Wiley Series in Systems Engineering and Management. 3. ed. New York: Wiley, 2021.

FOGLIATTO, F. S.; RIBEIRO, J. L. D. **Confiabilidade e Manutenção Industrial**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

GUMBEL, E. J. Bivariate Exponential Distributions. **Journal of the American Statistical Association**, v. 55, n. 292, p. 698-707, 1960. DOI: <https://doi.org/10.2307/2281591>.



KECECIOGLU, D. **Reliability Engineering Handbook**. v. 1. Prentice-Hall, 1991.

LEEMIS, L. M. **Reliability**: probabilistic models and statistical methods. Prentice-Hall, 1995.

LOFSTEN, H. Measuring maintenance performance - in search for a maintenance productivity index. **International Journal of Production Economics**, v. 63, n. 1, p. 47-58, jan. 2000. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(98\)00245-X](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(98)00245-X).

MATLAB. **Versão R2022a**. MathWorks, 2022. Disponível em: <https://www.mathworks.com>.

MEEKER, W. Q., ESCOBAR, L. A., PASCUAL, F. G. **Statistical Methods for Reliability Data**. Wiley Series in Probability and Statistics. 2. ed. Wiley, 2021.

MURALEEDHARAN NAIR, K. R.; UNNIKRISHNAN NAIR, N. On characterizing the bivariate exponential and geometric distributions. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, v. 40, p. 267-271, jun. 1988. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00052343>.

PAUL, J.; THOMAS, P. Y. Sharma-Mittal Entropy Properties on Generalized (k) Record Values. **Reliability Theory and Applications**, v. 17, n. 1 (67), mar. 2022. DOI: <https://doi.org/10.24412/1932-2321-2022-167-398-410>.

PHAM, H. **Handbook of Reliability Engineering**. 1. ed. Springer, 2003.

RAHMAN, A.; CHATTOPADHYAY, G. **Long Term Warranty and After Sales**: Service Concept, Policies and Cost Models. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, 2015.

RAPOSO, C. Overall Equipment Effectiveness: aplicação em uma empresa do setor de bebidas do polo industrial de Manaus. **Revista Produção Online**, v. 11, n. 3, p. 648-667, 2010. DOI: <https://doi.org/10.14488/1676-1901.v11i3.529>.

ROSS, Sheldon M. **Simulation**. 5. ed. Elsevier, out. 2012.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao CEFET/RJ pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa.

